eUTOPÍA

REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

ISSN: 1870-8137

Didáctica de las Matemáticas

El Estudio de **Clases:** **UNA** alternativa para la **mejora** de la práctica docente en **MATEMÁTICAS.**

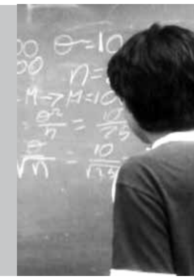
Las MATEMÁTICAS también se LEEN.

La estrategia DIDÁCTICA en la **enseñanza** y **aprendizaje de** las **MATEMÁTICAS.**

Cuarta época
Año 9
Número 24
enero-junio 2016

eUTOPÍA
REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

Contenido



eUTOPÍA
REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

eUTOPÍA
REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

Jesús Salinas Herrera
Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el CINVESTAV, IPN. Profesor titular "C" del área de Matemáticas adscrito al CCH, Plantel Vallejo. Ha coordinado diversos seminarios de Epistemología y Filosofía de las Matemáticas y diferentes programas de formación y actualización de profesores de la UNAM, como el Programa de Actualización y Superación del Personal Docente del Bachillerato (PAAS), el Programa de Integración Docencia e Investigación (PIDI), entre otros. Actualmente es tutor de MADEMS y miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), nivel I.

Julio César Valdez Monroy
Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa y estudiante del programa doctorado por el CINVESTAV, IPN. Profesor de asignatura de la materia Estadística y Probabilidad en el CCH, Plantel Vallejo. Ha participado en diversos congresos sobre educación matemática. Actualmente, realiza investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Luis Arturo Méndez Reyes
Doctor en Administración Pública por la UNAM. Realizó estancia posdoctoral en la Maestría en Ciencias de la Educación en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Profesor de asignatura de la materia de Administración y técnico académico titular "C" de tiempo completo adscrito a la Biblioteca Guillermo Haro del Plantel Oriente. Ha impartido clases de posgrado y dictado conferencias en distintas universidades del país. Tiene publicaciones en revistas impresas y electrónicas.

Arcelia Lara Covarrubias
Doctora en Humanidades, en Teoría literaria, por la UAM Iztapalapa. Licenciada y maestra en Literatura y licenciada en Filosofía por la UNAM. Profesora Titular "C" de tiempo completo adscrita al CCH, Plantel Naucalpan, en donde imparte el Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental. Ha impartido cursos en licenciatura y posgrado en la FES Acatlán y en la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM y publicado artículos en *Eutopía*, *Historia Agenda, Ritmo, La experiencia literaria* y *Textos. Didáctica de la Lengua y de la Literatura* (Barcelona); así como capítulos para cinco obras sobre crítica literaria y didáctica de su disciplina y el libro de cuentos *Lucina nunca duerme*.

Daniel Lara Covarrubias
Maestro en Ciencias en Economía por el Colegio de Postgraduados, Montecillo, Texcoco, Estado de México. Ingeniero agrónomo, especialista en Economía Agrícola. Profesor en el Centro de Bachillerato Tecnológico Agropecuario No. 286, de Juchipila, Zacatecas. Docente de asignatura de Matemáticas desde 1992 en tres planteles del CBTA del estado de Zacatecas, en donde imparte las materias de Cálculo diferencial y Probabilidad y Estadística. Actualmente es jefe de la oficina del Componente Básico y Propedéutico y presidente del Consejo Técnico Académico Estatal de la DGETA en Zacatecas.

Adolfo Primitivo Sánchez López
Licenciado en Actuaría por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Pasante de maestría en Educación Matemática de la UACP y PUNAM. Autor y coautor de varios materiales relacionados con la estadística, así como de ponencias y artículos. Profesor ordinario de carrera asociado "C" de tiempo completo adscrito al CCH, Plantel Sur.

Juan de Dios Hernández Garza
Ingeniero Agrónomo por la Universidad Autónoma de Tamaulipas. Especialización en Estadística Aplicada, IIMAS-UNAM. Maestría en Educación Matemática, UACPYP del CCH, UNAM. Doctorado en Educación, línea: Educación Matemática, UPN-SEP. Docente en el CCH, plantel Sur, con 25 años de experiencia.

Sandra Areli Martínez Pérez
Maestra en Matemática Educativa por el CINVESTAV, IPN. Profesora del CCH, Plantel Azcapotzalco, en donde imparte la materia de Matemáticas. Ha participado en dos proyectos INFOCAB y ha presentado ponencias en el congreso de la SMM, la EIME, SUMEM y de manera local en el plantel. Actualmente está en el programa de tutorías y el de asesorías.

eUTOPÍA
REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

Eutopía. Revista del Colegio de Ciencias y Humanidades para el bachillerato. *Cuarta época, año 9, número 24, enero-junio de 2016.* Es una publicación semestral editada por la Universidad Nacional Autónoma de México a través de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, Insurgentes Sur y Circuito Escolar s/n, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, CP 04510, México, DF, Tel. 5622 0025, correo electrónico:
eutopiacch@yahoo.com.mx
Editor responsable:
María Isabel Gracida Juárez.
ISSN: 1870-8137.
Certificado de licitud de título: 13915.
Certificado de licitud de contenido: 11488.
Reserva de derechos:
04-2007-021318471000-102.

Impresa en: Imprenta del Colegio de Ciencias y Humanidades, Monrovia 1002, Col. Portales, CP 3300, México, DF, Tel. 5606 2357. Distribución gratuita realizada por la Dirección General del CCH, lateral de Insurgentes Sur, esq. Circuito Escolar, 2o. piso, Ciudad Universitaria, CP 04510, México, DF, Tel. 5622 0025.

Tiraje: 1500 ejemplares.

Favor de dirigir correspondencia y colaboraciones a *Eutopía,* Dirección General del CCH, 1er. piso, Secretaría de Comunicación Institucional, Insurgentes Sur y Circuito Escolar, Ciudad Universitaria, CP 04510, Tel. 5622 0025.
eutopiacch@yahoo.com.mx

Ma. Emma Bautista García
Maestra en Desarrollo y Planeación de la Educación por la UAM, Xochimilco. Ingeniera Textil en Acabados por el IPN. Profesora del CCH, Plantel Oriente, en donde imparte la materia de Estadística y Probabilidad. Ha cursado diplomados y seminarios en Matemáticas y Estadística.

Lilian Mendoza Zaragoza
Maestrante en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) de la UNAM, con campo de conocimiento en Matemáticas. Profesora del CCH, Plantel Sur, en donde imparte las materias de Estadística y Probabilidad y Matemáticas.

Anahí Guadalupe Chávez Aparicio
Maestrante en MADEMS, de la UNAM, con campo de conocimiento en Matemáticas. Licenciada en Informática por la Facultad de Contaduría y Administración de la UNAM. Imparte las materias de Informática y Matemáticas. Actualmente, elabora el proyecto de tesis sobre la enseñanza y aprendizaje de los logaritmos.

Miguel Napoleón Medina Delgado
Ingeniero Civil por la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa y estudiante del programa de doctorado en Ciencias por el CINVESTAV, IPN. Profesor de asignatura "A" interino adscrito al CCH, plantel Vallejo, en donde imparte la materia de Matemáticas.

Gabriel Esteban Olay Blanco
Licenciado en Actuaría por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por el CINVESTAV, IPN. Profesor de asignatura en las materias de Matemáticas aplicadas y Probabilidad y Estadística en el CBTIS 204 de Tlalpujahua, Michoacán.

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez.
Licenciado en Matemáticas por la Facultad de Ciencias, UNAM y maestro y doctor en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa, por el CINVESTAV, IPN. Ha hecho estancias de investigación en Francia, España y Estados Unidos. Miembro del SNI, nivel I. Actualmente trabaja como profesor en el Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, IPN.

María S. García González
Maestra en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Estudiante del último semestre del doctorado en Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN. Actualmente realiza investigación sobre el afecto. Ha publicado en revistas internacionales. Miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Ha sido revisora de artículos en congresos y revistas de su área.

Miguel Ángel Huerta Vázquez
Maestro en Educación Matemática por el CINVESTAV, IPN. Profesor de asignatura en el CCH, Plantel Azcapotzalco, en donde imparte la materia de Matemáticas.

Gustavo Adolfo Ibarra Mercado
Doctor en Pedagogía por la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM. Profesor de carrera titular "C" adscrito al CCH, Plantel Oriente, en donde imparte el Taller de Lectura, Redacción e Iniciación a la Investigación Documental en el turno vespertino. Coautor de paquetes didácticos y autor de guías didácticas para profesores del TLRIID. Ha impartido alrededor de 40 cursos dirigidos a profesores.

PRESENTACIÓN

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Una de las formas más auténticas de estar en el aula es cultivar la reflexión, el debate colegiado sobre las formas de enseñanza que se hacen presentes en ésta y el impacto que logran en los aprendizajes del alumnado. Si bien el trabajo en el salón de clase se compone de múltiples aspectos, el conocimiento de la didáctica de cada una de las materias es, sin duda, un punto de partida imprescindible para pensar y construir estrategias para el logro de los aprendizajes.

Nadie duda, después de múltiples experiencias, estudios, análisis, pruebas de evaluación de distintos rangos, nacionales e internacionales, que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una de las actividades curriculares más complejas por una variedad de circunstancias que van más allá, incluso, de la materia en sí. A últimas fechas, la insistencia en la didáctica de la matemática ha generado un cúmulo de propuestas, aproximaciones, estudios y reflexiones que tienen como propósito que el profesorado cuente con más herramientas que contribuyan a que el alumnado tenga un papel cada vez más activo y reflexivo de lo que aprende; que empiece a interesarse en una zona del conocimiento que tiene sus complejidades, pero que representa una parte esencial de nuestra cultura.

Es necesario disponer de educadores profesionalmente formados, con rigor en conocimientos específicos. Entre éstos, el conocimiento de la didáctica de la matemática. El profesorado del bachillerato de la UNAM ha trabajado con regularidad y de manera intensa en una puesta en común para poder advertir, reconocer, algunos de los principales problemas de la enseñanza de la matemática en este nivel. Propuestas como las del SUMEM (Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en México) ponen sobre la mesa una visión de la didáctica dentro del bachillerato universitario que auxilia en la definición de las intenciones de formación del profesorado. Asimismo, además del seminario mencionado, hay otras instituciones como el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, con la cual el profesorado del Colegio de Ciencias y Humanidades ha generado multiples experiencias de intercambio y colaboración. Formar y actualizar al docente en la didáctica de su especialidad, garantiza al alumnado una relación con el conocimiento más activa, que les permita aprender a aprender.

Para la mejora de la enseñanza de la matemática, un elemento relevante es la investigación en el ámbito de la educación matemática. Diversos trabajos que se presentan en este volumen se enmarcan en esta esfera. Asimismo, se proponen otras perspectivas para mirar y enriquecer con nuevas herramientas la práctica docente. El profesorado del Área de Matemáticas sabe bien que lo que enseña está presente en múltiples situaciones cotidianas y debe contribuir a que el alumnado, en un aprendizaje colaborativo, sea capaz de potenciar distintas interacciones dentro del salón de clase para que éste se convierta en un espacio de curiosidad, en un lugar de deseo donde los problemas, los proyectos, los datos, la información y la argumentación les provean de autonomía, de habilidades cognitivas y sociales, de intercambio de ideas, en síntesis, de distintas formas de aprendizaje.

El contenido de esta revista es una invitación a debatir sobre los conocimientos, habilidades, actitudes y valores necesarios para mejorar los aprendizajes de matemáticas en el bachillerato.

Dr. Jesús Salinas Herrera
Director General del Colegio de Ciencias y Humanidades

El ESTUDIO de CLASES una alternativa para la mejora de la práctica docente en MATEMÁTICAS.

Recibido: 19/02/2016
Aprobado: 20/03/2016

Jesús Salinas Herrera
Julio César Valdez Monroy

Resumen:
En este trabajo se presenta la metodología de Estudio de Clases como una opción que ha mostrado su efectividad, en diferentes países, en la mejora de la práctica docente de matemáticas. Se exponen las cuatro fases que conforman la metodología, las dificultades que existen para poder llevar a cabo un estudio de esta naturaleza, y las áreas del aprendizaje de los profesores que se desarrollan a través de ella. Asimismo, se propone implementar un proyecto de investigación en el que se aplique esta metodología en el contexto de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

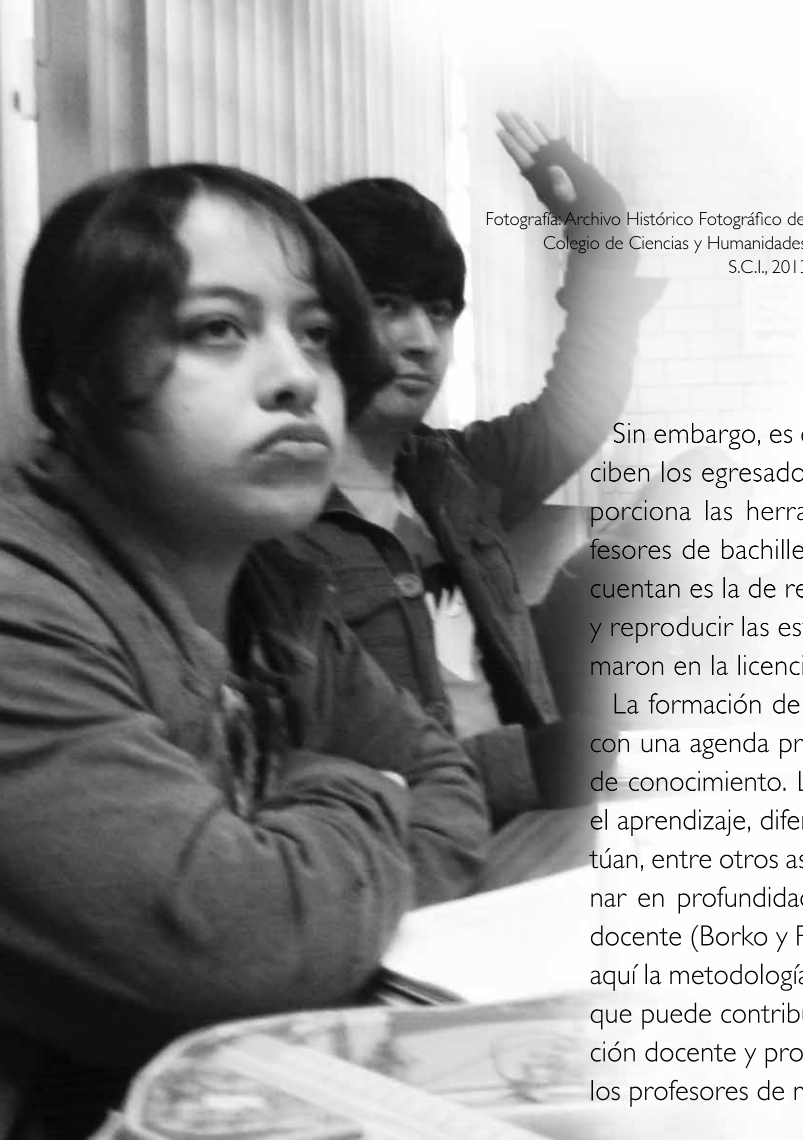
Palabras clave: bachillerato, práctica docente, Estudio de Clases, formación del profesor.

Abstract:
In this report, the Lesson Study methodology is presented as an option that has shown to be effective in improving the practice of teaching math. The four phases that form the methodology are presented, the difficulties to carry out a study of this nature, as well as the learning areas of teachers that develop through it. In addition, it is proposed to implement a research project in which this methodology is applied in the context of the National School College of Sciences and Humanities.

Keywords: *high school, teacher practice, Lesson Study, teacher learning.*

Introducción

En México, en general, no ha existido una institución que forme y certifique a los profesores del nivel medio superior. Usualmente el ingreso del profesorado en el bachillerato se basa en que haya terminado sus estudios universitarios en alguna disciplina o campos afines y que además cumpla con criterios de ingreso que cada sistema de bachillerato establece. En el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM se requiere que los aspirantes acrediten un examen de conocimientos disciplinarios.



Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

Sin embargo, es claro que la formación disciplinaria que reciben los egresados de una carrera universitaria no les proporciona las herramientas para desempeñarse como profesores de bachillerato. De esta manera, la opción con que cuentan es la de retomar sus experiencias como estudiantes y reproducir las estrategias de enseñanza con las que se formaron en la licenciatura.

La formación de profesores representa un área académica con una agenda propia en la que confluyen diversos ámbitos de conocimiento. Las nuevas perspectivas de la enseñanza y el aprendizaje, diferentes a las de la enseñanza habitual, acentúan, entre otros aspectos, que los profesores deben reflexionar en profundidad y críticamente sobre su propia práctica docente (Borko y Putnam, 1996). En este sentido, se presenta aquí la metodología de *Estudio de Clases* como una alternativa que puede contribuir en el proceso de formación y actualización docente y propiciar la mejora de la práctica en el aula de los profesores de matemáticas.

El Estudio de Clases

El Estudio de Clases (EC) es una metodología de trabajo colaborativo que tiene como fin la mejora de la práctica docente. Fue desarrollada en Japón, tuvo su auge a nivel internacional a finales de los años noventa, y ha sido difundida principalmente en Estados Unidos. No obstante, fuera de Japón, sigue siendo una metodología relativamente nueva (Murata, 2011). Pese a esto, ha mostrado su efectividad en diferentes escenarios (Cheung y Wong, 2014), lo que ha llamado la atención de la comunidad en investigación educativa. Esto se refleja en la existencia de una revista especializada sobre el tema (*International Journal for Learning and Lesson Study*), una asociación internacional que lleva a cabo reuniones anuales (*World Assosiation of Lesson Studies*), además de diversas publicaciones (*Hart, Alston y Murata, 2011; Isoda, Arcavi y Mena, 2008;* entre otros). De forma esquemática, el EC consiste de las siguientes etapas (Lewis, Perry y Murata, 2006):

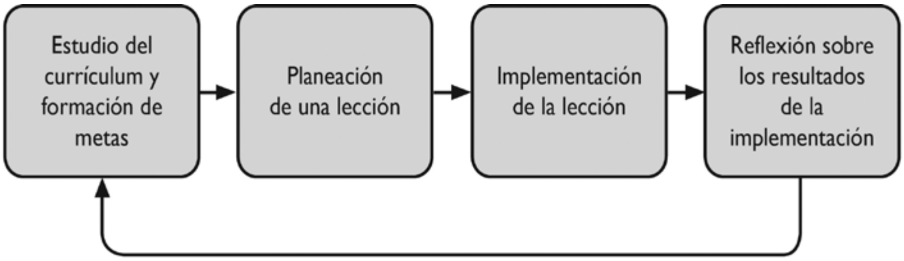


Figura 1. Ciclo del EC (Modificado de Lewis et al., 2006).

A primera vista, la metodología no parece complicada: los profesores, apoyados en el currículum, establecen metas de aprendizaje de acuerdo con las necesidades de los estudiantes; planean una lección dirigida al logro de esas metas; un profesor pone en práctica la lección en presencia de los demás profesores, quienes se limitan a observar y tomar notas; posterior a la implementación, se comentan y discuten las observaciones que se hicieron; y, finalmente, si es necesario, el proceso se repite, pero considerando los resultados de la discusión. Sin embargo, llevar a cabo un EC no es una tarea sencilla.

Dificultades comunes para la conducción de un EC

Son varias las dificultades que existen para poder llevar a cabo de forma efectiva un EC en matemáticas (Yoshida, 2012): un entendimiento inadecuado y/o falta de entendimiento del EC; conocimiento del contenido general y pedagógico, insuficiente por parte de los profesores; falta de apoyo o recursos para llevar a cabo un EC de alta calidad; aproximación no sistemática para realizar un EC efectivo; y una visión de corto plazo para conducir un EC.

No obstante, para cada una de estas dificultades se sugieren varias acciones: visitar sitios en los que se efectúen EC exitosos, de modo que se pueda profundizar sobre esta metodología; mejorar los cursos de matemáticas para los profesores en formación y en servicio, enfocándose tanto en el contenido como en su didáctica; proporcionar a los profesores los mejores materiales curriculares disponibles que estén fundamentados en un fuerte conocimiento del contenido y la didáctica, e involucrar a practicantes experimentados y a expertos en EC para apoyar a los profesores; compartir las experiencias y el conocimiento ganado en el EC dentro, y a través, de las escuelas; y proporcionar el tiempo adecuado para desarrollar comunidades de aprendizaje y animar la mejora sostenida en el largo plazo (Yoshida, 2012).

Por su parte, Sjostrom y Olson (2011) sugieren trabajar con los profesores, previo a la puesta en marcha de un EC, con el fin de minimizar las dificultades mencionadas y adecuar el camino para la implementación. Estos autores proponen: fortalecer el conocimiento del contenido matemático mediante seminarios sobre contenido y resolución de problemas; propiciar que los profesores reflexionen sobre sus prácticas de instrucción; y desarrollar una comunidad colaborativa de profesores.

Sin embargo, a pesar de las sugerencias expuestas, la parte realmente compleja para llevar a cabo un EC tiene que ver con aspectos culturales (Doig, Groves y Fujii, 2011). No todos los profesores están listos para ser observados durante su enseñanza y, aún más, para recibir comentarios al respecto. Así, para que un estudio de este tipo sea realmente efectivo los profesores deben reconocer que el trabajo en colaboración con otros profesores puede propiciar la mejora de su práctica. Si se logran superar las dificultades que surgen al llevar a cabo un EC, éste puede resultar en una experiencia gratificante para los profesores (Doig et al., 2011).

El aprendizaje del profesor

El EC se caracteriza por ser una metodología que se experimenta de forma vívida. Esto crea una oportunidad única de aprendizaje para los profesores (Murata, 2011). Al respecto, Murata, Lewis y Perry (2004) sugieren tres áreas específicas del aprendizaje de los profesores que se desarrollan e interactúan a través del EC: su conocimiento; su compromiso y comunidad; y sus recursos de aprendizaje.


Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

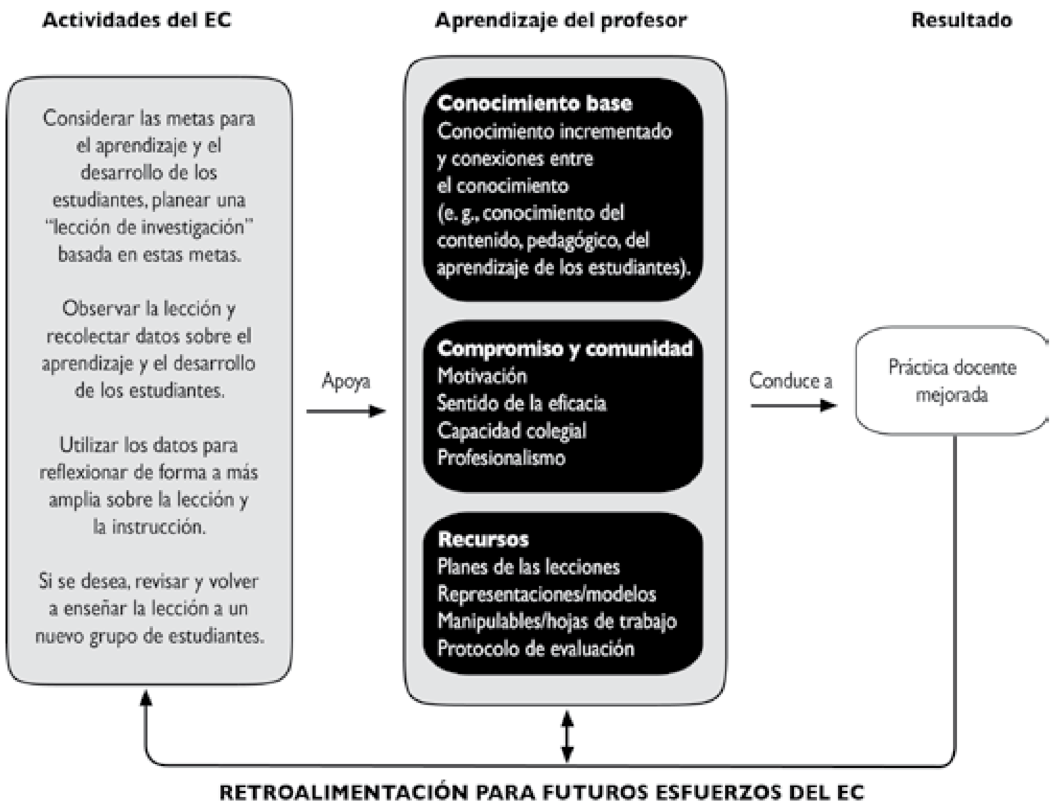


Figura 2. Actividades del EC, aprendizaje del profesor y resultados (Murata et al., 2004).

Diferentes tipos de conocimientos intervienen y se desarrollan en un EC (Figura 2). Shulman (1986) distingue tres categorías de conocimientos para la práctica de la enseñanza: conocimiento del contenido; conocimiento del contenido pedagógico; y conocimiento curricular. Ball, Thames y Phelps (2008), al analizar la naturaleza del contenido matemático para la enseñanza, hacen un refinamiento de esta categorización. Dentro del conocimiento del contenido definen dos subdominios: *conocimiento del contenido común* (CCK), el cual es el conocimiento y habilidad matemática empleado en otros escenarios aparte de la enseñanza; y *conocimiento del contenido especializado* (SCK), que implica un tipo de desembalaje de las matemáticas que no es necesario en otros escenarios distintos de la enseñanza. Sobre el conocimiento del contenido pedagógico identifican dos subdominios: *conocimiento del contenido y los estudiantes* (KCS), que implica conocer acerca del pensamiento matemático de los estudiantes y las matemáticas; y conocimiento del *contenido y la enseñanza* (KCT), el cual requiere la interacción entre un entendimiento matemático específico y un entendimiento de cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje del estudiante. En el EC estos conocimientos interactúan entre sí en un todo coherente y relacionado para apoyar el aprendizaje de los estudiantes (Murata, 2011).

Por otra parte, el EC requiere la formación de comunidades de aprendizaje en las que los profesores trabajen de manera colaborativa; compartiendo metas, discutiendo ideas sobre la planeación de las lecciones y reflexionando sobre los resultados de su implementación. De esta manera, crean un compromiso profesional. Sobre el desarrollo y mejora de las lecciones, Doig et al. (2011) señalan los puntos a tener en cuenta en el análisis y consideración de las tareas matemáticas que se emplean: un entendimiento del contenido matemático; su alcance y secuencia; el entendimiento matemático de los estudiantes y, por tanto, sus posibles respuestas a la tarea; sus concepciones inadecuadas comunes; y el conocimiento del rango de tareas y las posibilidades que ofrecen para atender las metas del profesor. Estos puntos requieren del desarrollo de los distintos tipos de conocimientos que intervienen en un EC. Por tanto, el diseño y selección de las tareas se vuelven una parte importante en el EC.

El contexto local del bachillerato y el EC

Una de las características que distingue la práctica docente en el CCH es la libertad de cátedra. En términos prácticos, los profesores deciden sobre las estrategias didácticas que implementan durante la enseñanza (por ende, en el rumbo que ésta toma), además de la forma de evaluar el aprendizaje de los estudiantes. No obstante, esta autonomía suele ser malinterpretada y traducirse en aislamiento. Así, resulta difícil encontrar un grupo de profesores que compartan sus experiencias acerca de la enseñanza que realizan. Por lo regular, cada profesor tiende a recluirse en su propia práctica, lo que limita su aprendizaje sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Yoshida, 2012). De esta manera, para emprender un EC, lo principal es que los profesores reconozcan que hay una necesidad por mejorar su práctica, la cual puede nutrirse de las experiencias y conocimientos de otros profesores. Una vez cubierto esto, se establece un compromiso que hará asequible el desarrollo del estudio.

Por otro lado, existen esfuerzos dentro de las mismas instituciones educativas destinados a mejorar las prácticas de sus profesores. Se fomenta su participación en cursos, seminarios o talleres con el propósito de desarrollar y mejorar su conocimiento del contenido matemático, de su didáctica, o de ambos. No obstante, los objetivos que se plantean son a corto plazo y regularmente no tienen una aplicación inmediata en el aula, por lo que es difícil hacer un seguimiento del efecto que tienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por su parte, el EC se incorpora en las actividades diarias del aula, las cuales son monitoreadas por la misma comunidad de profesores con la finalidad de mejorarlas. De esta manera, se persigue un objetivo a largo plazo que consiste en hacer que los profesores se conviertan en aprendices de por vida (Yoshida, 2012), que aprendan a aprender.

A modo de conclusión

Diversos investigadores han señalado que es poco el impacto que los resultados de las investigaciones en educación tienen sobre las prácticas de enseñanza que se llevan a cabo en el sistema educativo. Al respecto, McIntyre (2005) llama la atención en el siguiente aspecto: indica que la brecha que existe entre la investigación y la práctica docente se debe a que el tipo de conocimiento que la primera suele ofrecer es distinto del conocimiento que los profesores necesitan en el salón de clase. Por ello, sugiere que para disminuir esta brecha las investigaciones que se lleven a cabo con el objetivo de ayudar en la práctica de los profesores deben tener la siguiente característica: generar nuevos conocimientos, que correspondan a las situaciones de la enseñanza y el aprendizaje que se presentan en el salón de clase. Estos conocimientos nuevos deben servir de base para indicar, de forma clara a los profesores, cómo pueden mejorar su práctica. Tales sugerencias para la mejora deben tener suficiente sentido para los profesores, de manera que las tomen seriamente y, de esta manera, participen en el diálogo acerca de ellas.

Murata (2011) ha subrayado que entre las características del EC se tienen que permitir experimentar de forma vívida y, de esta manera, tener una imagen fidedigna de lo que ocurre en el salón de clase. Asimismo, indica que al compartir, los profesores, su conocimiento profesional permite mejorarlo, y en consecuencia coloca los intereses de ellos en el centro de su proceso de aprendizaje. Por lo tanto, es claro que el EC proporciona una metodología idónea para vincular la investigación con la práctica (Hall, 2013).

No obstante lo anterior, es muy probable que esta metodología sea desconocida tanto por los profesores de bachillerato como por quienes tienen la tarea de propiciar la formación continua de estos. Aunque también es cierto que, debido a lo reciente de esta metodología, poco se ha hecho en la comunidad de investigación al respecto. Este trabajo es un acercamiento al EC que busca posicionarlo como una alternativa que, como sucede en otros países, pueda propiciar el desarrollo y la mejora de la práctica docente en matemáticas. Para ello, con base en lo expuesto, un siguiente paso es poner en marcha un proyecto de investigación de este tipo para observar cómo incide en la práctica de los profesores y cómo, al final, esto se pudiera reflejar en un mejor aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it Special? En *Journal of Teacher Education*, Núm. 59.

Borko, H. y Putnam, R. (1996). Learning to teach. En D. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology.* Nueva York: Macmillan.

Cheung, W., y Wong, W. (2014). Does Lesson Study work? A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. En *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Núm. 3.

Doig, B., Groves, S., y Fujii, T. (2011). The Critical Role of Task Development in Lesson Study. En L.C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.) *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Hall, D. (2013). Using lesson study as an approach to developing teachers as researchers. En *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Núm. 3.

Hart, L., Alston, A., y Murata, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Isoda, M., Arcavi, A., y Mena, A. (Eds). (2008). *El estudio de clases japonés en matemáticas*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Lewis, C., Perry, R., y Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. En *Educational Researcher*, Núm. 35.

McIntyre, D. (2005). Bridging the gap between research and practice. En *Cambridge Journal of Education*, Núm. 35.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of Lesson Study. En L.C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Murata, A., Lewis, C., y Perry, R. (2004). Teacher learning and lesson study: Developing efficacy through experiencing student learning. En D. McDougall. (Ed.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of North American chapter of the international group of the Psychology of Mathematics Education*. Columbus: ERIC.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. En *Educational Researcher*, Núm. 15.

Sjostrom, M., y Olson, M. (2011). Preparing for Lesson Study: Tools and Success. En L.C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States. Current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. En *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Núm. 1.

LAS MATEMÁTICAS también se LEEN.

Un camino hacia la fascinación por la ciencia

Recibido: 9/02/2016
Aprobado: 29/03/2016

Luis Arturo Méndez Reyes

No es posible ser matemático sin llevar un poeta en el alma.

Sofía Kovalevskaya

La matemática, al igual que la música, puede prescindir del universo.

Jorge Luis Borges

Resumen:
Con este artículo pretendo incitar a los profesores a que utilicen la estrategia de la lectura de textos literarios para detonar en sus alumnos un aprendizaje volitivo: la pasión por las matemáticas, lo cual a su vez puede despertar el interés por el desarrollo de otros conocimientos, como los procedimientos lógico-matemáticos. Así, los estudiantes tendrán más elementos para adquirir un aprendizaje integral y significativo. La idea es mostrar que esta ciencia es más que números, fórmulas y procedimientos engorrosos, que se puede y se debe aprender matemáticas a través de historias fascinantes que relatan su utilidad para la vida social y personal.

Palabras Clave: textos literarios, pasión, estrategia, Matemática, aprendizaje, multidisciplinario

Abstract:
With this article I intend to encourage teachers to use the strategy of reading literary texts to detonate in their students a volitional learning: the passion for mathematics, which in turn can arouse interest in the development of other knowledge such as logical-mathematical procedures. Thus, students will have more elements to acquire a comprehensive and meaningful learning. The idea is to show that science is more than numbers, formulas and cumbersome procedures, which can and should learn math through fascinating stories to tell their usefulness for social and personal life.

Keywords: *literary text, passion, new, strategy, Mathematics, learning, multy-disciplinary*

Objetivo

Este artículo es para abrir el camino hacia el amor por las matemáticas. Parafraseando al eminente médico español Santiago Ramón y Cajal, dirigimos el esfuerzo pedagógico más a la voluntad que a la inteligencia. Quizá la falta de sentido sea lo que haya minado la pasión por esta ciencia. La literatura puede ayudar a desembarazar las emociones necesarias para agitar la inteligencia lógico-formal. Si los profesores proporcionan herramientas literarias interesantes a sus alumnos, la supuesta antipatía por las Matemáticas, se puede esfumar y empujar el esfuerzo estudiantil hacia la solución de problemas complejos de la disciplina. En suma, pretendemos impulsar el círculo virtuoso del aprendizaje (emoción-razón). El epígrafe de este escrito, "No es posible ser matemático sin llevar un poeta en el alma", es un corolario de nuestra proposición.

Estrategia didáctica

En las dos últimas décadas se ha producido un buen número de textos literarios realmente apasionantes. La bibliografía del artículo da cuenta de 35 títulos disponibles en la biblioteca Guillermo Haro del Plantel Oriente para que los profesores elijan con cuáles emprender el camino hacia el embeleso por las matemáticas. Aquí sólo daremos una probadita: sólo esbozaremos seis obras literarias que pueden motivar a los profesores a emplear esta estrategia en su salón de clases y así suscitar una serie de aprendizajes integrales.

El texto denominado el *Señor del Cero* es un claro ejemplo de la variedad de conocimientos multidisciplinarios que genera cada obra literaria. En una matriz de análisis el profesor puede verter, en discusión con sus alumnos, la variedad de enseñanzas del texto; el conocimiento integral de los aspectos puede motivar, (sobre todo a aquéllos alumnos más renuentes) a apasionarse por esta disciplina y así aumentar el tiempo de dedicación a su cultivo.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Matriz de Análisis del *Señor del Cero*

Aprendizajes Literarios (Talleres de Lectura y Redacción)	**Aprendizajes Históricos**	**Aprendizajes Matemáticos**	**Aprendizajes Geográficos**	**Aprendizajes Sociales**
Investigar si el texto se inscribe dentro del realismo mágico y hacer una síntesis de la obra	¿Por qué un Califato árabe en Córdoba, España, en el Siglo X d.C.?	Resolver los problemas aritméticos que el *Señor del Cero* hacía de memoria	Describir el mapa del Califato de Córdoba	Importancia económica, social y política de la matemática en el Califato

Al terminar de discutir la matriz de análisis y los ejercicios aritméticos el profesor podrá realizar un breve cuestionario con sus alumnos para determinar si la estrategia literaria fue o no de su agrado. Las seis obras sugeridas son:

El teorema del loro

En su excelsa novela *El teorema del loro*, el cineasta, novelista, autor teatral, matemático y profesor de ciencias en la Universidad de París, Denis Guedj, aporta un ejemplo revelador de que "Las matemáticas también se leen", porque a través de la lectura de su intrigante relato, hasta los más legos, aprendemos algo de esta ciencia.

En la contraportada del libro se recapitula la trama: "Repasaremos, llevados por sus intuiciones y deducciones, la vida y la historia de las aportaciones teóricas de matemáticos célebres, a través de las cuales podremos hallar las claves del asesinato. ¿O ha sido un accidente?". El fin fatal del científico llamado Elgar está en tela de juicio. M. Ruche, un intelectual parisino de 84 años y su peculiar familia, dudan de los móviles de la muerte de su amigo Elgar, su benefactor libresco. Le tenían agradecimiento especial por el estupendo regalo que les dio: cientos de libros de matemáticas, considerados los mejores de todos los tiempos, reunidos en una linda biblioteca, llamada "Biblioteca de la Selva". En la escena, interviene un loro parlanchín, rescatado del cautiverio por el pequeño Max (tercer hijo de la familia) y bautizado con el mote de "Sinfuturo". Este animal tenía una extraordinaria virtud: recitar las demostraciones científicas confiadas por su difunto amo Elgar. La curiosa cualidad del loro le permite ser el centro de la novela y merecer otro mote ganado a pulso: "el loro conferencista". En suma, la novela revela que "detrás de un gran matemático hay un gran poeta", porque a través del lenguaje literario, incita a los lectores a meditar las encrucijadas matemáticas. En la portada trasera del libro M.F. Leclére engrandece la obra: "Denis Guedj, consigue hacer accesibles las matemáticas, al igual que Jostein Gaarder hizo en el *Mundo de Sofía* con la filosofía, y triunfa con *El teorema del loro*, un hermoso libro a mayor gloria de una de las mayores aventuras del espíritu humano, escrito por un matemático atípico".

La medición del mundo

En el texto *La medición del mundo* de Daniel Kehlman se describen, con sapiencia literaria y científica, los sentimientos, pensamientos, aventuras y ambientes físicos, de dos grandes científicos, Friedrich Gauss (el tal vez Matemático más excelso de Alemania) y Alexander Von Humboldt (el no menos importante biólogo y geógrafo, también germánico), en su hazaña de medir el mundo. En este libro, con una serie de hechos reales y anécdotas se revela cómo las matemáticas han sido vitales para la humanidad: calcular el mundo, en una época que la ciencia luchaba todavía contra el obscurantismo (tres primeras décadas del siglo XIX). En su llegada a Veracruz, antes de desembarcar en el puerto, Humboldt pidió a la tripulación ser atado cinco metros arriba de la base de la proa del barco, para medir la altura de las olas. Después hizo una serie de estudios para idear un atlas exacto de la Nueva España. En su visita al "Volcán Jorullo", desacreditó la

doctrina neptunista de la supuesta frialdad del interior de la tierra, al descender con las ropas achicharradas. A pesar de su inminente muerte al hundirse en la nieve durante su estancia en el "Volcán Chimborazo", Humboldt logró medir su altura (18, 690 pies sobre el nivel del mar). En la "Cueva de los muertos" midió la temperatura, la presión del aire, la humedad y hasta la cantidad de piojos de la rizada cabellera de los protagonistas. Después de viajar por medio mundo, Humboldt midió el color del cielo, la temperatura de los relámpagos y el peso de la escarcha nocturna; había probado excrementos de ave y estudiado los temblores de la tierra. Por su parte, las aportaciones de Gauss son los cálculos exactos de cuándo y dónde aparecería un nuevo planeta, computar las órbitas y la gravitación de los cuerpos (teoría del movimiento de los cuerpos celestes) y, en su viaje a Bremen, calcular la masa de Júpiter. Un intenso dolor de muelas no impidió a Gauss hallar solución a uno de los problemas más viejos del mundo: superar la creación del pentadecágono: "Construir cuadrados o duplicar los ángulos de un polígono era un juego de niños. Y combinando un triángulo y un pentágono, se obtenía un pentadecágono. No se había llegado más lejos. Y ahora: diecisiete. Y el intuía un método con el que se podría continuar"
(Kehlmann, 2007: 59).

Andrés y el dragón matemático

En este texto, el autor cuenta la historia de cómo Andrés, al enclavarse en un bosque prohibido por sus padres, encuentra a un dragón-genio llamado "Berto", que se erige como su eminente profesor de Teoría de Conjuntos (unitario, universal, vacío, subconjuntos) y Teoría de los números (naturales, negativos, enteros, racionales, decimales), entre otros conocimientos matemáticos. Absorto por la chispa del dragón, Andrés invita a cinco compañeros de clase a conocer a su mágico profesor, con la condición de mantenerlo en absoluto secreto, lo cual aceptan. Éste, los conmina a penetrar en el Castillo Geométrico de las Matemáticas, donde junto con el "Gnomo del Tarot" y el "Hada Pisigil", consumarán el asalto al susodicho castillo. La penetración al castillo es en realidad el camino científico del conocimiento matemático: 1) analizar el problema o pregunta; 2) examinar qué herramientas matemáticas se poseen; y 3) resolver el problema y cotejar la solución para verificar la coherencia y la confiabilidad.

El Diablo de los números

En esta novela-cuento, el autor vuelca las doce apariciones oníricas del *Diablo de las matemáticas*, en las cuales imparte clases nocturnas, muy didácticas y sencillas, a un joven soñador de nombre Robert. Este texto, es un relato ilustrado (destinado principalmente, a jóvenes lectores), que poco a poco, sumerge en la pasión por los guarismos. Tal como se lee en la contraportada del libro:

> "… los números cobran vida por sí mismos: nunca antes, las Matemáticas habían sido algo tan fascinante. En seguida, el diablo le hará abandonar los tópicos escolares y hará que acceda a niveles superiores. Y al joven lector también. Los números, a medida que se avanza, se van volviendo más absorbentes. Es como magia, y Robert quiere saber más y hasta qué, al fin, el diablo le hace comprender que algunos problemas y paradojas pertenecen a las altas esferas de la ciencia."

En uno de los sueños de Robert, el diablo, sentado en un hongo gigantesco, hace volar (como moscos en el espacio) a los números enteros, para enseñar que el cero no aparece entre ellos, porque es el último número inventado por los seres humanos, pero es el más pulido porque simplificó la escritura numérica. En otra aparición onírica, el diablo, sentado en un bote sobre la arena blanca del mar, alecciona a Robert en la raíz cuadrada y la solución de problemas con decimales. También, le enseña los números triangulares y cuadrados, pero se niega a aprender los pentagonales y hexagonales, porque estaba muy cansado, pero se ahuyenta nadando en una piscina infinita, como la numeración. Así, continúan los doce sueños de Robert, son tan reveladores que su maestro quedó sorprendido con la facilidad y rapidez con los que resolvía los problemas matemáticos.

El señor del Cero

El Señor del Cero de María Isabel Molina, novela española atraída por la llamada corriente literaria del *realismo mágico*, es también un relato histórico de hechos reales acaecidos durante el esplendor cultural del Califato de Córdoba (España) en el siglo *X* d.C. El "Señor del Cero" (Sidi Sifir) es el sobrenombre que le otorgaron a José, un joven mozárabe (cristiano que vivía en tierras dominadas por los árabes sin desistir de su religión), por su extraordinaria habilidad en la ciencia del cálculo en la prestigiada escuela del Califa. Esa sapiencia le trajo amigos y enemigos: por un lado, se convirtió en candidato al *Premio del Califato*, que le permitiría tener privilegios, como ser funcionario de gobierno; por otro lado, la envidia de sus compañeros, que exigieron su expulsión del reino. Dos acertijos que José respondía de manera rápida, acertada y de memoria, sin el uso de las tablillas, son los siguientes:

I

Un ladrón, un cesto de naranjas, del mercado robó, y por entre las huertas escapo; al saltar una valla, la mitad más media perdió; perseguido por un perro, la mitad menos media abandonó; tropezó en una cuerda, la mitad más media desparramó; en su guarida, dos docenas guardó.

Vosotros, los que buscáis la sabiduría, decidnos: ¿Cuántas naranjas robó el ladrón? (Molina,1996:10).

II

Un collar se rompió mientras jugaban dos enamorados, y una hilera de perlas se escapó.
La sexta parte al suelo cayó, La quinta parte en la cama quedó, y un tercio la joven recogió.
La décima parte el enamorado encontró Y con seis perlas el cordón se quedó.
Vosotros, los que buscáis la sabiduría, Decidme: ¿Cuántas perlas tenía el collar de los enamorados? (Molina,1996:12).

En la novela se describe el medio social tan propicio que tuvo José para desarrollar su genialidad: la ciudad tenía:

> …una población de 500 habitantes, mientras las grandes ciudades de Europa no alcanzaba ni la décima parte. La tolerancia de los musulmanes que dejaban practicar tanto su culto a los judíos como a los cristianos, atrajo a todos los sabios del mundo y produjo una gran expansión cultural, amparada por la gran biblioteca de la ciudad y los centros de estudio de todas las ciudades del Califato (Molina, 1996: 8).

Además, era el centro de refugio e irradiación de todo tipo de conocimientos a una Europa todavía semi-bárbara. A Córdoba llegaban sabios de todos los países del mundo y se impartían las mejores clases, se becaba a los estudiantes más pobres y se premiaba a los estudiantes sobresalientes; en su excelente biblioteca (la más importante del mundo), estaban incluidas las obras de la cultura árabe, las traducciones de los antiguos ilustrados griegos y latinos y sus libros de medicina y matemáticas.

El matemático del Rey

El matemático del Rey es una novela encantadora, que además de narrar el costumbrismo español de 1621, aborda las persecuciones y asesinatos cometidas por el "Santo Oficio" a los precursores científicos que combatían el obscurantismo de la época. El matemático de Felipe IV, es personificado por Juan Lezuza, quien además de enseñar álgebra y geometría, enseñaba dibujo y mecánica, sin cuyos conocimientos no se podía enseñar astronomía, considerada en ese entonces como una ciencia peligrosa. Lezuza aseguraba que enseñaba "una geometría del cielo", considerada herética, por contradecir a la biblia. Fue llevado a prisión por sus libros y enseñanzas sobre Copérnico y Galileo, por decir que las cosas, como la misma tierra se movían "La Tierra gira sobre sí misma y alrededor del sol". Con intermediación de uno de sus alumnos, el Rey Felipe IV y por su falso arrepentimiento, a Lezuza lo exoneraron de morir en la pira. Al final del texto se lee:

"Lezuza miró el cielo, guiñó los ojos para acercar su vista al sol, trazó una línea imaginaria desde el horizonte a la posición del sol y empezó a calcular la trayectoria que la Tierra empezaba a recorrer aquel primer día del año. Volvió a mirar al cielo, miró al asno y se preguntó qué extraña relación tendrían Dios y las matemáticas" (Arce, 2000: 214).

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Conclusión

A pesar de ser una disciplina complicada la matemática tiene aliados que la pueden volver fascinante: las novelas, cuentos, relatos y demás textos literarios como los aquí descritos, son una estrategia de aprendizaje que pueden emplear los profesores para despertar el interés por el conocimiento integral de esta ciencia. Las historias y personajes reales o ficticios de los textos literarios, suscitan un aprendizaje multidisciplinario y un apetito por saber más, por ser más creativos en los procesos educativos; las intrincadas e interesantes vidas de excelsos matemáticos muestran su contexto social, cultural y científico, tan necesario para entender los beneficios sociales y personales de las matemáticas.

Por el momento, tengo que suspender mi camino literario hacia la fascinación por las matemáticas. Como docentes hemos de invitar a los jóvenes a que lo sigan caminando. A continuación damos algunas señales.

Bibliografía para recorrer el camino hacia la fascinación por las Matemáticas

Arce, J. (2000). *El matemático del Rey*. España: Planeta.

Bergara, J. (2003). *Laplace. El matemático de los cielos*. España: Nivola.

Campos, M. (2005). *Andrés y el Dragón matemático*. Barcelona: Laertes.

Corbalán, F. (2000) *Galois Revolución y Matemáticas*. España: Nivola.

Coto, A. (2006). *Entrenamiento mental. Cómo el cálculo aumenta el potencial de la mente.* España: EDAF.

Coto, A. (2007). *Fortalece tu mente. Entrena tu cerebro con juegos de lógica e ingenio. Enigmas y cuadros mágicos*. España: EDAF.

Enzensberger, H. (1997). *El diablo de los números. Un libro para todos aquellos que temen a las matemáticas*. España: Siruela.

Fernández, S. (2004). *Lobachevski. Un espíritu indomable*. España: Nivola.

García, L. (2002). *Legendre. La honestidad de un científico*. España: Nivola.

Guedj, D. (1998.). *El teorema del Loro*. España: Anagrama.

Hernández, A. (2002). *Monge, libertad, igualdad, fraternidad y geometría.* España: Nivola.

Infeld, L. (2007). *El elegido de los dioses. La historia de Evariste Galois*. México: Siglo XXI.

Kehlmann, D. (2007). *La medición del mundo*. México: Diana.

Klymchuak, S. (2008). *Acertijos con dinero. Desarrollo del razonamiento*. México: Trillas.

Martínez, G. (2003). *Borges y la Matemática*. Argentina: Eudeba.

Molina, M. (1996). *El señor del cero*. España: Alfaguara juvenil.

Moreno, R. (2004). *Fibonacci. El primer matemático medieval*. España: Nivola.

Moreno, R. (2002). *Omar Jayyam. Poeta y Matemático*. España: Nivola.

Muñoz, N. (2004). *Matemágicas*. México: Norma.

Netz, R. (2007) *El Código de Arquímedes. La verdadera historia del manuscrito que podría haber cambiado el rumbo de la ciencia*. México: Temas de Hoy.

Norman, L. (2000). *El país de las mates para expertos*. España: Nivola.

Norman, L. (2000). *El país de las mates para novatos*. España: Nivola.

Nomdedeu, X. (2004). *Sofía La lucha por saber de una mujer rusa*. España: Nivola

Pardo, V. (2003). *Lagrange. La elegancia matemática*. España: Nivola.

Pickover, C. (2000). *El prodigio de los números. Desafíos, paradojas y curiosidades matemáticas*. España: Manon Troppo.

Pickover, C. (2001) *La maravilla de los números. Un viaje por los secretos de las matemáticas*. España: Manon Troppo.

Ouaknin, M. (2003). *El misterio de las cifras*. España: Manon Troppo.

Sánchez, C. (2001). *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros*. España: Nivola.

Sánchez, C. (2003). *Kolmogórov, El Zar del azar*. España: Nivola.

Sánchez, C. (2005). *Abel El romántico nórdico*. España: Nivola.

Serrano, E. (2007). *Ojalá no hubiera números*. España: Nivola.

Stewart, I. (2005). *Locos por las matemáticas*. Barcelona: Crítica.

Stewart, I. (2006) *Cartas a una joven matemática.* Barcelona: Crítica.

Tahan, M. (2006) *Matemática divertida y curiosa*. Buenos Aires: Pluma y Papel.

Torrecillas, B. (1999). *Fermat. El mago de los números*. España: Nivola.

El ANÁLISIS del ERROR. HACIA una didáctica específica de las MATEMÁTICAS

Recibido: 9/02/2016
Aprobado: 15/03/2016

Arcelia Lara Covarrubias y Daniel Lara Covarrubias

Resumen: El combate al rezago escolar exige una mirada didáctica que no caiga en generalidades sino que se nutra de la naturaleza del conocimiento matemático: la heurística positiva y el análisis de los procesos de individuación pueden delinear esta didáctica de las Matemáticas.

Palabras clave: didáctica específica, algoritmo parásito, heurística positiva, individuación.

Abstract: *Fighting educational lag demands a didactic approach that is not engaged in generalities, but an approach based in the nature of mathematical knowledge: positive heuristic and the analysis of individuation processes may guide such mathematical didactics.*

Key words: *specific didactics, parasite algorithm, positive heuristic, individuation.*

Introducción

Si, con los filósofos que han incluido el razonamiento matemático en su sistema, aceptamos la precognición del razonamiento deductivo, ¿cómo tendríamos que explicarnos el rezago escolar en matemáticas? Podemos, como se ha hecho en los últimos años, relacionarlo con argumentos contextuales: el bajo nivel económico, la inadecuada alimentación, los problemas sociales del país o los conflictos familiares. Estos factores, aun cuando influyen en el aprovechamiento escolar, no logran dar una explicación cabal del problema. Podríamos preguntarnos, por ejemplo, ¿por qué una dieta baja en proteínas carga con la responsabilidad de la reprobación en Matemáticas, pero no puede usarse como causa en otras áreas como las sociales o las humanísticas?

Es claro que, aunque las circunstancias familiares y sociales señalan parte del problema, no lo explican, porque no funcionan con calidad de razón suficiente. Hay que remitirlo, entonces, a una didáctica de la disciplina que no se fundamente en generalidades, sino que explique de manera específica, a partir de la naturaleza del conocimiento generado y de una epistemología que parta de "lo dado", las incidencias del error en los estudiantes.

Nosotros

No aspirar a un análisis teórico de los problemas de aprendizaje equivale a quedarse en una burda empiria pesimista que no encuentra soluciones; pero, por otro lado, tratar de explicarlos desde generalidades teóricas sería, en el mejor de los casos, hacer metafísica de lo imposible. Entre estas dos opciones se abre una tercera vía: la didáctica de las matemáticas basada en el análisis del error.

Universalidad del razonamiento deductivo

"El buen sentido –dice Descartes (1991: 30)– es la cosa mejor repartida en el mundo". Recordemos que a este pensador, además de sus aportes filosóficos, le debemos la geometría cartesiana. Otros filósofos piensan que el sano razonamiento es universal. ¿Pertenecerán las matemáticas a ese campo (buen sentido o razón recta) que todos los mortales potencialmente podemos discernir? Emmanuel Kant, Leibniz y Platón piensan que sí.

Según Kant (2003: 171-181), el pensamiento matemático está formado de juicios sintéticos, esto es, proposiciones cuyo conocimiento es extensivo porque no se deduce analizando el sujeto, sino que el predicado agrega algo nuevo. Pero no sólo eso, sino que, además, es un conocimiento *a priori*, no mediado por la experiencia; de hecho, la pregunta que motiva la *Crítica de la razón pura* es, precisamente, ¿cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*?, dicho en otras palabras, ¿cómo tenemos un conocimiento extensivo que no ha sido puesto en la experiencia?

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Todo parece indicar que también así lo creía Platón, para quien conocer es simplemente recordar. Para probar su teoría de la reminiscencia, Platón presenta el "caso del esclavo" (2008: 302-308), Sócrates pide a Menón que llame a un esclavo que hable griego pero que no tenga conocimientos matemáticos y, tras un interrogatorio, deduce el área de un cuadrado. Este ejemplo, que se ha convertido en canónico, ilustra la preeminencia del razonamiento matemático frente a la experiencia, pues, sin haber estudiado geometría, el esclavo hace un correcto uso deductivo.

Por su parte, Leibniz afirma que las verdades de razón –a diferencia de las verdades de hecho– son innatas, esto es, no se obtienen por inducción. Las proposiciones matemáticas y las geométricas son nociones claras y distintas que no proceden de la experiencia. Para explicar el innatismo de las verdades de razón, Leibniz (1988: 325) sostiene que el espíritu humano no es una tabula rasa sino que es como las vetas de mármol de un bloque, que no se captan a simple vista, pero que tras un cuidadoso examen pueden descubrirse.

El rezago escolar en Matemáticas

Para intentar dar una explicación razonable al problema del rezago escolar en matemáticas habría que partir del lugar en el que se genera el problema: ¿cuál es el papel de la escuela en la enseñanza de las matemáticas? Pese a que el razonamiento deductivo es universal, no basta para constituirse como conocimiento. Leibniz (1988: 325) opina que nuestro conocimiento del mundo es el cincel y el martillo con el que se descubren las vetas del mármol; Kant también reconoce la función de la experiencia, con la que se inicia el conocimiento, pues, "pensamientos sin contenidos son vacíos; intuiciones sin conceptos son ciegas" (2003: 226).

Del razonamiento al saber matemático lo que media es la experiencia, cuya fuente primordial es la escuela. Así, podemos reconocer que el papel del profesor es fundamental en ese proceso. El aprendizaje de los estudiantes no descansa únicamente en el conocimiento matemático del profesor, se requiere una perspectiva sobre la enseñanza. Pero, por otro lado, ¿basta con un amplio menú de consejos didácticos para que los alumnos reporten mejores resultados? Por supuesto que no. Las recomendaciones para dar una clase no son generalizables: lo óptimo en una materia no es, necesariamente, lo mejor en otra. Por esto, la didáctica general ha de dar paso hacia una didáctica específica de la disciplina que tome en cuenta las particularidades de la asignatura. Así, los enfoques pedagógicos han de estar determinados por el carácter disciplinario.

Intentar una explicación sobre el rendimiento deficiente en Matemáticas requiere, en primera instancia, colocarse en el centro mismo de la disciplina: revisar la naturaleza del conocimiento, las exigencias cognitivas y el diseño curricular de su enseñanza, son tareas insoslayables. Cada área genera sus propias rutas de acceso al conocimiento, por mucho que queramos trabajar con un núcleo de competencias compartidas por todos los campos del saber.

El análisis del error como heurística positiva

El Entre el qué de la disciplina y el cómo de la pedagogía se requiere una didáctica específica que cumpla la tarea de, usando la expresión de Mario Bunge (2015: 74), "patrullar esa zona fronteriza". Por otro lado, construir el campo intermedio requiere tomar en cuenta la formación previa de los estudiantes. Cuando los jóvenes llegan al bachillerato ya han estudiado Matemáticas durante nueve años; no puede decirse, por tanto, que no sepan absolutamente nada de la asignatura, tienen muchos conocimientos, aunque algunos de ellos sean imprecisos o generen errores de aplicación.

Por la naturaleza del conocimiento matemático conviene trabajar con una heurística o lógica de la investigación, entre cuyos beneficios se encuentra hacer "un examen no de la investigación, sino del investigador" (Lakatos, 1983: 252). "La heurística positiva es una estrategia para construir una serie de teorías de tal manera que puedan superar los defectos de cualquier etapa concreta" (Losee, 1981: 222). Este enfoque permite remitir el problema del bajo aprovechamiento a explicaciones particulares sobre el modo de razonar de cada estudiante. En otras palabras, los alumnos no se equivocan por ignorancia, sino por el empleo de algoritmos parásitos (razonamientos equivocados). La didáctica de las matemáticas requiere investigar bajo qué lógica realizan los jóvenes determinadas operaciones mentales.

En el caso del esclavo, la figura que traza Sócrates en la arena mide 2 pies por lado; por tanto, su área sería de 4 pies; si duplicamos la medida de los lados, pregunta el filósofo, cuál sería el área de este nuevo cuadrado, y el esclavo contesta que 8 pies (al cuadrado, se sobreentiende). Sócrates, mediante un interrogatorio preciso, hace ver su error al joven y, sin instruirlo, lo guía para que llegue a la respuesta correcta (16 pies cuadrados) (Platón, 2008: 302-308). Un maestro de Matemáticas ha de proceder socráticamente descubriendo qué algoritmo parásito usó el alumno, haciéndole ver su error y replanteando el problema para que llegue a la conclusión esperada.

Las Matemáticas son un campo privilegiado para conocer el pensamiento de los otros. El análisis del error puede indicarnos el algoritmo parásito; por ejemplo:

Caso 1: ¿Cuál es el resultado de 3^3?

a) $3^3=1$	*d)* $3^3=9$
b) $3^3=3$	*e)* $3^3=27$
c) $3^3=6$	*f)* 3^3=cualquier número que no sea 1, 3, 6, 9 ó 27.

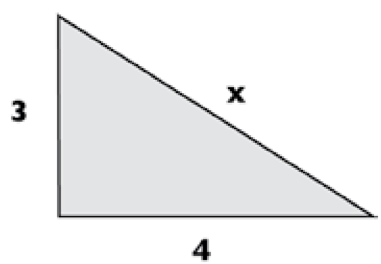
Sólo en el caso f) puede sospecharse que no hay falso razonamiento, sino simple ignorancia. En los casos a), b), c) y d) hay un algoritmo parásito (AP). En el caso e) suponemos, en primer lugar, que el alumno conoce la regla de la potencia; sin embargo, cabe la posibilidad de que haya usado un algoritmo parásito y que en este caso haya acertado por casualidad. Con un poco de audacia, podría suponerse cuál fue el caso con el que el alumno aprendió la potencia.

Caso	Razonamiento	Ejemplo con el que aprendió
a) $3^3=1$	AP: División. AP: Cualquier potencia es igual a 1.	1^1 $n^x=1$
b) $3^3=3$	AP: Identidad con la base o con la potencia.	Identidad con la base: 1^1, 1^2, 1^3… Identidad con la potencia: 2^1, 3^1, 4^1…
c) $3^3=6$	AP: Suma.	2^2
d) $3^3=9$	AP: Multiplicación.	2^2

Del cuadro anterior pueden elaborarse recomendaciones sobre los ejemplos que deben evitarse para enseñar determinados contenidos, como aquéllos que pudieran generar algoritmos parásitos.

En un examen de opción múltiple, el evaluador, partiendo de su experiencia docente, puede adelantarse a los algoritmos parásitos que podría generar un planteamiento específico; véase, por ejemplo, la siguiente pregunta de geometría.

Caso 2: ¿Cuánto mide el lado x del siguiente triángulo rectángulo?



a) 5
b) 7
c) 25
d) Cualquier otro número distinto de 5, 7 ó 25

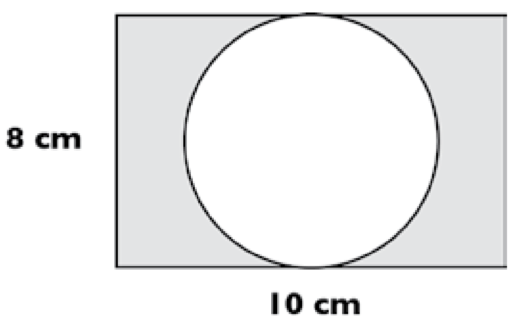
Caso	Razonamiento	Formalización del AP
a) 5 (Respuesta correcta)	Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
b) 7	AP: La hipotenusa es igual a la suma de los catetos.	$c = a + b$
c) 25	AP: La hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	$c = a^2 + b^2$
d) Cualquier otro número	Ninguno en particular.	

Principio de individuación

Cuando tratamos de problemas complejos, los profesores solemos visualizarlos como un razonamiento unitario, cuya verificación se encuentra en el resultado. De tal manera que, si un alumno comete un solo error, no tiene posibilidades de acertar y, por tanto, la respuesta es incorrecta. Podemos sospechar que el fracaso del aprendizaje de las Matemáticas no es tal, sino una apreciación en blanco y negro sobre lo que significa correcto e incorrecto: dejemos esta suposición de lado para no distraernos.

En un sólo problema matemático se encuentran sintetizados diferentes razonamientos susceptibles de análisis (distinción y caracterización); de manera que, errar en uno de los pasos no significa, necesariamente, no entender el problema en su totalidad o razonar erróneamente todo el proceso. La didáctica de las Matemáticas, con un enfoque heurístico positivo, reclama identificar cada momento del planteamiento, la operación mental que se requiere con su nivel cognitivo y la rama a la que pertenece (aritmética, álgebra, geometría, etc.). Véase el siguiente problema con su solución y su análisis en términos de una didáctica de las Matemáticas.

Caso 3: ¿Cuál es el valor del área sin sombrear de la siguiente figura?



Solución por pasos

1) $a = \pi \cdot r^2$
2) $a = \pi \cdot (d/2)^2$
3) $a = \pi \cdot (8\ cm / 2)^2$
4) $a = 3.14 \cdot (4\ cm)^2$
5) $a = 3.14 \cdot 16\ cm^2$
6) $a = 50.24\ cm^2$

Si hemos de evaluar usando el principio de individuación, este problema valdría 6 puntos; esto es, no puede considerarse que la respuesta esté mal por un error en uno sólo de sus pasos, aunque esto cambie el resultado final y, en sentido estricto, podría pensarse que está mal resuelto; salvo, por supuesto, cuando de ese paso depende todo el razonamiento, como en el primero del ejemplo anterior. Para conocer el grado de complejidad de cada uno de los momentos hay que observar cuidadosamente la Taxonomía de Bloom, que nos indica la operación y el nivel cognitivo (conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación) y cruzarlo con el conocimiento disciplinario. El análisis de la solución al problema anterior, en términos de una didáctica de las matemáticas, diría lo siguiente.

Solución por pasos	Operación mental (nivel cognitivo)	Conocimiento disciplinario específico	Rama de la matemática
1) $a = \pi . r^2$	Recordar/ Aplicar (conocimiento/ aplicación)	Área del círculo	Geometría
2) $a = \pi . (d/2)^2$	Comparar (Evaluación)	Relación diámetro-radio	Geometría
3) $a = \pi . (8\ cm / 2)^2$	Aplicar (Aplicación)	Diámetro	Geometría
4) $a = 3.14 . (4\ cm)^2$	Recordar (conocimiento) Operar (Aplicación)	Valor de π División	Geometría Aritmética
5) $a = 3.14 . 16\ cm^2$	Operar (Aplicación)	Potencia	Aritmética
6) $a = 50.24\ cm^2$	Operar (Aplicación)	Multiplicación	Aritmética

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2015

Algunos de estos pasos aceptan una individuación aún más especificativa. Por ejemplo, en el paso 3), el alumno, además de aplicar sus conocimientos sobre el diámetro a la figura que sirve como ejemplo, ha de tener algunos saberes previos, como que todos los diámetros posibles de un mismo círculo miden lo mismo y que esta medida equivale a la mitad del radio; a partir de estos saberes previos, ha de deducir que si el círculo se encuentra dentro de un rectángulo y uno de los lados (el más corto) es idéntico a uno de los diámetros, por tanto, aunque no se le dé la medida de éste, puede deducirse del lado más corto del rectángulo. Algo semejante sucede con el paso 4) cuya resolución implica un conocimiento memorístico (saber el valor de π).

Tomando en cuenta el principio de individuación, el único paso que compromete el resto del razonamiento es el primero, puesto que de éste dependen las decisiones sobre las operaciones mentales subsiguientes; errar en este momento significa, para este ejemplo específico, tener mal toda la respuesta. Los pasos 4), 5) y 6) suponen operaciones aritméticas que los alumnos dominan, pues, esta rama de las Matemáticas es la primera que formalizan –desde su educación primaria– y que tiene un carácter instrumental mayor, en tanto que, casi en todos los planteamientos matemáticos las operaciones básicas constituyen un momento del razonamiento.

Llama poderosamente la atención que muchos de los errores que comenten los estudiantes se deben al mero descuido: pueden conocer perfectamente la fórmula del área, tener memorizado el valor de π, podrían, incluso, de ser el caso, despejar la fórmula para encontrar un valor numérico no dicho; sin embargo, suelen ser erráticos en minucias como olvidarse de la potencia y comenzar a realizar operaciones obviando el cuadrado; este error, en el ejemplo, podría repercutir en un cambio numérico de la pregunta planteada en el paso 5), y de manera simbólica en los seis pasos de la solución.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Aunque parezca extraordinario, es común que los estudiantes se equivoquen en la resolución de operaciones aritméticas básicas que, como se dijo anteriormente, son las que más conocen y han practicado. Cuando el profesor pretende descubrir si un error aritmético esconde un algoritmo parásito o es un mero descuido, ha de recurrir –al contrario de los ejemplos con los que enseña nuevos conocimientos– a casos extraordinarios. Supongamos que varios estudiantes se equivocan en el paso 4) del ejemplo anterior y se trata de un problema que hay que atender de manera general; por tanto, se requiere de la suspicacia del maestro para plantear un caso de la misma rama de las Matemáticas que atiende el mismo conocimiento disciplinario, pero que exige una operación mental y un nivel cognitivo mayor. En el caso de la división que supone el momento 4) del planteamiento anterior, el docente podría, por ejemplo, poner el siguiente caso:

Caso 4: ¿Cuál es el resultado de la operación 5/0?

a) 0
b) 1
c) 5
d) Indeterminado
e) Un número diferente de 0, 1 ó 5

Tomando en cuenta que la respuesta correcta es el inciso d), las posibilidades de algoritmo parásito son:

Caso	Razonamiento	Ejemplo con el que aprendió
a) 0	AP: Analogía con la multiplicación AP: Confusión con la operación con dividendo y divisor invertidos..	(5) (0) =0 0/5
b) 1	AP: Elevar una base al exponente 0.	$5^{o} = 1$
c) 5	AP: Analogía con la división con 1.	5/1
d) Indeterminado	Respuesta correcta	n/0 = Indeterminado
e) Número diferente de 0, 1 ó 5	AP: Ninguno en especial.	

Conclusiones

Muchos profesores pueden argüir que esta didáctica de las matemáticas puede funcionar sólo con grupos poco numerosos (hasta diez alumnos), por el análisis y especificidad que implican. No obstante, los maestros tienen a los mejores aliados: los alumnos mismos.

Heurísticamente se trabaja sobre "lo dado", es decir, sobre lo que el alumno razonó o dejó de razonar. El análisis de los errores o descuidos cometidos en la resolución de un problema ayuda no sólo a corregir el razonamiento, sino a devolver el carácter de evidencia con el que suelen identificarse las matemáticas. Explicar paso a paso un problema que previamente ha sido motivo de evaluación ayuda a los alumnos a percatarse de sus errores; no hay que dejar, sin embargo, que las conclusiones a las que lleguen caigan en derrotismo paralizante. Así como el profesor puede inferir los algoritmos parásitos de los estudiantes; los jóvenes pueden analizar sus errores y dar cuenta de qué razonamiento estuvo errado, a qué área pertenece y qué debe reforzar o corregir.

Analizar el error propio ayuda a los alumnos a reflexionar sobre sus debilidades y fortalezas. Con una práctica continuada el joven puede darse cuenta de qué área de las Matemáticas se le dificulta y qué aspectos se le facilitan. Este campo, el metacognitivo, supone un doble conocimiento: de sí mismo y de la disciplina.

Referencias

Aristóteles. (2002). *Metafísica*. Barcelona: Océano.

Bunge, M. (2015). *Evaluando filosofías. Una protesta, una propuesta y una respuesta a cuestiones filosóficas descuidadas*. Madrid: Gedisa.

Descartes, R. (1991). *Discurso del método. Meditaciones metafísicas*. México: Espasa-Calpe.

Kant, E. (2004). *Crítica de la razón pura*. Buenos Aires: Losada.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza.

Leibniz, W. (1988). *Nuevo tratado sobre el entendimiento humano.* La Habana: Ciencias Sociales.

Loose, J. (1981). *Introducción histórica a la filosofía de la ciencia*. Madrid: Alianza.

Platón (2008). *Menón. Diálogos.* Madrid: Gredos.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

HABILIDADES matemáticas y sentido ESTADÍSTICO

Juan de Dios Hernández Garza.
Adolfo Sánchez López

Recibido: 11/02/2016
Aprobado: 15/03/2016

Resumen:
Dentro de los enfoques innovadores en la enseñanza de la Matemática, se ha planteado que los objetivos prioritarios incluyan aquellos que se refieren al desarrollo de habilidades matemáticas relacionadas con la capacidad de resolver problemas no rutinarios. La idea central en estos planteamientos consiste en darle más importancia a las estrategias de enseñanza y de aprendizaje que permitan mejorar el desempeño intelectual de los estudiantes, en vez de almacenar información que luego reproducen mecánicamente en situaciones análogas.

En este enfoque innovador también se considera la consolidación de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística con el propósito de desarrollar el sentido estadístico y sus componentes como el pensamiento y razonamiento estadístico, así mismo, la comprensión de la presencia de la variabilidad en los datos.

Palabras claves: habilidades matemáticas, problemas no rutinarios, estrategias de enseñanza y aprendizaje, desempeño intelectual, sentido estadístico, pensamiento estadístico, razonamiento estadístico, variabilidad.

Abstract:
Within the innovative approaches in the teaching of mathematics has been raised that the priority objectives include those relating to the development of mathematical skills related to the ability to solve non-routine problems. The central idea in these approaches is to give more importance to the teaching and learning strategies that improve intellectual performance of students, rather than store information that is then mechanically reproduced in similar situations.

The consolidation of the teaching and learning of statistics with the purpose of developing the statistical sense and its components such as thinking and statistical reasoning, likewise, is also considered in this innovative approach to the understanding of the presence of the variability in the data.

Key words: *mathematical skills, non-routine problems, teaching and learning strategies, intellectual performance, statistical sense, statistical thinking, statistical reasoning, variability.*

Consideraciones iniciales

En la enseñanza de las Ciencias en el nivel bachillerato y, en particular, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, no basta con dominar los contenidos específicos que se enseñan, sino que también es necesario tener conocimientos sobre aspectos didácticos de los temas y de los errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura con el objetivo de desarrollar el razonamiento matemático y las habilidades matemáticas.

En este sentido, Salinas (2014) en su ponencia "¿Qué Matemáticas en el bachillerato?", se pronuncia por una formación matemática que desarrolle habilidades y actitudes.

El razonamiento matemático ha sido explorado por diversos autores como el psicólogo soviético V. A. Krutetskii (1976), quien se centra en el análisis de los procesos de solución de problemas matemáticos con el propósito de caracterizar las habilidades matemáticas presentes en los alumnos.

De acuerdo con Krutetskii y considerando que prácticamente cualquiera de los contenidos matemáticos puede ser utilizado para fomentar en los alumnos el desarrollo de habilidades matemáticas, un buen inicio consiste en cambiar el aspecto didáctico para la ejecución de un ejercicio, por ejemplo, es muy común que se le indique al alumno resolver una ecuación como $4(x+1)+2(x+1)=12$, de manera que si éste desarrolla un procedimiento típico y obtiene $x=1$, se piensa que es hábil. Aquí lo que se muestra es que el estudiante tiene destreza para aplicar una serie de procedimientos que le llevan a encontrar el valor de la incógnita y la correspondiente comprobación.

Como menciona Itelson (1985): cambiando el enfoque de la actividad se puede mostrar al alumno el mismo material bajo diferentes aspectos y educar en él distintos tipos de pensamiento.

Para desarrollar una habilidad matemática se debe cambiar el objetivo, por ejemplo, encontrar el valor de $(x+1)$ y guiar a los alumnos para que encuentren un procedimiento alternativo como: $6(x+1)=12$, por lo que $(x+1)=2$.

Los alumnos que hacen uso de procedimientos alternativos piensan en estructuras abreviadas, hacen abstracción del material matemático relevante y son flexibles de pensamiento porque muestran la capacidad para librarse de procedimientos comunes (Krutetskii, 1976).

Habilidades matemáticas en Estadística

La investigación realizada por Hernández (2006) permite decir que es posible la manifestación de las habilidades matemáticas señaladas por Krutetskii (1976): flexibilidad de pensamiento, reversibilidad de pensamiento y generalización, en Estadística y Probabilidad, ya que los alumnos mostraron ser potencialmente capaces al resolver problemas no rutinarios, evidenciando la presencia de habilidades matemáticas en Estadística y Probabilidad, aun cuando no se les enseñó de manera sistemática a desarrollar habilidades.

Matemática Aplicada

En este punto es importante señalar que aunque el currículo tradicional considera a la Estadística como parte de la Matemática, algunos investigadores como Méndez (2005) la consideran como Matemática Aplicada (en diversos contextos). Del Pino y Estrella (2012) mencionan que la Estadística se puede aplicar en la enseñanza de conceptos matemáticos y exponen la idea de que la Estadística proporciona un contexto para dar sentido a los números, gráficas y operaciones.

De la Didáctica de la Matemática a la Didáctica de la Estadística

Una reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la Estadística es que la Didáctica de la Estadística o Educación Estadística es un área emergente, por lo que hace falta investigar más acerca de los errores y dificultades que enfrentan profesores y alumnos. Para tener una aproximación a éstos, consideramos importante cuidar los acercamientos a la relación entre los conceptos matemáticos y los estadísticos.

Por ejemplo, en el tratamiento de las funciones lineales, a partir de una tabla de valores para las variables *X* y *Y* se puede obtener el modelo lineal correspondiente; de manera reversible, partiendo del modelo lineal, es posible obtener los valores tabulados. En contraparte, en una situación estadística con datos bivariados, no es posible obtener los valores tabulados a partir del modelo estimado. Esta contrastación permitiría a los alumnos reflexionar sobre las características de los problemas matemáticos y las características de los problemas estadísticos.

Esta situación ha sido señalada por Flores y Hernández (2012): un aspecto en la enseñanza de la Matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), al que no se le ha dado el cuidado que merece en el llamado “tronco común” (Matemáticas I-IV), es la enseñanza de contenidos de Estadística y Probabilidad, cuando la tendencia mundial es darles cada vez mayor relevancia.

Dificultades en el aprendizaje de la Estadística

Algunas dificultades comunes en el aprendizaje de la Estadística tienen que ver con la fijación que tienen los alumnos por el tratamiento individual que le dan a los datos en Matemáticas. En Estadística, es necesario construir datos representativos que no necesariamente coinciden con los datos observados. Aunado a esto, además, consideran al promedio aritmético como el valor más representativo, pasando por alto los datos atípicos.

Un obstáculo frecuente que es necesario superar es la fijación del pensamiento matemático frente al cambio hacia el pensamiento estadístico que se presenta cuando se le pide al alumno interpretar el modelo de regresión lineal obtenido con datos bivariados en un determinado contexto. Algunos estudiantes mencionan que “no es correcto” porque al sustituir un valor de la variable independiente no se obtiene el valor observado en la variable dependiente.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Otro obstáculo que enfrentan los alumnos es el de discernir ante un contexto probabilístico cuál definición de probabilidad (teórica o frecuentista) es la adecuada.

Del Pino y Estrella (2012) escriben que las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de la Estadística son del tipo conceptual, para ejemplificar esta situación mencionan la dificultad que tienen al pasar de los datos individuales a un comportamiento conjunto, lo que se traduce en obstáculos para comprender tablas y gráficas.

Probablemente, algunos factores explicativos en la disminución de la comprensión de los conceptos estadísticos se deben a que los docentes tomaron los cursos de Estadística bajo un método formal y así lo están impartiendo, por lo que es necesario cambiar los enfoques de enseñanza, con el fin de no continuar con este ciclo. Asimismo es posible que los docentes se basen en algún libro de texto que, en ocasiones, define los conceptos de manera general y al ser también éste la referencia para los alumnos, resulta insuficiente para que éstos logren la comprensión de las ideas estadísticas básicas como la variabilidad.

Opiniones de algunos educadores sobre la necesidad de replantear la docencia en la enseñanza de la Estadística

Hernández (2010) considera que la enseñanza de esta asignatura debe concebirse como un proceso que va desde el nivel empírico hasta el teórico, pasando por el puente de la Probabilidad, pero enfatizando el desarrollo de estrategias en la solución de problemas estadísticos. Esto, permite al alumno desarrollar habilidades matemáticas como encontrar dos métodos de solución en un problema y reglas generales a partir del análisis de casos particulares, resolver problemas directos e inversos y explicar cómo surge un resultado y darle sentido estadístico relacionándolo con el contexto. Esta consideración se refiere a la solución de problemas no rutinarios para observar la manifestación de habilidades matemáticas y el pensamiento estadístico.

Ejemplificaremos la manifestación de habilidades matemáticas con el siguiente problema: “En un equipo de fútbol, el promedio de altura de los 11 jugadores es de 165 cm, pero se pretende aumentar el promedio a 168 cm, para ello en el próximo torneo se incorporarán tres jugadores suplentes. ¿Cuáles deben ser las estaturas de los jugadores incorporados?”

En esta experiencia docente, los alumnos mostraron las siguientes habilidades:

- Reversibilidad de pensamiento, al aplicar el procedimiento para la media aritmética de manera inversa: (8)(165)=1320 y (11)(168)=1848.

La diferencia entre 1848 cm y 1320 cm es de 528 cm, por lo que cada uno de los jugadores incorporados tiene 176 cm de estatura.

- Flexibilidad de pensamiento y consideración de la variabilidad (pensamiento estadístico), al proponer que la estatura de los tres jugadores es diferente: 175, 176 y 177 cm

- Generalización, al comprender que la estatura promedio de los jugadores incorporados es una incógnita que simbolizan con x, algunos alumnos propusieron la siguiente representación: 165+165+165+165+165+165+165+165+x+x+x, que corresponde a la ecuación $\frac{1320 + 3x}{11} = 168$

Dos aspectos importantes que el docente debe conocer en la enseñanza de la Estadística son, por una parte, que los números que se manejan en las variables numéricas tienen significado y conexión con una porción de la realidad (por ejemplo, si el promedio del número de hijos en 10 familias es de 2.5 hijos, entonces se puede estimar que por cada 100 familias el número de hijos es de 250) y, por otra, que los modelos utilizados (gráficas, tablas, modelos lineales bivariados) son aproximaciones o estimaciones del comportamiento de un fenómeno real, dado que hay errores inherentes a la variabilidad. Estos aspectos se pueden vincular con el modelo lineal bivariado: $Y=2.5X$, donde Y representa el número de hijos y X el número de familias.

Charría *et al*. (2005) mencionan que la enseñanza de la Estadística es un tema que ha logrado la preocupación de un colegiado de docentes e investigadores en el ámbito mundial. Al respecto Behar y Ojeda (2000) afirman que, dada la importancia que esta área reclama en la formación de los universitarios, por las decisiones a las que se ven enfrentados diariamente y la relevancia que la Estadística reviste para la investigación, se considera que muchas de las dificultades de la apropiación de conceptos en la aplicación de los métodos estadísticos y en el uso adecuado de los mismos, se debe a la falta de prácticas pedagógicas apropiadas para la superación de estas dificultades. En efecto, algunas instituciones y profesores sólo se han preocupado por presentar la Estadística como un curso más en el área de la Matemática y no han resaltado la verdadera importancia de una disciplina que tiene fundamentos matemáticos y es una invaluable herramienta para la toma de decisiones y la cuantificación de riesgos.

Propuestas de docentes y especialistas encaminadas a superar las dificultades en la enseñanza de la Estadística

Behar y Grima (2001) plantean que diversos autores (Green, 1992; Moore, 1997; Snee, 1993), proponen como objetivos relevantes para un curso el desarrollo de las siguientes competencias:

- Habilidad para ligar la Estadística con situaciones del mundo real.
- Conocer los conceptos básicos de la Estadística.
- Habilidad para sintetizar los componentes de un estudio estadístico.
- Comunicar los resultados de una manera clara.

Aunque existen diferencias en los cursos introductorios que dependen de la disciplina específica a la cual se dirigen, la tendencia en las propuestas que se realizan en las distintas publicaciones sobre enseñanza de la Estadística, están orientadas a *fortalecer el pensamiento estadístico, más que el aprendizaje de fórmulas y ecuaciones.* Los contenidos de la teoría estadística y de la Matemática se supeditan a la necesidad de fortalecer el entendimiento de una estrategia conceptual para la resolución de problemas contextualizados, reforzados con simulaciones que ilustren de una manera más vivencial el significado de la teoría (Behar y Grima, 2001).

En este fortalecimiento del pensamiento estadístico se puede enseñar la variabilidad de manera cualitativa por medio de la observación y el comportamiento gráfico, dirigiendo la atención de los alumnos sobre las percepciones de cambios que sugieren los datos y sus tendencias. Lo deseable es que los alumnos le den un sentido estadístico a los datos y a los resúmenes estadísticos o a las gráficas.

Los alumnos deben comprender que la Estadística es un área ideal para hacer preguntas y realizar encuestas que les proporcionen respuestas aproximadas debido a la variabilidad que presentan los datos.

Resumiendo las propuestas anteriores, se trata de que los alumnos trabajen con datos obtenidos de su entorno y que resuelvan problemas reales que les permitan desarrollar el pensamiento estadístico.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

Propuesta de experiencia docente alternativa utilizada en el aula por los autores

Otra experiencia docente fue el planteamiento a los alumnos del siguiente problema.

De acuerdo con los datos del clima que se muestran a continuación, en la región de Cd. Mante, Tamaulipas, determinar cuál es la época más apropiada para la cosecha de la caña de azúcar (zafra), teniendo en cuenta las siguientes condiciones formuladas por los investigadores Martínez, A. y Martínez, M. A. (1996): a) La lluvia y la temperatura de la zona cultivada influyen en el contenido de azúcar de la caña cosechada; b) Cuando hay mucha variación de la temperatura un mes antes de la cosecha, se produce un efecto positivo en el rendimiento del azúcar, la lluvia registrada en un período de dos meses antes de la cosecha reduce el rendimiento del azúcar; y c) En el caso de la región de Cd. Mante, la duración de la zafra es aproximadamente de 14 semanas.

La información que se presenta a continuación es una reducción de los registros de temperatura máxima y mínima (grados centígrados) de 38 años en la zona de Cd. Mante (provienen de 41610 datos originales):

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

No. de semana	máxima	mínima	No. de semana	máxima	mínima
1. 1-7 enero	26.26	13.79	27	33.52	22.54
2	25.91	12.08	28	33.97	22.52
3	26.29	12.07	29	34.00	22.56
4	26.63	12.16	30. 23-29 julio	34.08	22.52
5. 29-4 enero-febrero	26.96	13.29	31	34.56	22.51
6	27.52	13.11	32	35.84	22.36
7	28.49	13.69	33	35.59	22.42
8	28.66	14.48	34	35.60	22.45
9	30.13	14.54	35. 27-2 agosto-sept.	35.11	22.49
10. 5-11 marzo	30.35	15.08	36	34.20	22.21
11	31.71	15.83	37	33.06	21.81
12	32.29	16.33	38	33.22	21.75
13	32.76	17.42	39	33.11	21.06
14	34.12	17.68	40. 1.7 octubre	31.88	19.77
15. 9-15 abril	33.84	18.47	41	32.26	19.59
16	34.30	19.38	42	31.93	18.78
17	35.51	20.92	43	31.58	18.33
18	35.41	21.21	44	30.64	17.61
19	34.94	21.64	45. 5-11 noviembre	29.28	15.93
20. 14-20 mayo	35.53	21.82	46	29.16	16.06
21	35.72	22.28	47	28.32	14.79
22	35.45	22.35	48	27.10	13.45
23	35.97	22.89	49	27.10	13.79
24	35.87	22.87	50. 10-16 diciembre	26.94	12.75
25. 18-24 junio	34.91	22.86	51	25.98	12.02
26	34.24	22.66	52	26.30	12.34

La información que se presenta en la siguiente tabla son los valores correspondientes a la precipitación promedio por semana del año, durante los 38 años considerados en los datos iniciales (Martínez y Martínez, 1996):

No. de semana	mm	No. de semana	mm
1-7 enero	0.6755	27	7.4004
2	0.2461	28	7.1049
3	0.4645	29	5.9931
4	0.6531	30	4.9878
5	0.7569	31	4.2460
6	0.2441	32	3.7159
7	0.3181	33	3.6131
8	0.6538	34	7.8508
9	0.3292	35	7.4876
10	0.3976	36	5.5208
11	0.3690	37	7.2976
12	0.1841	38	4.7313
13	0.4317	39	6.0675
14	0.6849	40	4.1747
15	0.7980	41	2.0220
16	2.0464	42	3.2057
17	1.8825	43	1.1971
18	1.6012	44	1.5072
19	2.3253	45	1.3214
20	2.3955	46	0.6933
21	4.2678	47	0.4464
22	4.4641	48	0.5764
23	3.9771	49	0.8314
24	5.6788	50	0.5400
25	8.7041	51	0.5506
26	9.2033	52. 24-31 dic.	0.4029

En esta experiencia docente observamos las siguientes manifestaciones del pensamiento estadístico:

a) A partir de la construcción de la gráfica de la variable temperatura, la mayoría de los alumnos concluye que la época más adecuada para la zafra es desde la primera semana del año hasta la semana 20 aproximadamente.

b) Pocos estudiantes observaron la influencia de la variable precipitación pluvial en el rendimiento de la caña de azúcar. Los alumnos que consideraron esta variable, concluyen que el período adecuado para la zafra es aproximadamente en las primeras 14 semanas del año.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

Conclusiones

Si las actividades que se realizan son rutinarias, entonces se desarrollan habilidades básicas o destrezas de pensamiento, por otra parte, el desarrollo de actividades no rutinarias fomentará el logro de habilidades más complejas.

Las habilidades matemáticas se pueden formar y desarrollar si presentamos a nuestros alumnos problemas que involucren conceptos no tratados directamente en clase, de manera que en el proceso de solución se puedan observar y juzgar las ideas que utilizan. Independientemente de la solución es importante analizar las estrategias que se ponen en juego para resolver una situación planteada. Si se observan las herramientas conceptuales que usan se tendrán indicios de sus potencialidades.

Es posible proponer problemas no rutinarios para desarrollar habilidades matemáticas, el pensamiento y el razonamiento estadístico en los estudiantes como alternativa al cambio de visión de la Estadística y de la Probabilidad hacia un desarrollo de capacidades cognoscitivas y del sentido estadístico como objetivos prioritarios. Esto permitiría relacionar el Modelo Pedagógico del CCH con las exigencias internacionales.

Referencias

Behar, R. y Ojeda, R. (2000). El proceso de aprendizaje de la Estadística: ¿qué puede estar pasando? En *Heurística*. No.10.

Behar, R. y Grima, P. (2001). Mil y una dimensiones del Aprendizaje de la Estadística. En *Estadística Española*. No.148. Vol. 43.

Charría, V. et al. (2005). La enseñanza de la Estadística Inferencial. Un estudio de caso en la Pontificia Universidad Javeriana de Cali. En *Pensamiento Psicológico*. No. 5, Vol.1.

Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación Estadística: relaciones con la Matemática. En Investigación Educacional Latinoamericana, núm. 49.

Flores, A. H. y Hernández, H. (2012). *Diagnóstico del Área de Matemáticas*. CCH-UNAM.

Hernández, J. D. (2006). *Habilidades matemáticas en la comprensión de la Estadística y de la Probabilidad en alumnos del CCH Sur*. Tesina de Especialización en Estadística Aplicada no publicada. IIMAS. UNAM.

Hernández, J. D. (2006). Comentarios sobre la asignatura de Estadística y Probabilidad. En *Eutopía*. Nos. 12-13. CCH-UNAM.

Itelson, B. (1985). Psicología de los tipos básicos de aprendizaje y enseñanza. En Petrovsky, A. *Psicología Evolutiva y Pedagógica*. México: Cartago-Letras.

Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in School Children. University of Chicago. Press.

Martínez, G. A. y Martínez, M. A. (1996). Método de cómputo para pronosticar la época de zafra en caña de azúcar con base en datos de temperatura y precipitación. En *Agrociencia*, vol. 30., núm. 4. México.

Méndez, I. (2005). Estadística Aplicada, herramienta para la práctica profesional. En *Gaceta UNAM.*

Salinas, H. J. (2014). "¿Qué matemáticas en el bachillerato?" En *Gaceta CCH.* No. 1377.

Caracterización del razonamiento inferencial intuitivo de los ALUMNOS del BACHILLERATO

Recibido: 20/02/2016
Aprobado: 8/03/2016

Sandra Areli Martínez Pérez

Resumen:
El presente trabajo es un estudio sobre estadística inferencial informal, se llevó a cabo con 20 estudiantes del quinto semestre de bachillerato en el CCH. Se aplicó un cuestionario con dos problemas de prueba de hipótesis con el fin de explorar *el razonamiento inferencial intuitivo* presente en los estudiantes al tratar de realizar inferencias. Dichas respuestas fueron analizadas con el apoyo de la Teoría Fundamentada, identificándose 4 categorías: *datos, incertidumbre, contexto* y *razonamiento intuitivo*. Esta última se estableció como la categoría central ya que es el tema de investigación de este trabajo. Se observó que las respuestas se ubican sólo en una de las categorías, es decir, que los alumnos sólo pueden tomar en cuenta un aspecto en el momento de responder.

Palabras clave: inferencia estadística, razonamiento informal, razonamiento intuitivo.

Abstract:
This present investigation is a study about informal inferential statistics that was conducted with 20 student of fifth semester of high school in México. They answered a questionnaire with hypothesis testing problems in order to explore the intuitive inferential reasoning *in student. The responses were analyzed with the support of Grounded Theory identifying four categories:* data, uncertainty, context *and* intuitive reasoning. *The latter is established as the core category as it is the research topic of this investigation. It was noted that the answers lie only in one of the categories, i.e., that students can consider only one aspect when responding.*

Keywords: statistical *inference, informal reasoning, intuition.*

Introducción

La estadística tiene un papel destacado en el desarrollo de la sociedad moderna al proporcionar herramientas metodológicas generales para recoger y organizar todo tipo de datos, para describir y analizar su variabilidad, para determinar relaciones entre variables y diseñar en forma óptima estudios y experimentos.

Dentro de la estadística, la herramienta principal es la inferencia, la cual se refiere, de acuerdo con Pratt (2008), a la "identificación de patrones en forma de tendencias o parámetros estadísticos en la población". La inferencia estadística utiliza las herramientas proporcionadas por la estadística, para hacer afirmaciones sobre poblaciones a partir del análisis de una muestra, con el fin de elaborar predicciones y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Sin embargo, de manera tradicional, la inferencia estadística es presentada en el aula como un conjunto de cálculos y procedimientos, a través de los cuales la información contenida en los datos se utiliza para estimar intervalos de confianza o para realizar la prueba de hipótesis, pero se han encontrado dificultades en el entendimiento de estos temas debido a que los estudiantes e incluso los profesores presentan errores conceptuales. Estas dificultades han sido documentadas en diversas investigaciones (por ejemplo, Garfield y Ben-Zvi, 2008; Vallecillos y Batanero, 1997).

En los últimos años se han hecho propuestas que motiven a los alumnos a elaborar inferencias, pero no se han encontrado trabajos que caractericen las formas de razonar de los alumnos cuando se enfrentan a tareas que impliquen elaborar inferencias, por lo que en este trabajo se busca conocer y caracterizar el razonamiento intuitivo de los alumnos de bachillerato cuando elaboran inferencias, esto con el propósito de saber el punto de partida para la instrucción y en qué aspectos se deben enfatizar para que los estudiantes elaboren inferencias a partir de los datos que tienen a la mano.

Así, la pregunta de investigación que se busca contestar en este trabajo es: ¿cómo es el *razonamiento inferencial intuitivo* de los estudiantes?

Antecedentes

En el campo de la educación estadística Rossman (2008) sugiere el concepto de *razonamiento inferencial intuitivo*, para distinguir entre diferentes actividades que realizan los estudiantes frente a tareas o problemas de inferencia estadística. No define directamente dicho concepto, más bien lo muestra comparando un ejemplo en el que se pone en juego un razonamiento intuitivo con otro en el que se pone en juego un razonamiento informal. El rasgo que distingue ambos tipos de razonamiento es que el primero se manifiesta cuando el sujeto responde de manera espontánea e inmediata una vez que se ha comprometido con el problema; el segundo se manifiesta cuando el sujeto responde después de realizar transformaciones y procedimientos con los datos del problema.

Un antecedente importante para este trabajo fue la exploración hecha por García (2012) de los niveles de inferencia estadística informal que 16 estudiantes de bachillerato podían alcanzar, a través de un cuestionario con problemas de prueba de hipótesis sobre proporciones. Observó que los alumnos responden basados más en sus creencias, sus conocimientos personales o sus intuiciones acerca del contexto, que en los datos del problema. Una de sus implicaciones teóricas fue la necesidad de explorar el razonamiento intuitivo de los estudiantes.

Marco conceptual

En este apartado se hará una aproximación de lo que es el razonamiento intuitivo. El Marco conceptual se entiende como un número de categorías reducidas que indican los aspectos principales que se tendrán en cuenta en el trabajo a desarrollar y en las posibles relaciones.

El Marco Conceptual considerado para el presente trabajo contempla el siguiente aspecto: *Razonamiento intuitivo*. El concepto de intuición admite muchas interpretaciones ya que el significado que se le atribuye generalmente depende del campo del conocimiento en el que sea tratado; incluso en algunos casos los significados atribuidos a la intuición en diferentes campos resultan no ser consistentes. En educación matemática, Fischbein (1987) ha elaborado una reflexión amplia acerca de la intuición en ciencias y matemáticas. Para este autor el concepto de intuición expresa una tendencia fundamental de la mente humana: la búsqueda de la certeza.

La intuición que interesa destacar aquí es la que se pone en juego, ya sea en la elaboración por parte del sujeto sobre enunciados acerca de algún aspecto de un objeto determinado, ya en su evaluación de enunciados dados; en las descripciones que siguen el término 'enunciado' abarca ambas clases.

En el presente trabajo se analizan las respuestas a tareas de inferencia dadas por varios estudiantes que no han aprendido el tema. No se espera que lleven a cabo transformaciones o procedimientos más allá de las operaciones básicas, pero como se refieren a situaciones que ocurren en la vida cotidiana se esperan respuestas derivadas de razonamientos intuitivos.


Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2015

Metodología

La recopilación de datos consistió en la aplicación de un cuestionario con dos problemas dirigido a 20 estudiantes de bachillerato, con edades de entre 16 y 17 años; quienes se encontraban cursando la asignatura de Estadística y Probabilidad 1.

El problema mostrado a continuación fue extraído de Rossman (2008), la estructura es idéntica a la original, las preguntas fueron adaptadas con el fin de obtener mayor información.

La mayoría de las personas son diestras y hasta el ojo derecho es dominante para la mayoría de la gente. Los biólogos moleculares han sugerido que los embriones humanos en etapa tardía, tienden la girar la cabeza hacia la derecha. El bio-psicólogo alemán Onur Güntürkün (2003) conjeturó que esta tendencia a girar a la derecha se manifiesta de otras maneras, por lo que estudió parejas besándose para ver si tendían a inclinar la cabeza hacia la derecha mientras besan. Él y sus investigadores observaron parejas en lugares públicos como aeropuertos, estaciones de tren, playas y parques. Ellos tuvieron cuidado de no incluir a las parejas que se encontraban sosteniendo objetos como equipaje, que puede afectar la dirección en la que giran. Para cada pareja, los investigadores se fijaban si inclinaban la cabeza a la derecha. Ellos observaron 124 parejas.

a) Si de las 124 parejas que se observaron, 80 se inclinaron a la derecha, ¿Qué piensas de la hipótesis de Onur Güntünrkün? ¿Por qué? Explica detalladamente.

b) ¿Crees que Onur Güntürkün está en lo correcto? ¿Por qué? Explica.

c) Supongamos que es cierto lo que asegura Onur Güntürkün, ¿cuántas personas crees que deberían inclinarse a la derecha de las 124 para asegurar la hipótesis? ¿Por qué? Explica.

Análisis de datos

El proceso de análisis se llevó a cabo mediante dos revisiones: la primera, consistió en identificar palabras o frases similares que hicieran referencia a una misma idea y se agruparon en códigos; la segunda, fue hecha por código, es decir, se observaron las respuestas ubicadas en cada uno. Se buscaron al igual que en la primera revisión, palabras, frases o ideas que el alumno haya mencionado y así se crearon indicadores, los cuales se nombraron de acuerdo al tipo de respuesta. Sólo se describe el análisis del inciso a) ya que en los demás incisos el proceso fue similar.

En la primera revisión del inciso a), se identificaron tres códigos nombrados como: código mitad, dentro de las respuestas se identificaron las palabras *mayoría, mitad* y la cantidad *50%* (ver tabla 1); código duda, las respuestas contienen las palabras *tal vez, quizá* y las frases *pueden ser, es arriesgado*; y código tendencia, las palabras consideradas en esta categoría son *derecho, izquierdo, diestro, zurdo*.

Tabla 1

Ejemplos de respuestas ubicadas en los diferentes códigos	
Código mitad	Que es cierta, o que es un buen argumento. Porque es más de la mitad, y 80 son varias personas aunque no todos los que son tardíos entren en este conteo de los 80, o simplemente no giran su cabeza.
Código duda	Que es arriesgada. Porque para fundamentarla propiamente creo que se debería hacer uso de otra investigación, ya que cabe la posibilidad de que los resultados fueran mera coincidencia.

En la segunda revisión, se observaron las respuestas ubicadas en cada código y por ejemplo en el código mitad, se identificaron dos indicadores: indicador simple, las respuestas sólo están centradas en la mitad de la muestra, no mencionan otra cosa; indicador cálculo, son las respuestas en las que hay evidencia de que se hizo un cálculo matemático (regla de tres) usando los datos del problema (ver tabla 2).

El mismo proceso se repitió en los demás códigos.

Tabla 2

Ejemplos de respuestas ubicadas en los indicadores del código mitad	
Indicador simple	Que es correcta. Porque de todas las parejas que lo hicieron, más del 50% giro su cabeza.
Indicador cálculo	124 – 100% 80 – x 64% Que es correcta. Porque más de la mitad de las personas afirman esta teoría o dan cómo posibilidad que sea correcta.

Conclusiones

Los códigos e indicadores identificados, que englobaban las ideas centrales de las respuestas, fueron colocados en una categoría y luego se separaron en subcategorías que describen de manera general los elementos presentes en el razonamiento inferencial intuitivo. Se propone como categoría central al *Razonamiento Inferencial Intuitivo* y tres subcategorías: *Datos, Incertidumbre* y *Contexto*.

Todas las respuestas fueron colocadas en la categoría *Razonamiento Inferencial Intuitivo*, pues los estudiantes al mirar la situación específica y relacionarla con el conocimiento propio acerca de esa situación realizan un razonamiento intuitivo casi inevitable.

En la subcategoría *Datos* se colocaron las respuestas cuya intuición más común es la representatividad, en el sentido de suponer que la proporción de la muestra coincide con la de la población. Algunas de las respuestas que se centran en los datos tienen un carácter abstracto respecto al contexto, pues la afirmación se hace sólo con base en la observación de la muestra, sin tener en cuenta el contenido específico.

En la subcategoría *Contexto* se colocaron las respuestas que no toman en cuenta los datos, pues el sujeto puede ofrecer una respuesta directamente extraída de su conocimiento (o creencia). Hay otra manera de considerar el contexto que permite dar una respuesta rápida: hacer una analogía con una situación similar pero más conocida y trasladar entonces el resultado correspondiente.

Por último, una intuición que surge en las respuestas de los estudiantes es la percepción de la incertidumbre, pues se dan cuenta que no pueden dar una respuesta concluyente. Esto produce el sentimiento de que falta información y se traduce en la sugerencia de obtener más datos o volver a hacer un experimento, sin comprometerse con una alguna conclusión, dichas respuestas fueron colocadas en la subcategoría *Incertidumbre*.

¿Cómo es el *razonamiento inferencial intuitivo* de los estudiantes de bachillerato?

Las respuestas intuitivas de los estudiantes se ubican en alguna de las tres subcategorías *Datos, Incertidumbre* o *Contexto*, y se articulan sólo tangencialmente con las otras, es decir, los estudiantes sólo toman en cuenta un aspecto en el momento de responder.

El modelo del pensamiento estadísticos de Wild y Pfannkuch (1999) enumera 5 tipos de pensamiento que caracterizan el estilo de pensar de manera estadística, entre los que se encuentran el reconocimiento de la necesidad de los datos, consideración de la variación, la integración de la estadística y el contexto; por lo que es necesario desarrollar en los estudiantes un razonamiento que articule los aspectos de las tres subcategorías a través de actividades.

Referencias

Fischbein, E. (1987). . Holanda: D. Reidel publishing company.

Garcia, V. (2012). . Tesis de Maestría no publicado. CINVESTAV-IPN, México.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). . Springer.

Pratt, D., Johnston-Wilder, P., Ainley, J. y Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference. En , núm. 7.

Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: one statistician's view. En núm. 7.

Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Análisis del aprendizaje de conceptos clave en el contraste de hipótesis estadísticas mediante el estudio de casos. En , núm. 17.

Voss, J. F., Perkins, D. N., y Segal, J.W. (1991). . New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. En , núm. 67.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. En , núm. 7.

Travesías

Espacio de expresión cultural de la revista Eutopía
Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

CIELO, LIMBO Y TIERRA

FOTOGRAFÍA DE FRANCISCO SANTIAGO

CIELO, LIMBO Y TIERRA

Egresado de la licenciatura en Comunicación Gráfica en la Facultad de Arte y Diseño de la UNAM, Francisco Santiago, ha colaborado como fotógrafo en diferentes medios, entre los cuales podemos destacar: Periódico Síntesis, Milenio Hidalgo, revista Fotodigim, Agencia Notimex, Periódico México City Times, Periódico Reforma, entre otros. También ha realizado varios trabajos de manera independiente, como el aquí presentado.

"Fiestas patronales pirotecnia y fotografía", que ha sido expuesto en el Museo de la Cultura HñäHñu, de Ixmiquilpan Hidalgo.

Cielo, limbo y tierra, tres planos existenciales donde de manera sublime, la luz, la fe, el movimiento, el color, el fuego y la alegría quedan capturados en la visión particular y colectiva de la lente de Francisco.

CIELO

La historia de Hidalgo, sus tradiciones, sus fiestas populares, están indisolublemente ligadas a los festejos en honor a las deidades religiosas que tiene cada parroquia de los 84 municipios de la entidad.

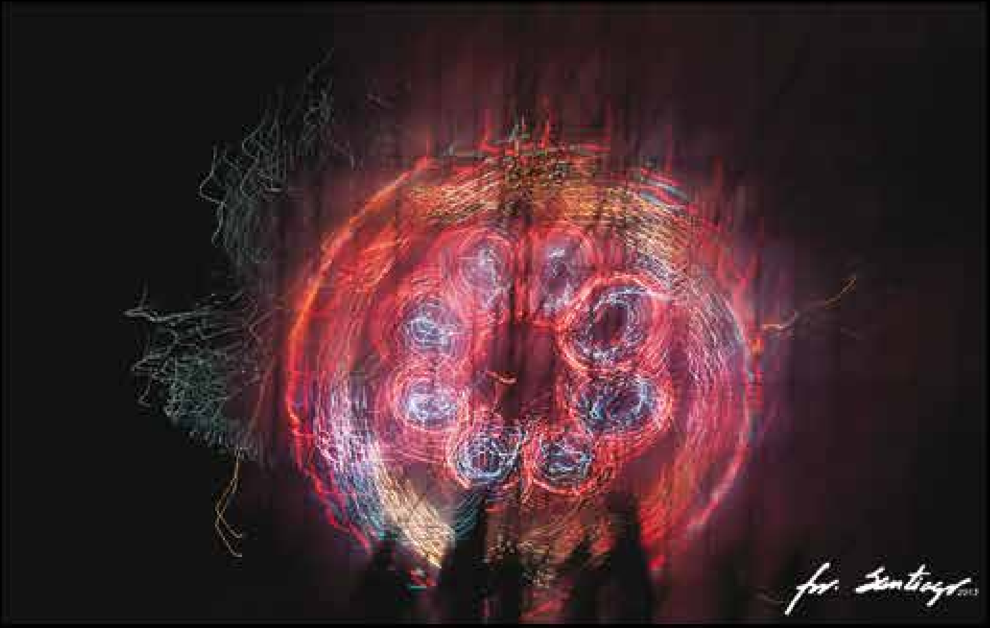
El colorido, el folclor, la fiesta, no lo serían de tal magnitud sin el acompañamiento de los fuegos artificiales, de hecho, son estos los que le dan el fulgor y la alegría a cada festejo.

52

eUTOPÍA

REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

LIMBO



Cuando los fuegos pirotécnicos arden representa el momento del clímax, del gozo, donde niños, jóvenes y adultos miran con asombro y plenitud los colores fulgurantes, en una sola mirada, masiva, sin pausas ni freno, porque no hay otra cosa más regocijante que un espectáculo nocturno que envuelve de luces y colores el espacio que observas.

Francisco Santiago ha recorrido las principales fiestas patronales de Hidalgo, con su lente viajera, con su mochila al hombro. Injusto es destacar una de otra, porque todas son bellas, todas son auténticas fiestas del pueblo hidalguense(...)

eutopía
REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

fr. Santiago

TIERRA

El fotógrafo ha captado los destellos, las luces, los colores, el entorno multifacético de cada fiesta, de cada pueblo, de cada demostración artesanal de los auténticos creadores de los cuetes que truenan, del Torito y del Castillo que lucen, hacen piruetas y figuras ornamentales de gran calidad.


fr. Santiago


fr. Santiago 2013

TIERRA

Monumental trabajo de Francisco Santiago en imágenes que plasman en un solo efecto una secuencia que nuestros ojos observan en milésimas de segundo. Una imagen nítida, clara, a detalle, de los rasgos que van dejando los fuegos en cada movimiento.

Jorge Escamilla.
Periodista.

fr. Santiago

El aprendizaje de la ESTADÍSTICA y probabilidad con el uso del Software *Fathom*

Recibido: 19/02/2016
Aprobado: 8/03/2016

Emma Bautista García

Resumen:
En la actualidad vivimos una serie de cambios y avances tecnológicos, los cuales han inducido al docente a una actualización metodológica. La incorporación de nuevas herramientas didácticas, basadas en la tecnología le permiten explorar y analizar, el aprendizaje autónomo del estudiante.

El Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH-UNAM) tiene el propósito de que los alumnos de nivel Medio Superior desarrollen habilidades para el manejo de estrategias en la resolución de diversos problemas, aplicando las distintas formas de expresión matemática, argumentación y lenguaje. Este trabajo pretende reflexionar acerca de las actividades en el aula haciendo uso de la labor en equipo, la calculadora científica y el pizarrón, en comparación con el uso de las nuevas tecnologías como apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y Probabilidad. Friel (2007) y Garfield, Chance y Snell (2000) encontraron que elegir la tecnología adecuada para el aprendizaje de los estudiantes permite centrarse en la interpretación de los resultados y la comprensión de conceptos y pensamientos, mejorando su aprendizaje.

Palabras clave: herramientas tecnológicas.

Abstract:
Today we live a series of changes and technological advances, which have led the teacher to a methodological update, incorporating new teaching tools based on technology allow you to explore and analyze, autonomous learning of the student.

The College of Science and Humanities (CCH-UNAM) has the purpose of high school level students develop skills for managing strategies in solving various problems, applying different forms of mathematical expression, reasoning and language. This paper aims to reflect on the activities in the classroom using teamwork, scientific calculator and the board, compared to the use of new technologies to support teaching and learning of Statistics and Probability. Friel (2007) & Garfield, Chance and Snell (2000) found that choosing the right technology for student learning can focus on the interpretation of the results and understanding of concepts and thoughts, improving their learning.

Keywords: *technological tools.*

Introducción

Las nuevas formas de enseñanza y aprendizaje han provocado distintas representaciones al visualizar y explorar los datos que han dado lugar a nuevos métodos de análisis, como es el caso del software estadístico y las calculadoras que producen resultados precisos y con mayor rapidez, generando imágenes, facilitando la organización y el análisis de datos. Friel (2007) y Garfield, Chance y Snell (1999) encontraron en sus estudios que el uso de la herramienta tecnológica en clase ayuda a los profesores en la exploración de conceptos e ideas, de ahí que sugieren que el profesor cambie su forma de trabajo en el aula, lo que repercute en la planeación y diseño de secuencias didácticas. Kasuga y Gutiérrez (1999) comentan que estas actividades tienen que ir dirigidas a estimular la imaginación del alumno para lograr el fin educativo que se persigue. Moore (1997) señala que cuando la enseñanza sea con el uso de una herramienta tecnológica es importante elegir la tecnología adecuada para el aprendizaje de los estudiantes.

Marco conceptual

Fathom, herramienta tecnológica para la enseñanza de la Estadística y Probabilidad

El Colegio de Ciencias y Humanidades busca que el estudiante de nivel Medio Superior sea "el principal actor en su proceso de aprendizaje", adquiriendo un desempeño satisfactorio en la comprensión y manejo de contenidos, además de que tenga la capacidad de aprender, tanto de los aciertos como de los errores, así como, desarrollar habilidades para el manejo de estrategias en la resolución de problemas diversos, aplicando las distintas formas de expresión matemática, argumentación y lenguaje.

En el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje en asignaturas de matemáticas de nivel bachillerato, Santos (2007) afirma que el profesor debe poner considerable atención a las diferentes formas de razonamiento del alumno al dar solución a un problema, pues al buscar respuestas éste se cuestiona, indaga y reflexiona en forma particular o en equipo sobre las distintas representaciones de análisis que se presentan, permitiéndole centrarse en la interpretación de los resultados y la comprensión de conceptos. Si la enseñanza se realiza con el uso de la tecnología Brown, Champion (1994) y Cobb, Yackel, Wood, (1992) comentan que es importante tener en cuenta los antecedentes de los estudiantes y los objetivos del curso, además de crear una atmósfera en la que las ideas se puedan expresar libremente y tener la libertad de cometer errores para aprender. Considerando estos aspectos en el estudio que se presenta, se trabajó con el Software *Fathom* (http://www.keypress.com/x5656.xml), es una herramienta flexible y dinámica, con la que los estudiantes pueden hacer la simulación correspondiente dedicando más tiempo a la comprensión de los conceptos.

Metodología

Se trabajó con dos grupos de sexto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Oriente en la asignatura de Estadística y Probabilidad II, revisando la "Unidad II. Distribuciones muéstrales" y se procuró que los estudiantes alcanzarán los aprendizajes:

- Construye la distribución muestral de la media.
- Comprende el concepto de distribución muestral.
- Calcula los valores de $\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}, \mu$ y σ.
- Comprende la relación de $\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}},$ con μ y σ.
- Comprende el Teorema del Límite Central.

En el primer grupo la forma de impartir la clase fue tradicional, ya que se les explicó el tema en el pizarrón y posteriormente, los estudiantes trabajaron en equipo en su lugar haciendo uso de lápiz y calculadora, pasaron al pizarrón tratando de dar solución a un ejercicio e interpretar los resultados encontrados.

En el segundo grupo se les explicó el tema en el salón de clase utilizando el pizarrón, posteriormente la forma de trabajo se desarrolló en una sala de computación, donde se uso el Software Fathom 2, cada estudiante trabajó de forma individual en una computadora, de ahí que posteriormente dieron solución a un ejercicio, al finalizar éste se realizó una plenaria donde comentaron los resultados encontrados, analizaron las distintas gráficas que realizaron y dieron una conclusión con respecto al Teorema del Límite Central.

El ejercicio que resolvieron ambos grupos es el siguiente:

Suponiendo que la altura de cierto tipo de planta, cultivada en un laboratorio botánico está uniformemente distribuida con límites de crecimiento que van del límite inferior de 22 cm al límite superior de 28cm (Johnson, 1999).

Realiza el experimento de simulación para comparar los tamaños de la media, para cada tamaño de muestra de 5, 15, 45, 90, 200 y 1000.

Calcula la media y el error estándar de las medias de las muestras.

1. Completa la siguiente tabla:

"n" Muestras de tamaño	**Media**	**Error estándar**
5		
15		
45		
90		
200		
1000		

Tabla 1. Cálculo de la media y el Error estándar de las medias de las muestras

Observa los resultados encontrados conforme cambia el tamaño de la muestra.

a) ¿Cuál es el comportamiento de las medias?

b) ¿Cuál es el comportamiento de la desviación estándar?

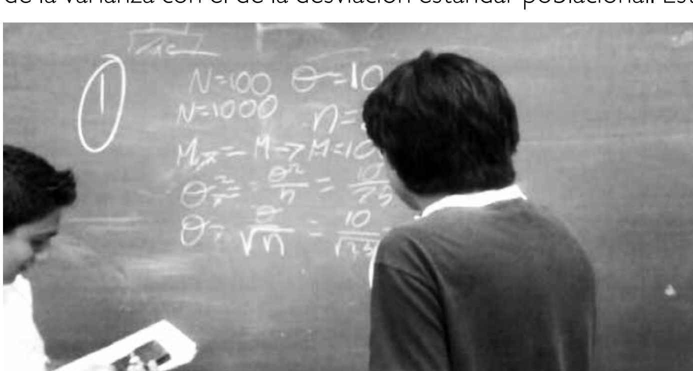
2. Elabora el histograma de las medias para cada tamaño de muestra.
3. Presta atención en el comportamiento de cada gráfica, conforme aumenta el tamaño de la muestra.

a) ¿Qué sucede?

b) ¿A qué conclusión llegas? (Ávila, 2007)

Resultados

Primer grupo: Al momento de que los estudiantes realizaban los cálculos para encontrar los datos de la tabla, no les quedó muy claro porque $\mu_{\bar{x}} = \mu$, a pesar de que se había hecho un ejercicio anteriormente demostrando ello, al buscar el error estándar de las medias de las muestras confundían el valor de la varianza con el de la desviación estándar poblacional. Esta actividad la resolvieron como una receta.



Fotografías: Bautista G. E., Estudiantes de Sexto semestre del periodo 2015-2.

Fig. 1. Actividad realizada en el salón de clase, trabajo grupal. Grupo 1

El desarrollo del razonamiento de los estudiantes no fue significativo, pues a pesar de que observaban los datos de la tabla no encontraban sentido a lo que se les explicaba.

Segundo grupo: En el momento que se llevó a cabo la clase en el laboratorio de computación los estudiantes se sintieron motivados y mostraron interés, al inicio se les dificultó identificarse con el software, encontraron los resultados y realizaron las gráficas correspondientes al tamaño de la muestra.

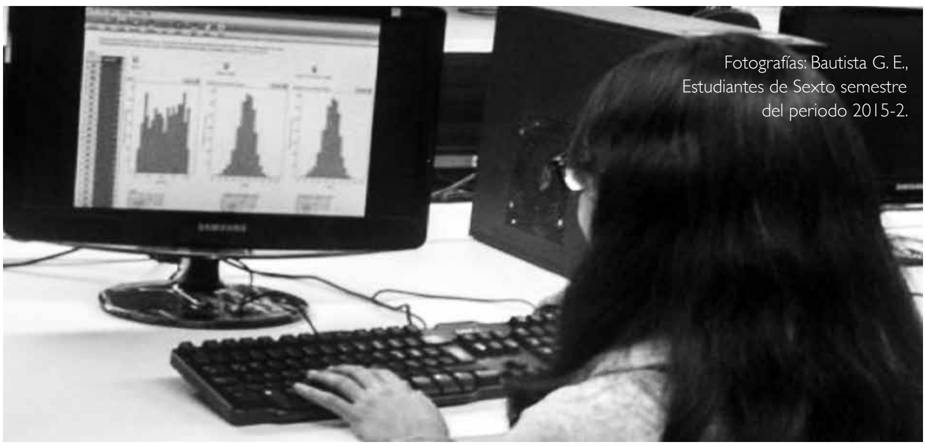


Fig. 2. Actividad realizada en sala de computación, trabajo individual. Grupo 2

El aprendizaje de los estudiantes fue significativo, pues realizaron la exploración e incluso con otros tamaños de muestra, lograron percatarse de la diferencia que existía entre cada gráfica, asimismo analizaron los valores de la media y error estándar de la distribución muestral de las medias observando detenidamente como cambian estos valores conforme aumenta el tamaño de la muestra.

Conclusión

El uso de la herramienta tecnológica ayuda en la exploración de conceptos e ideas; en este caso, el uso del software *Fathom 2* ahorró tiempo en la búsqueda de datos y la indagación realizada fue precisa y concreta. Los estudiantes se sintieron motivados por conocer más y su aprendizaje mejoró, ya que observaron detenidamente lo que ocurría, averiguaron qué pasaba con distintos tamaños de muestra, fueron más analíticos y críticos y se apropiaron de nuevos conceptos en el desarrollo del tema. Con esta actividad se confirma la postura de Friel (2007) y Garfield, Chance y Snell (1999).

Al llevar a cabo las secuencias didácticas en ambos casos, se observó que requieren de ajustes, los cuales se están llevando a cabo, considerando algunas actividades que refuercen la postura del Plan de Estudios Actualizado del CCH y el uso de las nuevas herramientas tecnológicas. Cabe mencionar que cada grupo de estudiantes es diferente y la secuencia didáctica se modifica constantemente con la finalidad de cumplir con las necesidades de cada grupo.

En este proceso, los profesores tenemos que observar, canalizar y apoyar a los estudiantes que tienen problemas con la tecnología, mantenerlos en la actividad planeada y responder a las preguntas que nos formulan para que lleguen a las conclusiones esperadas. Al planear y diseñar las secuencias didácticas debemos de recapacitar en ¿qué queremos que el estudiante aprenda?, ¿cómo podemos estimular su imaginación? y en el desarrollo del aprendizaje ¿qué objetivos queremos alcanzar mediante el uso de tecnología. En estas actividades hay que considerar las características de las salas de computación, el tiempo que se requiere para la actividad y que la tecnología puede fallar.

Referencias

Ávila, A. R. y Hernández T. H. (2007) Distribuciones Muéstrales. En *Paquete Didáctico de Estadística y Probabilidad II*. Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades.

Brown, A. L. y Campione, J. C. (1994) Guided discovery in a community of lerarners. En k. Mcilly (ed.), Classrom lessons: Integrating cognitive theory and classrrom practice. U.S, Cambridge, MA: MIT Press.

Chance, B. y Ben-Zvi, D. (2007) The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics, Technology Innovations in Statistics Education, Center for the Teaching of Statistics, Department of Statistics, U.S, Los Angeles.

Cobb, P., Yackel, E., y Wood, T.L. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. En *Journal for Research in Mathematics Education*. U.S.

Erickson T. (2008) Estates Undoes. En *Fifty Fathoms Statistics Demonstrations for Deeper Understanding*.

Fathom Dynamic Data Software Version 2.0, KCP TECHNOLOGIES Key Currivulum Press, Key College Publishing.

Friel,S (2007). There search frontier: Where technology interacts with the Teaching and learning of data analysis and statistics. En G. W. Blume & M.K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and Perspectives*, Vol. 2. Green wich, CT: Information Age Publishing, Inc.

Garfield,J., Chance,B., y Snell,J.L.(2000).Technology in college statistics courses. En D. Hoton et al, (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*. Dordrecht, Then Netherlands: Kuluwer Academic.

Johnson R. y Kuby Patricia (1999). Variabilidad de la Muestra. En *Estadística elemental, lo esencial*. Editorial Thomson.

Kasuga L. y Gutierrez C. (1999) Aprendizaje Acelerado. En *Estrategias para la potencialización del aprendizaje*. Grupo Editorial Tomo, S.A. de C.V. Nicolás San Juan.

Moore, D.S.(1997). New pedagogy and new content: the case of Statistics. En *International Statistical Review*.

Santos. L. M. (2007). *La resolución de problemas Matemáticos Fundamentos cognitivos*. México: Trillas: Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades. (1996), *Plan de Estudios Actualizado*.

Enseñanza y aprendizaje del concepto de PROBABILIDAD a través del juego Y el uso de las TIC

Lilian Mendoza Zaragoza,
Anahí Guadalupe Chávez Aparicio

Recibido: 19/02/2016
Aprobado: 26/03/2016

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿Por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?

Miguel de Guzmán

Resumen:
Este trabajo es una estrategia didáctica diseñada para un grupo de alumnos que estudian el tema de probabilidad durante el bachillerato. Se busca esbozar un concepto más formal de probabilidad, partiendo de lo subjetivo (creencias e intuición propias del estudiante), transitando por los enfoques clásico y frecuencial y llegando al pensamiento reflexivo sobre las limitaciones y restricciones que caracterizan a estos enfoques.

La motivación dentro del aula, mediante el juego y el uso de TIC, fue considerado como eje en el planteamiento de esta estrategia, simultáneamente con el sentido epistemológico que conlleva el propio concepto de probabilidad.

Palabras clave: probabilidad, juego, pensamiento reflexivo, motivación, TIC.

Abstract:
This paper presents a teaching strategy designed for a group of students studying the subject of probability in high school. The strategy used is to outline a more formal concept of probability, starting from subjectivity (student own beliefs and intuition), passing through the classical and frequency approaches and arriving finally at reflective thinking about the limitations and restrictions that characterize these approaches.

The motivation in the classroom, through game and ICT application, was considered the axis in the approach of the strategy, simultaneously with the epistemological sense of the concept of probability.

Keywords: *probability, game, reflective thinking, motivation, ICT.*

Introducción

La propuesta se suscribe en una población de alumnos de quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) que cursan la asignatura de Estadística y Probabilidad I.

El modelo educativo del colegio sigue hasta hoy, considerándose vanguardista, ya que pedagógicamente está basado en el aprendizaje centrado en el alumno.

Para que el CCH pueda responder a los cambios acelerados que está viviendo la sociedad actual, debe de promover experiencias innovadoras en el sentido de lograr resultados significativos y perdurables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad como rama de las matemáticas, por lo que se propone una estrategia compuesta por tres dimensiones: la motivación, el juego y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

El trinomio motivación-juego-TIC


Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2015

En conjunto la motivación, el juego y las TIC ofrecen un panorama diferente de las matemáticas al exponerlas como algo cercano y como un instrumento valioso, atractivo e innovador.

El aprendizaje es un proceso subjetivo (Gómez, 2005) por lo cual la persona que desea aprender debe sentirse motivada. Si un estudiante está motivado en su clase de matemáticas, su actitud hacia éstas será positiva.

Investigaciones realizadas al respecto han permitido llegar a la conclusión de que, el patrón motivacional puede incrementar el rendimiento académico y favorecer un aprendizaje significativo de las matemáticas (Baroody, 1998).

La teoría del constructivismo sociocultural plantea que las emociones y la motivación de una persona evolucionan en relación a su contexto social y que los procesos de valoración y motivación al aprendizaje están ligados al contexto del aula (Gómez, 2005).

El juego en el ámbito académico está siendo motivo de numerosas investigaciones que señalan que cuando se elige bien, tiene la ventaja de servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos, reforzar los ya adquiridos o fortalecer un contenido.

Si el juego es un recurso didáctico que promueve la motivación y el aprendizaje, entonces puede ser empleado como un componente determinante en la estrategia para mejorar el rendimiento de los estudiantes en la clase de probabilidad, ya que entre otras cosas, favorece a la autoconfianza y fomenta el trabajo colaborativo y el pensamiento reflexivo.

Por su parte, las TIC figuran como motivadores porque permiten la posibilidad de tornar las clases más interesantes, mejorando la presentación de materiales didácticos; así como el aumento del intercambio de conocimientos mediante la reducción de las barreras temporales y espaciales (Paredes et al, 2012).

Finalmente, podemos decir que el trinomio motivación-juego-TIC favorece el aprendizaje hacia las matemáticas porque cuanto más motivado esté un alumno, más descubrirá las habilidades que necesitará para enfrentarse a las tareas de la vida cotidiana.

Propuesta

Para la construcción del concepto de probabilidad se propone el juego "La carrera de las calacas" como ambiente de aprendizaje en donde mediante una reflexión profunda de la práctica, se puede llegar a la parte formal de qué es y para qué sirve la probabilidad.

La carrera de las calacas es una modificación de la propuesta de "La carrera" presentado por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Wilhelmi, 2004).

La estrategia didáctica se llevó a cabo en un grupo de 48 alumnos por lo que se formaron equipos de trabajo con 4 integrantes cada uno. Asignándole a cada equipo una calaca marcada con su número correspondiente.

Objetivos del juego

El alumno:

- Analiza la relación entre los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial del concepto de probabilidad.
- Valora las ventajas y limitaciones de cada uno de estos enfoques, cuando el espacio muestral no es finito o cuando sus elementos no son equiprobables.

Material para el juego:

12 Calacas numeradas consecutivamente del 1 al 12, un tablero de carreras (Fig. 1), simulador de 3 dados tetraédricos con caras marcadas del 1 al 4 elaborado con VBA para Excel (Fig. 2), un control de las tiradas de los dados elaborado con VBA para Excel (Fig.3) y un cuadernillo de trabajo para los alumnos (Fig.4).

Las reglas del juego

Se simula el lanzamiento de los tres dados y se calcula la suma de los números observados. La calaca marcada con el número que resulta de la suma anterior, se mueve una casilla. Gana la primera calaca en llegar a la meta y el juego finaliza.

Figura 1. Pista de la carrera de las Calacas

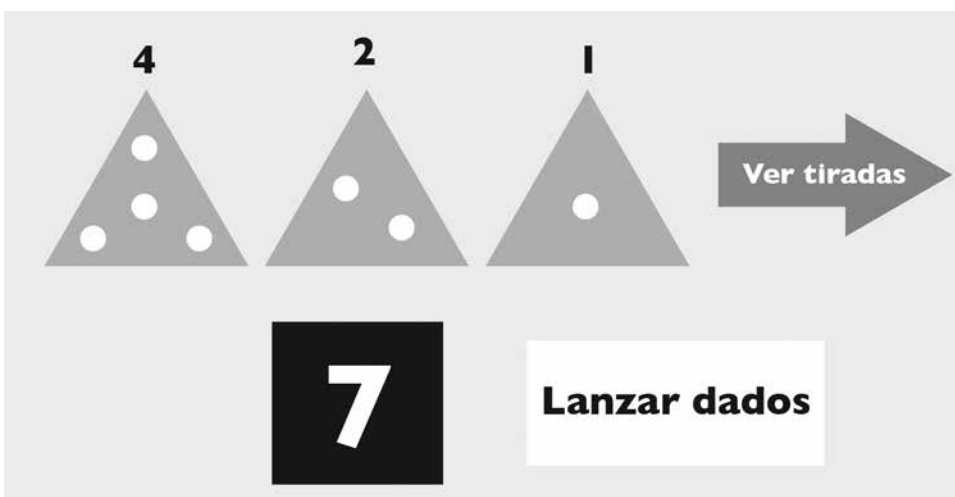
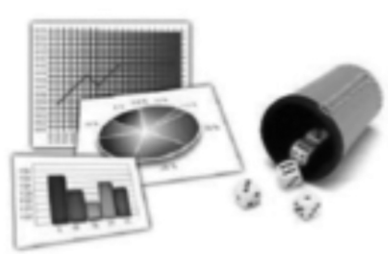


Figura 2. Simulador de dados tetraédricos

TIRADA	DADO 1	DADO 2	DADO 3	SUMA
11	4	1	1	6
10	1	2	4	7
9	1	4	3	8
8	3	3	2	8
7	3	3	2	8
6	4	4	2	10
5	4	3	4	11
4	3	4	2	9
3	3	2	2	7
2	3	4	1	8
1	4	1	4	9

Figura 3. Control de tiradas de los dados


Cuadernillo de la carrera de las Calacas

PROBABILIDAD SUBJETIVA, FRECUENCIAL Y CLÁSICA

Elaborado por:
Maestrante Lilian Mendoza Zaragoza
y Maestrante Anahí Chávez Aparicio

Figura **4**. Cuadernillo de trabajo

Del juego a la formalización

Para acercarse al sentido epistemológico del concepto probabilidad, se utilizó el pensamiento reflexivo a través del planteamiento de cuestiones y actividades que hicieran que los estudiantes tomaran consciencia de las características del fenómeno estudiado; previo al inicio del juego se les preguntó: ¿Qué calaca creen que resulte ganadora?, ¿todas las calacas tienen la misma oportunidad de ganar?

Por un lado, estas preguntas estuvieron dirigidas hacia el enfoque subjetivo de la probabilidad, ya que los alumnos dieron respuestas con base a su intuición o a lo que creyeron que pasaría; por otro lado, con estas interrogantes en mente se les alertó para que prestaran atención a lo sucedido durante el juego.

Las respuestas tendieron a apostar que ganaría la calaca marcada con el número de su equipo.

La siguiente fase fue el análisis de los sucesos, para lo que se dieron estas instrucciones:

- Una vez que ya se tuvo un vencedor en la carrera de calacas, construyan una tabla donde se muestre cuántas veces avanzó la calaca de cada equipo y el total de movimientos conjuntamente.
- Incluyan una fila o columna que muestre la frecuencia relativa correspondiente.

Después se condujo a los alumnos hacia el enfoque clásico, haciendo alusión a la fórmula de Laplace para el cálculo de la probabilidad de un evento *E*:

$$P[E] = \frac{\textit{número de casos favorables a } E}{\textit{número de casos totales}}$$

Para ello se requirieron los conocimientos previos que los estudiantes tenían sobre experimento aleatorio, espacio muestral, evento y variable aleatoria mediante las preguntas: ¿Cuál fue el experimento aleatorio?, ¿cómo quedaría constituido el espacio muestral Ω ? y ¿cuántos elementos debe tener Ω?

Se inició la discusión al interior de cada equipo y posteriormente al exterior en todo el grupo, durante este proceso se pudo percibir que a los alumnos les cuesta mucho trabajo primero, determinar cuál es el espacio muestral y el tipo de elementos que contiene y segundo, utilizar el lenguaje matemático y aún más escribirlo para expresar sus resultados; por esta razón se presentó la lista de las 64 triadas elementos de Ω (d_1, d_2, d_3) para verificar sus respuestas. A continuación se desarrolló el concepto variable aleatoria:

$$X = d_1 + d_2 + d_3$$

Cada calaca avanza de acuerdo a la suma de los tres dados, por lo que:
Entonces la variable aleatoria se identificó como una regla de correspondencia entre los elementos de Ω y los números reales, por ejemplo, para el elemento (2, 3, 4) el valor correspondiente de la variable aleatoria es:

$$X = 2 + 3 + 4 = 9$$

Al respecto se realizaron las siguientes preguntas: ¿Cuál es el valor mínimo para X?, ¿cuál es valor más grande para X? A este rango de valores que toma la variable aleatoria X se le llama RECORRIDO.

Con esta reflexión, los alumnos cayeron en la cuenta de que las calacas 1 y 2 no tenían ninguna oportunidad de salir de su casilla inicial. Los equipos construyeron la tabla de distribución de probabilidades (Tabla 2) también conocida como tabla de la función de densidad y la compararon con la tabla de frecuencias (Tabla 1) relativas para las veces que se movió cada calaca hasta que finalizó el juego.

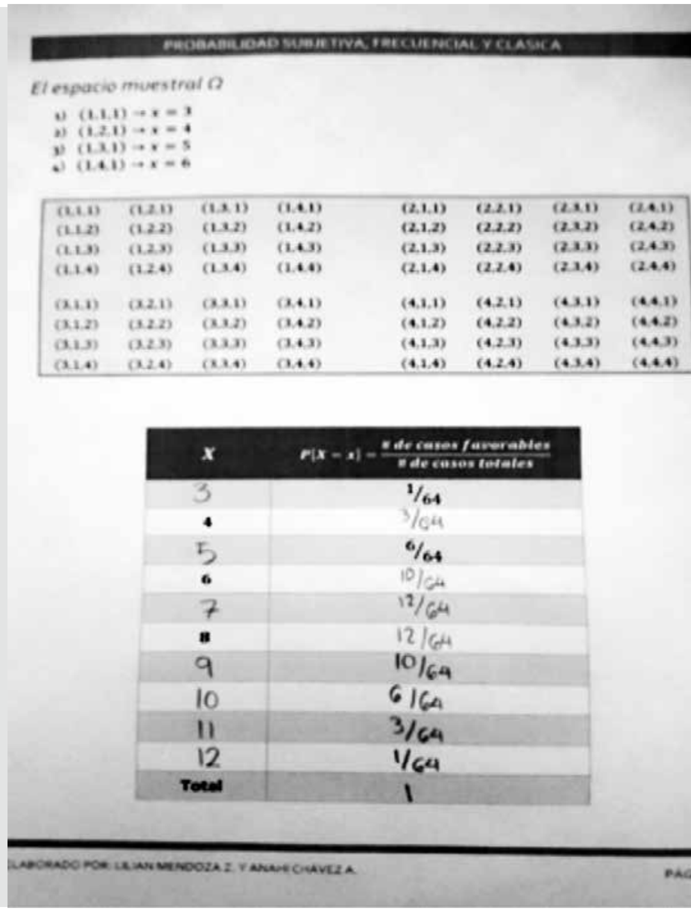
Enseguida se les pidió que contestaran las preguntas: ¿Coincidió esta tabla con la de frecuencias?, ¿por qué?, ¿cuál es valor mínimo que puede tomar P[X=x]?, donde X=x es cualquier evento ¿cuál es valor máximo que puede tomar P[X=x]?, ¿por qué?, ¿cuánto deben sumar las probabilidades de todos los valores de la variable aleatoria? y ¿qué calaca crees ahora que ganaría?

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

En general las respuestas fueron correctas y los alumnos se explicaron y aclararon dudas unos a otros, el nivel de argumentación entre ellos fue aceptable, ya que basaron sus razones en los valores del cociente de Laplace para cada valor posible de X; por lo que se puede afirmar que el trabajo colaborativo fue fundamental para lograr asimilar y apropiarse del contenido a aprender.

La estrategia contempló el tránsito de lo empírico a lo teórico y se consideró que era de suma importancia que el alumno fuera consciente de los diferentes enfoques de la probabilidad. Finalmente, se les explicó que el enfoque teórico tiene limitaciones, ya que asume que todos los elementos de Ω son equiprobables, además de ser finito y en la realidad hay muchos fenómenos aleatorios que no tienen estas características por lo que es necesario abordar el enfoque frecuencial.

El siguiente experimento para realizar en equipo quedó como tarea: en un recipiente con tapa coloquen 10 monedas de igual denominación y dénle un giro para simular 10 volados. Centren su atención en el evento "Cae águila", registren cuántas veces de 10 cayó águila, intentar lo mismo pero con 20, 30, 40, 100, 200, 300, 400, y 500 volados y graficar los resultados, y además anexar las respuestas de las siguientes preguntas: ¿Qué observas en tu gráfica?, ¿qué le pasa a la frecuencia relativa mientras más volados realizas? y, por último, escriban una definición formal para los conceptos: Probabilidad Subjetiva, Probabilidad Frecuencial y Probabilidad Clásica.



PROBABILIDAD SUBJETIVA, FRECUENCIAL Y CLASICA

El espacio muestral Ω

1) $(1,1,1) \rightarrow x = 3$
2) $(1,2,1) \rightarrow x = 4$
3) $(1,3,1) \rightarrow x = 5$
4) $(1,4,1) \rightarrow x = 6$

(1,1,1)	(1,2,1)	(1,3,1)	(1,4,1)	(2,1,1)	(2,2,1)	(2,3,1)	(2,4,1)
(1,1,2)	(1,2,2)	(1,3,2)	(1,4,2)	(2,1,2)	(2,2,2)	(2,3,2)	(2,4,2)
(1,1,3)	(1,2,3)	(1,3,3)	(1,4,3)	(2,1,3)	(2,2,3)	(2,3,3)	(2,4,3)
(1,1,4)	(1,2,4)	(1,3,4)	(1,4,4)	(2,1,4)	(2,2,4)	(2,3,4)	(2,4,4)
(3,1,1)	(3,2,1)	(3,3,1)	(3,4,1)	(4,1,1)	(4,2,1)	(4,3,1)	(4,4,1)
(3,1,2)	(3,2,2)	(3,3,2)	(3,4,2)	(4,1,2)	(4,2,2)	(4,3,2)	(4,4,2)
(3,1,3)	(3,2,3)	(3,3,3)	(3,4,3)	(4,1,3)	(4,2,3)	(4,3,3)	(4,4,3)
(3,1,4)	(3,2,4)	(3,3,4)	(3,4,4)	(4,1,4)	(4,2,4)	(4,3,4)	(4,4,4)

X	$P(X=x) = \frac{\text{\# de casos favorables}}{\text{\# de casos totales}}$
3	1/64
4	3/64
5	6/64
6	10/64
7	12/64
8	12/64
9	10/64
10	6/64
11	3/64
12	1/64
Total	1

LABORADO POR: LILIAN MENDOZA Z. Y ANAHI CHAVEZ A. PAGI

Conclusiones

Los cambios tecnológicos originados por la revolución de las TIC, han facilitado y enriquecido la creación de ambientes y herramientas, que adaptados a nuevas estrategias contribuyen a lograr aprendizajes significativos de contenidos que tienen sentido, son producto de procesos metacognitivos y pueden ser transferidos a contextos distintos, estas son las tres características de un aprendizaje significativo (Ferreiro, 2014).

La evaluación de esta actividad fue, en gran medida, cualitativa ya que durante la aplicación de la estrategia se pudo constatar que los alumnos sí asignaron un sentido al concepto de probabilidad como una medida de certidumbre sobre la ocurrencia de un evento o suceso, y cuyos valores están localizados entre 0 y 1. Otro punto a destacar es que valoraron la importancia del análisis de un modelo de probabilidad en la toma de decisiones.

La integración de las TIC en la estrategia didáctica se utilizó para crear un ambiente de aprendizaje con el cual los estudiantes se sintieron motivados. Gracias a estas herramientas es posible modificar la fase correspondiente al enfoque frecuencial, sustituyendo el experimento de los volados por la simulación de la carrera de calacas en un número considerablemente grande y aproximarse a las probabilidades teóricas calculadas en el enfoque clásico.

El juego "La carrera de las calacas" fomentó la motivación en el aprendizaje de la probabilidad al simular un contexto real, como son las carreras de caballos o las de autos.

Como consideración final se reitera que el trinomio motivación-juego-TIC favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje a través de prácticas innovadoras y significativas para los estudiantes.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C. (2007), Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. En *SUMA, Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, núm. 56. Recuperado de: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/SUMA_56.pdf>

Baroody, A.J. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*. España: Aprendizaje VISOR/MEC.

Batanero, C. (2004) *Didáctica de la Estadística*. España: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.

Carlos Núñez, J. (2009). Motivación, aprendizaje y rendimiento académico. En *Actas de X Congreso Internacional Galego-Portugués de psicopedagogía*. Recuperado de: <http://www.educacion.udc.es/grupos/gipdae/documentos/congreso/Xcongreso/pdfs/cc/cc3.pdf >

Ferreiro G. R. (2014). *Nuevas alternativas de aprender y enseñar*. México: Ed. Trillas.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las Matemáticas*. España:. Ed. Paidós.

González Peralta, A., Molina Zavaleta J.G., Sánchez Aguilar, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de los juegos en la enseñanza de las matemáticas. En *Educación Matemática*, núm. 26. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/405/40540689005.pdf

Paredes J., Dias de Arruda, R. (2012). La motivación del uso de las TIC en la formación del profesorado en educación ambiental. En *Ciencia & Educación*, V. 8. Recuperado de: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v18n2/a08v18n2.pdf>

Wilhelmi, M.R., (2004). *Combinatoria y Probabilidad. España*: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.

Razonamiento de los ESTUDIANTES de bachillerato FRENTE a un problema de regresión

Miguel Napoleón Medina Delgado/
Gabriel Esteban Olay Blanco/
Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Recibido: 17/02/2016
Aprobado: 20/03/2016

Resumen: En este artículo se hace una reflexión, a partir de las respuestas de los estudiantes a un problema de regresión lineal, sobre la importancia de destacar el aspecto estadístico en el diseño de la enseñanza de los temas de la materia. En particular se describen las enseñanzas que nos arroja analizar las respuestas de los estudiantes al problema: su creencia de que el problema es de cálculo y determinista; el papel de los recursos gráficos y la sub-utilización de los datos. Se concluye enfatizando la necesidad de ver a los problemas de estadística ubicados en situaciones de incertidumbre y no como problemas de cálculo.

Palabras clave: regresión lineal, razonamiento, enseñanza, incertidumbre.

Abstract: *This article is a reflection, from the student responses to a problem of linear regression, on the importance of highlighting the statistical aspect in the design of the teaching of the subject topics. In particular the lessons we analyze throws student responses to the problem are described: his belief that the problem is calculation and deterministic; the role of graphics resources and the underutilization of data. It concludes by emphasizing the need to see the problems of statistics located under uncertainty rather than calculation problems.*

Keywords: *linear regression, reasoning, learning, uncertainty.*

Introducción

La segunda Unidad de la asignatura de Estadística y Probabilidad I del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) se llama "Datos Bivariados" e incluye la *regresión lineal* y la *correlación*. Estos temas forman parte de casi cualquier programa de estudios de Probabilidad y Estadística de Bachillerato. Por otro lado, en la vida diaria y profesional las personas deben entender y tomar decisiones ante problemas relacionados con regresión y correlación; por ejemplo, frecuentemente se presentan preguntas como las siguientes: ¿el poder adquisitivo de la gente es la causa de la disminución en las ventas de una compañía?, ¿las bajas calificaciones de un estudiante en un examen son el resultado de pocas horas dedicadas al estudio?, ¿de qué forma se relaciona el tratamiento médico suministrado a un grupo de pacientes, con su recuperación de cierto padecimiento? o ¿existe relación entre la estatura de los hijos y la de los padres?; esta última pregunta representa un problema que históricamente dio origen a la idea de regresión (Gea, 2013: 5). El estudio de los temas de regresión y correlación debe ayudar a entender y responder este tipo de preguntas, como lo plantea Crocker (1981: 272): "Conocer si los sucesos se relacionan y, con qué intensidad lo hacen, facilita a las personas explicar el pasado, controlar el presente y predecir el futuro".

Desde hace tiempo algunos estudios (Estepa y Batanero, 1996: 36; Batanero, Estepa y Godino, 1997: 194) han mostrado que los estudiantes se dejan llevar por sesgos o concepciones erróneas ante problemas de asociación estadística, dichos autores mencionan las siguientes: a) Concepción determinista de la correlación, b) Concepción local de la correlación, c) Concepción unidireccional y d) Concepción causal; es de esperar que los alumnos de bachillerato eventualmente caigan en errores derivados de ellas. Por lo anterior, es importante que los profesores busquen formas alternativas de diseñar actividades con el fin de mejorar los procesos enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes; pero para que esto sea posible de manera efectiva, es importante que conozcan más cómo razonan espontáneamente frente a problemas de correlación y regresión. En este artículo informamos y reflexionamos acerca de los resultados de un estudio cuyo objetivo era explorar el razonamiento de los estudiantes frente a un problema de regresión.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

La regresión

En el análisis de regresión se estudia la posible relación entre una variable dependiente y otra u otras variables independientes, relación que se representa mediante un modelo matemático llamado la *ecuación de regresión*. Cuando esta ecuación es lineal respecto a un conjunto de parámetros se habla de *regresión lineal*. Por otro lado, la *correlación* es una medida de la intensidad de la relación entre dos variables la cual se expresa con un número llamado el *coeficiente de correlación*. Las relaciones precisas entre variables estadísticas generalmente son desconocidas y sólo se pueden estimar a partir de conjuntos de datos.

El problema

Una aplicación de un modelo de regresión es predecir aproximadamente el valor de una variable cuando se conoce el valor que toma la otra variable. Un problema de predicción accesible para los estudiantes es el siguiente (adaptado de Moore, 1998:106-107):

I El consumo de gas: La familia Morales está a punto de instalar paneles solares en su casa para reducir el gasto en la calefacción. Para conocer mejor el ahorro que puede significar la instalación de dichos paneles, los Morales han ido registrando su consumo de gas durante el último año y medio. En la tabla se muestran los datos con el promedio del consumo de gas y de la temperatura media ambiental de cada mes:

Mes	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jun
Temperatura (°C)	5.2	-9.8	-5.4	0.2	4.1	11.3	16.3	18.5	18.5
Gas (m3)	17.6	30.5	24.9	21	14.8	11.2	4.8	3.4	3.4
Mes	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr
Temperatura (°C)	18	15.2	11.8	1.8	0.7	-10.4	1.8	17.1	10.7
Gas (m3)	3.4	5.9	8.7	17.9	20.2	30.8	19.3	6.3	10.7

Según los datos mostrados en la tabla, responde:

a Si la temperatura media registrada en un mes es de 8 °C ¿Cuál es el consumo de gas esperado por la familia Morales en dicho mes? (Situación 1a)

b La familia registró un consumo de gas de 23 m3 en otro mes, ¿cuál fue la temperatura media ambiental de ese mes? (Situación 1b)

La solución formal de este problema consiste en encontrar la recta de regresión $y = mx + b$ y entonces para resolver el inciso "a", sustituir $x = 8$ en la ecuación y encontrar el valor de y. En cambio, dado un valor de $y = 23$ (inciso b) encontrar el valor de x no se obtiene simplemente sustituyendo, porque la relación no es necesariamente invertible (la temperatura es una causa de consumo de gas, pero el consumo de gas no lo es de la temperatura) (ver pormenores en Moore, 1998: 142). No obstante, asumiremos que es posible deducir una aproximación, a manera de indicador, simplemente encontrando el valor de x correspondiente a ese valor de y. Concretamente, el modelo de regresión lineal obtenido, es decir, la recta de regresión de los datos del problema, que se obtuvo con ayuda del software dinámico *Fathom*, es: $G = -0.938T + 20.7$. Entonces para el inciso "a" se tiene: G m^3 y para el inciso "b": T de donde al despejar la temperatura: $T = -2.45^o$ *C*. Entonces si la temperatura media del mes es de 8°C habrá un consumo aproximado de 13.19 m^3 de gas. Cuando hay un consumo de 23 m^3 se puede conjeturar que bajo ciertas condiciones es probable que la temperatura fuera muy baja, -2.45°C es sólo un indicador.

Los profesores sabemos la gran dificultad que representa la realización, por parte de los estudiantes, del anterior procedimiento y ubicamos, con buenas razones, que el núcleo de las dificultades es el cálculo de la recta de regresión. Es claro que cada profesor piensa y ensaya formas diferentes de hacer menos difícil para el estudiante el aprendizaje de los temas de asociación estadística. En nuestra opinión, la mayoría de esos intentos, que por supuesto son parte esencial de las actividades del profesor, carecen de hipótesis acerca de cómo razonarían los estudiantes acerca de la situación y cómo utilizarían los datos para dar una respuesta si simplemente se enfrentan a ella sin ninguna enseñanza previa específica sobre el tema. A muchos profesores les sorprende la pregunta ¿Cómo razonarían sus estudiantes si simplemente se les formula el problema sin ninguna enseñanza previa?. Muy probablemente la respuesta de cualquier profesor sería que los estudiantes no sabrán resolver el problema correctamente. No obstante, un enfoque constructivista de la enseñanza de las matemáticas considera que para que el profesor pueda diseñar la instrucción de algún tema de manera productiva, debe saber cómo razonarían sus estudiantes ante los problemas con los recursos que hasta ese momento han adquirido; éstos incluyen conocimientos específicos, pero también habilidades de razonamiento y actitudes ante los problemas y la materia. Los estudiantes del nivel ya han acumulado herramientas que deben estar en la base de los nuevos procedimientos que van a aprender y conviene saber de qué manera afloran cuando se enfrentan a los problemas. En resumen, la pregunta que debemos formular es ¿qué podemos aprender los profesores de los estudiantes?

Los autores nos hicimos la pregunta: ¿Cómo razonan los estudiantes frente al problema de predicción del consumo de gas sin que ellos hayan estudiado antes el tema de regresión lineal?. Por ejemplo, nos preguntamos si los estudiantes recurren a la idea de dibujar la nube de puntos y ver la tendencia de los datos. Si esto fuera así, constataríamos que la gráfica es una herramienta a la mano para los estudiantes. En caso de que no utilicen este recurso espontáneamente, si se les sugiere su uso ¿podrían avanzar en el problema? y de ser así ¿hasta dónde? Las respuestas a estas preguntas podrían ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2013

Se llevó a cabo una investigación que consistió en aplicar el problema del gas a dos grupos de Bachillerato: uno con 31 estudiantes de la escuela pública CBTIS, no. 204 en el estado de Michoacán y otro con 40 alumnos del CCH, plantel Vallejo en la Ciudad de México. Los estudiantes cursaban 5º y 6º semestre, respectivamente.

La aplicación se hizo en dos momentos (dos sesiones de 2 horas cada una); en el primero, se les proporcionó el problema del consumo de gas (como se presentó arriba) y se pidió que lo resolvieran echando mano de los recursos que creyeran conveniente; en el segundo momento, se les sugirió que trazaran la nube de puntos y ahora, con base en la gráfica, volvieran a responder las preguntas de los incisos "a" y "b".

Resultados

Expondremos brevemente los patrones generales de respuestas de los estudiantes sin describir de manera particular cada una de ellas. En el primer momento, ningún estudiante intentó graficar la nube de puntos para dar una respuesta. La casi totalidad de los estudiantes realizaron operaciones aritméticas (en el grupo del CBTIS se ubicaron 81.8% de respuestas y para el grupo del CCH un 82.5% en la situación y con respecto a la situación 1b, se tiene un 89.5% en el CBTIS y 81.1% en el CCH) para encontrar el valor pedido o bien respondieron verbalmente, pero de manera equivocada. Un hecho relevante es que, salvo dos excepciones, los estudiantes no involucraron en sus cálculos la totalidad de los datos. La mayoría de los procedimientos consistieron en elegir una pareja de datos para formar junto con el dato dado (8 en el inciso "a", y 23 en el inciso "b") un conjunto de 3 datos y entonces formular y resolver una proporción o regla de tres.

En el segundo momento, la totalidad de los estudiantes no tuvo problemas en trazar la nube de puntos. A pesar de esto, muchos volvieron a presentar en sus respuestas rasgos similares a las del primer momento, es decir, eligen una pareja y junto con el dato dado forman una terna de números con los que forman una proporción. Hubo, sin embargo, una clase nueva de respuestas en las que se pone en evidencia que algunos estudiantes (18.2% en el CBTIS y 17.5% en el CCH para la situación 1a y 10.5% en el CBTIS y 18.9% en el CCH para la situación 1b) ven en la gráfica el sentido de la relación, dicen por ejemplo "entre más calor menos consumo de gas". Esta relación no necesariamente la descubren los estudiantes mediante la gráfica, pero ninguno la formuló en el primer momento, sino sólo se presentaron casos en el segundo momento.

Discusión

¿Qué podemos aprender de las respuestas de los estudiantes? Las respuestas obtenidas propician varias reflexiones que pueden ayudar a diseñar mejor las actividades de enseñanza. Hemos destacado los siguientes puntos:

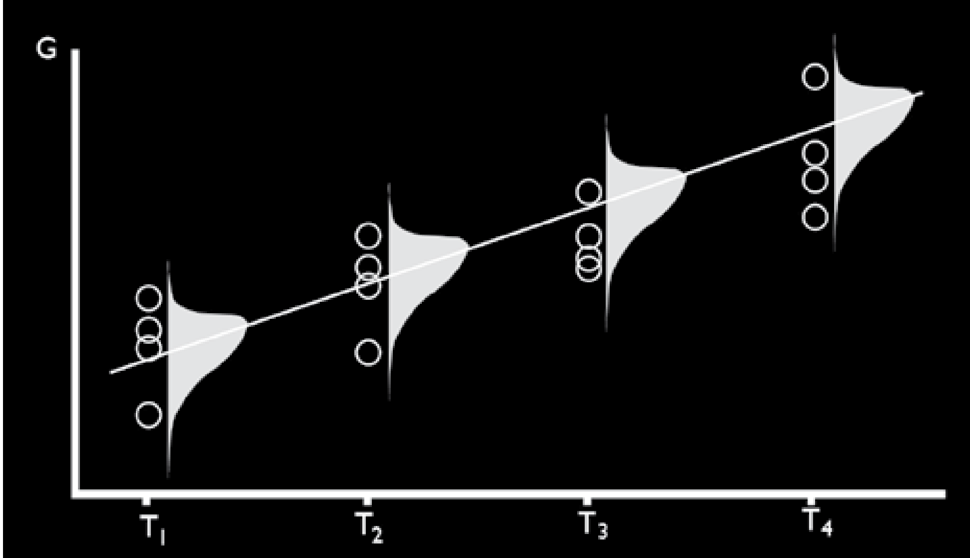
- Los estudiantes ven al problema de regresión como de proporcionalidad o, más en general, como problema de cálculo (incluso algunos profesores lo piensan así).

- La gráfica abre un poco las posibilidades de acercarse al problema propiciando que se formule en algunos casos la asociación general entre las variables.

- Los estudiantes tienen la dificultad de imaginar procedimientos que utilicen todos los datos.

A partir de que las respuestas de los estudiantes muestran que utilizan procedimientos de proporcionalidad para encontrar la solución del problema se puede deducir que ellos creen que es un problema sólo de cálculo y, por lo tanto, que la respuesta está determinada y es única. Debe tenerse en cuenta que esta idea permanecería en el estudiante, aunque supiera calcular la recta de regresión. Esto nos permite formular una pregunta y una reflexión; la primera es ¿cómo se debe entender el problema desde un punto de vista estadístico?; la segunda, consiste en revisar la creencia generalizada de que la dificultad del problema para los estudiantes se reduce a saber calcular la recta de regresión.

Con relación a la pregunta diremos que se debe tener en cuenta que cualquier resultado estadístico mantiene incertidumbre y, en consecuencia, no hay soluciones determinadas y únicas. El contexto del gasto de gas en relación con la temperatura se presta para desarrollar esta idea. El consumo de gas de una familia, en particular de los Morales, es influida por la temperatura, pero no tiene por qué estar determinada por ella; hay consumo de gas por otras circunstancias contingentes que no dependen de la temperatura, por ejemplo, al usar el horno para cocinar un pastel por el cumpleaños de un miembro de la familia. También puede haber ahorro de gas cuando la familia o algunos de sus miembros salen de vacaciones y no están en la casa por varios días. De esta manera se debe entender que la temperatura de 8°C no determina del todo cuánto gas se va a consumir; de manera análoga, que se hayan consumido 23 m^3 de gas no determina del todo la temperatura (Una fuga de gas no implica nada acerca de la temperatura). No obstante, uno de los factores que más influye en el consumo de gas es la temperatura, pues si hace mucho frío se utiliza más el agua caliente y se utilizan calentadores de gas; esto lo indican los datos dados. Se puede pensar que en condiciones ideales hay una relación afín entre Gasto de gas (G) y Temperatura (), es decir, de la forma: $G_i = aT_i + b$; pero debido a las contingencias que en gran medida se deben al azar la ecuación anterior se transforma en: $G_i = aT_I + b + e_i$, donde e_i es un valor aleatorio que se denomina "error". Este error suele variar de manera normal alrededor del cero, por lo que la siguiente representación ofrece una idea de cómo debiera pensarse la relación entre las dos variables perturbada por errores.



Ahora nos preguntamos: ¿Lo más difícil para los estudiantes es calcular la recta de regresión o entender el sentido del problema? Si el cálculo de la recta de regresión fuera la esencia del problema, la solución sería enseñar a los estudiantes el uso de una calculadora graficadora o un software estadístico, los cuales tienen la función de calcular la recta de regresión de un conjunto de datos. Al creer que lo sustancial de un problema como el anterior es encontrar la recta de regresión estamos suponiendo que la discusión conceptual detrás de ésta es transparente para los estudiantes. Si así fuera, el tipo de respuestas que habríamos recogido serían consideraciones como "no se puede saber con exactitud por…", o se hubieran calculado aproximaciones más plausibles, como la de elegir dos puntos alrededor del punto 8 y calcular el otro valor mediante interpolación (lo mismo para 23). Los resultados nos llevan a pensar que las verdaderas dificultades son conceptuales y no de cálculo; aunque ciertamente éstos no sean fáciles.

Los datos también nos revelan que para los estudiantes dibujar la nube de puntos para ver la tendencia de los datos no es un recurso que utilicen espontáneamente. No consideran que puedan avanzar en la solución del problema realizando la gráfica de los puntos. Probablemente, la utilización de la nube de puntos es frenada o inhibida por la creencia de que el problema se debe resolver mediante un cálculo. Fue necesario sugerir a los estudiantes que hicieran la gráfica, y dado que todos pudieron elaborarla, concluimos que contaban con este recurso. Una vez que trazaron la nube de puntos, algunos estudiantes percibieron cualitativamente la relación general de las variables "a menor temperatura, mayor gasto de gas". Pero ninguno asoció un procedimiento aritmético o algebraico que le permitiera hallar un valor utilizando esa relación general.

Como se ha indicado la mayoría de estudiantes que utilizaron métodos aritméticos eligieron un dato bivariado y con el 8 (o el 23) realizaron una proporción. Conviene enunciar una dificultad que se refleja en lo anterior: la inhabilidad de estos estudiantes para utilizar todos los datos. En el enunciado se dan 12 datos bivariados, ¿por qué creen que para resolverlo sólo deben utilizar uno? La razón puede ser su creencia de que el valor debe encontrarse mediante una regla de tres. Hay, sin embargo, respuestas de algunos estudiantes donde utilizaron todos los datos; consisten en obtener la media aritmética de los valores de la variable "gasto de gas" y la media aritmética de los valores de la variable "Temperatura". Con estos datos, junto con el 8 o el 23 se formula una proporción. Este procedimiento también es incorrecto, pero refleja un rasgo estadístico más avanzado al considerar las medias aritméticas de los valores de las variables y, con ello, incluir todos los datos en la propuesta de solución.

Conclusiones y Propuesta

Quizá el obstáculo más importante para darle sentido a los problemas de regresión, como el explorado en este trabajo, es verlos como situaciones de incertidumbre, es decir, que entre la multiplicidad de causas (el aumento o disminución de habitantes de la casa, el costo del combustible, cambio en los hábitos de consumo, etcétera) que producen un efecto, una de ellas es la predominante (temperatura media ambiental) y produce una tendencia, pero no lo hace de manera determinista porque las otras causas producen ligeras desviaciones. Entender y resolver los problemas en Estadística no es sinónimo de saber el procedimiento de cálculo para obtener una respuesta, sino de saber reflexionar sobre la situación en juego, manipular los datos con un objetivo preciso e interpretar los resultados teniendo en cuenta la incertidumbre. Para optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje de los temas de estadística, el profesor además de tener en cuenta lo anterior, debe explorar el pensamiento de sus estudiantes; pues partiendo de este conocimiento será capaz de proponerles formas adecuadas para transitar a niveles más altos de razonamiento estadístico.

Finalmente, los autores proponemos como puntos relevantes para el diseño de actividades de enseñanza: 1) Fomentar el trazado y uso de representaciones gráficas (diagramas de dispersión), se recomienda el uso de softwares y simuladores dinámicos; 2) Reconocer la importancia de las respuestas informales de los estudiantes; y 3) Considerar la presencia de conceptos clave como incertidumbre, variación y error en el diseño, por encima de los procedimientos de cálculo.

Referencias

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1997). Evolution of students´ understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En Garfield, J.B. y Burrill, G. (eds.). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers*. Voorburg: International Statistical Institute.

Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers. En *Psychological Bulletin*, Núm. 90.

Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: students´ intuitive strategies and preconceptions. En *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Núm. 4.

Gea, M. M., Batanero. C. y Cañadas, G. R. (2013). "Un estudio empírico de los problemas de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato." En *Actas III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga, Portugal: Centro de Investigacao em Educacao (CIEd). Universidade do Minho

Moore, D. S. (1998). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch editor.

"Me frustra no resolver un problema en el EXAMEN": Emociones en la clase de MATEMÁTICAS

María S. García González

Recibido: 19/02/2016
Aprobado: 26/03/2016

Resumen:
Siempre experimentamos emociones sin importar la actividad que estemos realizando debido a un hecho ineludible: son parte de la naturaleza humana. Este artículo tiene dos objetivos: el primero, es reflexionar sobre la importancia de las emociones en la clase de matemáticas, para ello se exponen los resultados de dos investigaciones que indagan al respecto; el segundo, es difundir la investigación sobre emociones desde la Matemática Educativa.

Palabras clave: afecto, emociones, matemáticas, matemática educativa.

Abstract:
We always experience emotions whatever the activity in which we engage, this situation is due to an inescapable fact: they are part of our human nature. This paper has two goals. The first one is to reflect on the importance of emotions in mathematics class, for this reason results from two researches about High school students' emotional experiences in mathematics classes are exposed. The second goal is to disseminate the emotion research findings from Mathematics Education.

Keywords: *affect, emotion, mathematics, mathematics education.*

Introducción

La Matemática Educativa (*Mathematics Education* en países anglosajones y en países europeos Didáctica de las Matemáticas) es la disciplina que tiene como objeto de estudio los fenómenos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas, se refiere al proceso de construcción de conocimientos basados en la instrucción, la experiencia, el razonamiento y la observación por parte de quien aprende. En este proceso indudablemente intervienen factores de diferente naturaleza: cognitivos, contextuales, culturales y afectivos, estos últimos son la motivación del presente escrito.

El afecto, o dominio afectivo, es el campo de investigación en Matemática Educativa referido al estudio de aspectos inherentes a lo humano, entre ellos, actitudes, emociones, motivación, creencias, etcétera, que influyen y van formando la vida escolar y social tanto de estudiantes como de profesores. El afecto tiene una alta influencia en la motivación académica y en las estrategias cognitivas (adquisición, almacenamiento, recuperación de la información, etcétera) y, por ende, en el aprendizaje escolar (Pekrun, 1992).

En años recientes la investigación sobre afecto y aprendizaje de las matemáticas ha crecido. En América Latina el tema más investigado son las actitudes hacia las matemáticas seguidas por las creencias, las emociones y la motivación. Los resultados de estos estudios han mostrado la influencia de dichos factores en su aprendizaje (García y Farfán, 2014).

En este escrito me centraré en exponer los resultados de dos investigaciones que indagan sobre las emociones que experimentan estudiantes de bachillerato, con base en ellas propongo una reflexión acerca de su importancia en el aula.

Las emociones en la clase de matemáticas

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Muchos de nuestros éxitos o fracasos son determinados por las emociones que experimentamos, la clase de matemáticas no es la excepción, tanto el profesor como los estudiantes las tienen aunque muchas veces no estén conscientes de ellas, es tan normal sentirlas forman parte de la vida diaria académica.

El salón de clases es una microcultura que norma el comportamiento de sus actores y podría decirse que hasta su sentir. A través de una investigación han sido evidenciados el estrés, la desmotivación, el abandono de la profesión y el síndrome de Burnout que experimentan los docentes (Schutz y Zembylas, 2009). La realidad de los estudiantes no dista mucho y si hablamos de matemáticas las emociones negativas son las más abundantes. Entre ellas, el aburrimiento de quienes no tienen interés en la clase, la decepción de los que no son capaces de resolver un problema o la congoja ante los exámenes son algunas de las realidades que a diario viven estudiantes de todos los niveles educativos (García y Farfán, 2014, 2015; Martínez-Sierra y García-González, 2014, 2015, 2016; Larkin y Jorgensen, 2015; Lewis, 2013; Goldin, Epstein, Schorr y Warner, 2011).

En el siguiente apartado se muestran los resultados de dos estudios cuyo objetivo fue conocer las emociones de estudiantes mexicanos de bachillerato (para mayores detalles se recomienda recurrir a sus publicaciones originales).

Emociones de estudiantes de bachillerato en la clase de matemáticas

Estudio 1: Experiencias emocionales de estudiantes de bachillerato en las clases de matemáticas

En este estudio se identificaron las emociones de 22 estudiantes (hombres y mujeres de 16 y 19 años) del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 8 (CeCyT 8) "Narciso Bassols" del Instituto Politécnico Nacional en el área de Ciencias Físico-Matemáticas (Martínez-Sierra y García-González, 2014). En el momento de la investigación se encontraban recursando la asignatura de Geometría Analítica y estaban inscritos en los semestres tercero y quinto de las cuatro distintas carreras que ofrece este centro de estudios.

Elegimos trabajar con esta población bajo el supuesto de que al ser estudiantes con mayores experiencias de reprobación en matemáticas, sus emociones hacía la asignatura serían más agudas a diferencia de los que no han pasado por esta situación.

La recolección de datos se llevó a cabo mediante entrevistas en grupos focales y el análisis se realizó utilizando la Teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony, Clore y Collins, 1996). En esta teoría se considera a las emociones como "reacciones de valencia a eventos, agentes u objetos" (Ortony et. al., 1996: 16). Estos autores proponen una clasificación de 22 tipos de emociones y con base en ella se realizó el análisis de los datos.

Las preguntas planteadas en los grupos focales fueron: ¿cómo te sientes en la clase de matemáticas?, ¿cómo te sientes cuando puedes o no puedes resolver un problema de matemáticas?, ¿cómo te sientes al presentar un examen de matemáticas? y ¿cómo te sientes cuando apruebas o no un curso de matemáticas?

Las experiencias emocionales obtenidas en el estudio se muestran en la Tabla 1.

Situación desencadenante	Tipo de emociones	Variables que afectan la intensidad
Clase de matemáticas	Miedo/Alivio	Esfuerzo Probabilidad
Resolver/No resolver problemas	Satisfacción/Decepción	Realización
Presentar un examen Clase de matemáticas	Júbilo/Congoja Aburrimiento	Esfuerzo Deseabilidad Excitación
Resolver problemas en el pizarrón No resolver problemas en el pizarrón	Orgullo/Autoreproche	Fuerza de la unidad cognitiva Desviación de las expectativas

Tabla 1. Experiencias emocionales de los estudiantes. Estudio 1.
Fuente: Martínez-Sierra y García-González, 2014.

A manera de ejemplo me centraré en las emociones de satisfacción y decepción encontradas que fueron asociadas a resolver problemas. La primera surgió cuando el estudiante fue capaz de resolver un problema, la segunda cuando no. El estudiante H2-G1 comentó al respecto:

> H2-G1: "Pues cuando puedo [resolver un problema], *me siento bien*, hasta quiero pasar [al pizarrón] a resolver el problema, lo resuelvo y sale bien, pero por ejemplo cuando estoy resolviendo algo que ni siquiera vi o no sé qué es eso, pues *no me siento bien*."

Las emociones de satisfacción fueron afectadas por diferentes variables, una de ellas es el esfuerzo que se manifestó cuando el profesor otorgaba "participaciones" (puntos favorables en la evaluación del estudiante) por resolver un problema, lo que provoca que el estudiante se esforzara por obtenerlas. El estudiante H5-G2 dijo que cuando esto sucedía deseaba que el profesor les encomendara más problemas, de esta manera él podría conseguir más participaciones:

> H5-G2: Yo siento satisfacción conmigo mismo al resolver un problema y las participaciones me motivan más y hasta quiero que pongan otro problema.

Las emociones de decepción se vieron afectadas por la variable de realización, que depende de la importancia otorgada a resolver problemas, por ejemplo, lograr resolver un problema es más importante durante el examen que en la clase. La estudiante M1-G3 comentó al respecto:

> M1-G3: En clase no me frustra no poder resolverlo [un problema], en el examen me frustra, porque sé que mi calificación depende del examen.

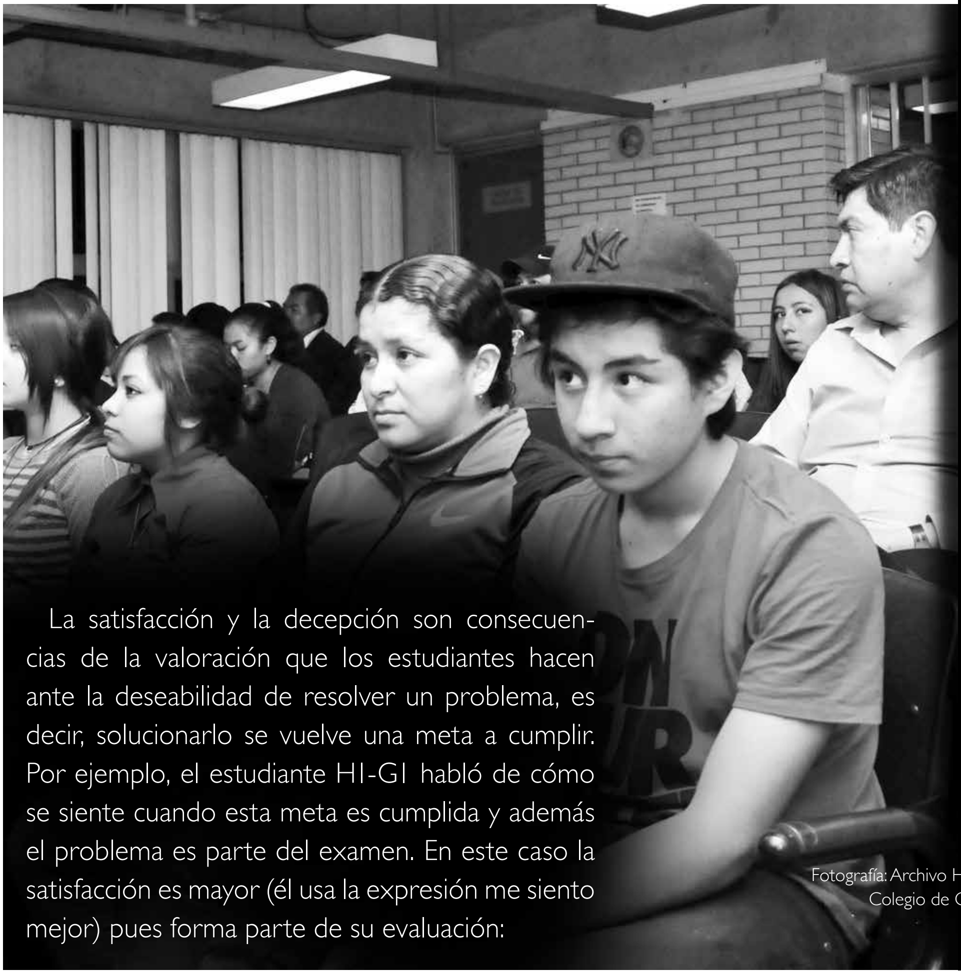
Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

Estudio 2: Emociones de estudiantes de bachillerato en la clase de matemáticas: Valoraciones en términos de una estructura de metas

En este estudio (Martínez-Sierra y García-González, 2015) se decidió indagar las emociones de estudiantes del mismo centro escolar que el primero pero se eligieron sólo estudiantes regulares. Participaron 53 estudiantes (29 hombres y 24 mujeres, de 16 y 18 años) inscritos en el cuarto semestre que cursaban Cálculo Diferencial. La recolección de datos y la forma de realizar el análisis fue igual que en el estudio 1. Cabe mencionar que en ninguno de los dos estudios se tuvo en cuenta la variable de género en el análisis de datos.

Las preguntas formuladas en los grupos focales fueron las del estudio 1 más las siguientes: ¿qué sentimientos o emociones experimentas cuando aprendes o no aprendes matemáticas?; ¿qué sentimientos o emociones experimentas cuando un profesor de matemáticas está explicando? Las experiencias emocionales que se obtuvieron en este estudio (ver tabla 2) son mayores en número a las encontradas en el estudio 1.

Al comparar las emociones de ambos estudios nos dimos cuenta que persisten situaciones que las desencadenan pero dependiendo de las valoraciones de los estudiantes pueden ser del mismo tipo o no; tal es el caso de las emociones de satisfacción, orgullo, gusto y júbilo al resolver problemas.



La satisfacción y la decepción son consecuencias de la valoración que los estudiantes hacen ante la deseabilidad de resolver un problema, es decir, solucionarlo se vuelve una meta a cumplir. Por ejemplo, el estudiante H1-G1 habló de cómo se siente cuando esta meta es cumplida y además el problema es parte del examen. En este caso la satisfacción es mayor (él usa la expresión me siento mejor) pues forma parte de su evaluación:

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

> H1-G1: Me siento mejor si el problema es de un examen [habla acerca de poder resolver el problema] ya que el resultado realmente cuenta {influencia de la deseabilidad}.

Cuando la meta no es cumplida se desencadena la decepción. En el caso del alumno H4-G8 la intensidad de la emoción de decepción aumentó considerablemente, pues tuvo repercusiones fisiológicas como dolor de cabeza.

> H4-G8: Me enojo, siento estrés y dolor de cabeza {variable de excitación} si no soy capaz de resolver un problema, porque no puedo llegar a una solución.

En el caso de la estudiante M2-G8 la variable de esfuerzo influyó en la intensidad de su emoción, pues no dejó el problema sin resolver, le preguntó a su maestro y compañeros de clase para solucionarlo, no se rindió.

> M2-G8: Cuando no soy capaz de resolver un problema, entonces me pregunto qué hacer porque yo no entiendo nada… pido ayuda a mi maestro o a un compañero de clase {esfuerzo}.

Situación desencadenante	Tipo de emociones	Variables
Poder o no resolver un problema	Satisfacción/decepción	Esfuerzo, probabilidad
No entender	Miedo	
Aprender o no en clases No pasar un examen No entender la explicación del profesor	Aburrimiento	Deseabilidad
Clase no dinámica Entender la explicación del profesor	Interés	
Actitud positiva del profesor Estar motivados a poner atención Que la clase termine	Júbilo	
Resolver problemas en el pizarrón No poder resolver un problema en clase o en el examen	Congoja	No deseabilidad
Pasar al pizarrón Pasar las materias Resolver un problema	Orgullo	
No poder resolver un problema	Reproche	
No poder resolver un problema	Autoreproche	Desviación de las expectativas
Entender las matemáticas	Gusto	
Poder resolver un problema No poder resolver un problema	Disgusto	

Tabla 2. Experiencias emocionales de los estudiantes. Estudio 2.
Fuente: Martínez-Sierra y García-González 2015.

A manera de reflexión

Los resultados de las investigaciones antes expuestas muestran que los estudiantes, regulares o no, experimentan emociones similares en la clase de matemáticas. La importancia de estos estudios es que evidencian situaciones comunes de la clase de matemáticas (situaciones desencadenantes) que son las que propician las emociones de los estudiantes.

Sentir o no una emoción, así como su intensidad, depende de las valoraciones individuales ante determinadas situaciones. En la valoración influyen, como se mostró, las metas que cada estudiante tiene en la clase de matemáticas. Al parecer el cumplimiento o no de dichas metas origina que se experimenten determinadas emociones en la clase. Como ejemplo considérense los casos de los estudiantes H4-G8 y M2-G8 de la sección anterior, ambos experimentaron decepción al no poder resolver un problema, podemos decir que la meta, que es la misma, no se alcanza, pero las intensidades con que ambos experimentaron la decepción fue diferente; en el primer caso hay consecuencias fisiológicas como el dolor de cabeza, en el segundo se busca ayuda extra para poder resolver el problema.

Diariamente en la clase de matemáticas se desencadenan emociones positivas y negativas y en función de cómo nos sentimos nos comportamos, preferimos ser tratados de una manera u otra, toleramos o nos enojamos, nos motivamos o no. La importancia de conocer qué desencadena las emociones de los estudiantes así como la emoción misma es lo que nos aportan. Todas las emociones tanto negativas como positivas nos dicen algo respecto a cómo estamos viviendo la clase de matemáticas.

Gracias a ellas podemos conocer los gustos de los estudiantes, sus estilos de aprendizaje, sus intereses y, por tanto, si conocemos qué desencadena una emoción podemos hacer intervenciones para propiciar condiciones favorables para el aprendizaje. Esto también puede influir en nuestras prácticas pedagógicas y favorecer las relaciones estudiante-profesor y estudiante-estudiante.

Referencias

García, M.S. (2014). *Una caracterización de actitudes hacia las matemáticas desde una perspectiva socioepistemológica.* (Memoria Predoctoral no publicada, Cinvestav-IPN. México.

García, M.S. y Farfán. R.M. (2015). "Actitudes de estudiantes de secundaria hacia el trabajo con situaciones de aprendizaje". En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, núm. 28. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y. y Warner, L. B. (2011). "Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning". En *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, núm. 43*.

Larkin, K. y Jorgensen, R. (2015). ´I hate Maths:Why do we need to do Maths?' Using iPad video diaries to investigate attitudes and emotions towards mathematics in year 3 and year 6 students. En *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. En *Research in Mathematics Education*, Núm. 15.

Martínez-Sierra, G. y García-González M.S. (2014) "High school students› emotional experiences in mathematics classes. En *Research in Mathematics Education*, núm. 16.

Martínez-Sierra, G. y García-González, M.S. (2015). Students' emotions in the high school mathematics classroom: The appraisals in terms of a structure of goals. En *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Martínez-Sierra, G. y García-González, M.S. (2016). Undergraduate Mathematics Students' Emotional Experiences in Linear Algebra. En *Educational Studies in Mathematics*, núm. 91.

Ortony, A., Clore, G. L. y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez, traducción). México: Siglo XXI.

Pekrun, R. (1992). The Impact of Emotions on Learning and Achievement: Towards a Theory of Cognitive/Motivational Mediators. En *Applied Psychology: An International Review*, núm. 41.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

INDICIOS de prueba MATEMÁTICA mediante el USO de SOFTWARE de Geometría Dinámica

Miguel Ángel Huerta Vázquez

Recibido: 19/02/2016
Aprobado: 20/03/2016

Resumen:
Esta investigación indagó cómo los estudiantes de nivel medio superior dan indicios en la prueba matemática, mientras iban solucionando algunos problemas geométricos, usando software de geometría dinámica *GeoGebra*: qué hicieron, cómo advirtieron posibles soluciones a estos problemas, y lo más importante, cómo los explicaron o validaron y al final cómo el software ayuda para poder alcanzar cierto grado de validación.

Palabras clave: software de geometría dinámica, prueba matemática, *GeoGebra.*

Abstract:
This research investigates how students of high school give evidences of mathemathical proof, while they were solving some geometric problems using dynamic geometry software GeoGebra: what they did, how they warned possible solutions to these problems, and most importantly, how they explained or they validated and finally how the software helps to achieve a certain degree of validation.

Keywords: *dynamic geometry software, mathematical proof, GeoGebra.*

Introducción

Una de las piezas más importantes que influye en el aprendizaje de las matemáticas es la prueba de las diversas proposiciones inherentes a esta disciplina, ya que sin el conocimiento de cómo se construye y qué es la prueba, no se puede aprender matemáticas (Balacheff, 2010). En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, la prueba constituye una herramienta poderosa para que el alumno pueda sustentar de manera más adecuada el conocimiento que adquiere y logre aprender bases matemáticas cada vez más sólidas. En educación matemática, se entiende como prueba de una proposición (afirmación o teorema) al encadenamiento de afirmaciones (parciales, tomadas como verdaderas) que validan la afirmación (o negación de algo), sin embargo, hay distintos tipos de pruebas matemáticas; cada una de ellas tiene características especiales.

En sus primeros trabajos de investigación sobre la prueba matemática, Balacheff (1987) discutió la diferencia entre distintos conceptos que pueden ser confundidos con una prueba. En seguida son parafraseadas las ideas de Balacheff (2000) sobre estos conceptos:

- Explicación: implica dar a conocer la verdad a partir de una propuesta o de un resultado.
- Probar: es exponer una verdad a partir de una evidencia aceptada por la comunidad, la cual puede ser refutada.
- Demostrar o demostración: tiene reglas formales y definidas a la hora de presentar pruebas, las cuales están sustentadas en criterios lógicos rigurosos igualmente aceptados por la comunidad matemática, donde el rigor es mucho mayor que en una prueba.
- Razonamiento matemático: es la actividad, que no se explicita y que sirve para manipular la información y para producir nueva, pero cuando dicha actividad busque como fin asegurarse de la validez de una proposición y ayude a producir una explicación; a estas acciones se les asocia el proceso de validación de esa aseveración.

También, Balacheff (2010) retoma sus investigaciones anteriores y propone un marco conceptual para analizar la prueba. Este investigador argumenta que la explicación está contenida en la prueba, y ésta a su vez está contenida en la demostración. Balacheff llega a la conclusión de que existen tres componentes alrededor del concepto de prueba: la acción, la formulación y la validación, por lo que no hay validación posible si no está bien expresada y compartida. Esta trilogía figura situaciones didácticas dentro del contexto del trabajo de Brousseau (1997), ya que se puede enmarcar dentro de las situaciones a-didácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento matemático.

En las últimas décadas, la llegada de las computadoras al entorno cotidiano y, en particular, a la educación ha propiciado que la enseñanza de temas geométricos con el uso de software de geometría dinámica sea un poco más amigable que sólo usar lápiz y papel como medio para enseñar conceptos de geometría euclidiana. Por ejemplo, el uso del software, como herramienta de enseñanza, propicia el uso de representaciones dinámicas de objetos matemáticos, mientras que el uso de lápiz y papel en la enseñanza propicia el tratamiento de objetos matemáticos estáticos.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

El software de geometría dinámica (SGD) tuvo su origen en la década de los 80, el cual servía en aquel tiempo como análogo al lápiz y papel, ya que permitía replicar los problemas de manera similar de como se hacen con regla y compás, haciendo construcciones rígidas; con el paso de tiempo, diversos softwares, como: *Geometer's Sketchpad* y *Cabri-Geometry* evolucionaron de tal manera que las construcciones geométricas podían ser dinámicas. Al usar el software de geometría dinámica, el alumno puede dinamizar las contrucciones en lápiz y papel. Esta forma dinámica de objetos matemáticos producidos por los distintos tipos de software disponibles en la actualidad (e.g., *GeoGebra, Geometer's Sketchpad* y *Cabri-Geometry*, entre otros) da una visión diferente de los distintos objetos matemáticos, a través de sus representaciones, al permitir "ver" cómo se preservan las relaciones entre esos objetos y así poder explicar y probar aseveraciones de enunciados geométricos.

Marco Teórico

Utilizando las ideas de Brousseau (1997) de la teoría de situaciones didácticas, Balacheff (2010) postula que las concepciones son el resultado de interacciones del alumno con el medio ambiente (*milieu*), y que el aprendizaje es tanto un proceso como un resultado de la adaptación del alumno a este entorno. Por "medio ambiente", se refiere a un entorno físico, un contexto social o incluso un sistema simbólico (sobre todo ahora que este último puede ser representado por una tecnología que se materializa dinámicamente).

Una concepción, define Balacheff (2010), es un saber situado, en otras palabras, es la creación de instancias de un saber en una situación específica que se detalla por las propiedades del medio y de las restricciones en las relaciones (acción/feedback) entre este medio y el sujeto $[S \longleftrightarrow M]$ (véase Figura 1).

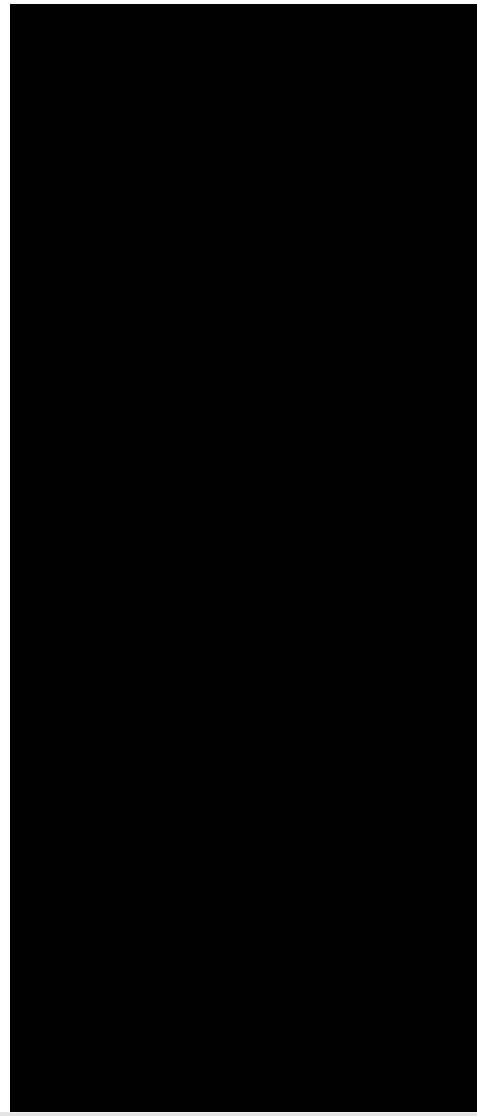
Figura 1. Relación entre el sujeto y el medio.

Con esa definición de concepción Balacheff define el modelo ck¢ para el análisis del conjunto de datos obtenidos de la observación de las actividades de los estudiantes; el cual tiene como objetivo establecer un puente necesario entre el saber y probar al proporcionar un papel equilibrado para controlar las estructuras respecto a la función asignada generalmente a las acciones y representaciones.

Balacheff (2010) afirma que la prueba es la actividad más visible dentro del proceso de la validación. Hasta cierto punto, "probar" puede ser visto como un logro imprescindible de control y validación el cual es fundamental, ya que nadie puede pretender saber sin comprometerse en la validez de un conocimiento adquirido.

A cambio, este conocimiento funciona como un medio para establecer la validez de una decisión en el curso de la realización de una tarea e incluso en el proceso de construcción de nuevos conocimientos, especialmente en el proceso de aprendizaje. En este sentido, conocer y probar están estrechamente relacionados. Por lo tanto, una concepción es la validación dependiente; en otras palabras, es posible diagnosticar la existencia de una concepción porque hay un dominio observable en el que "funciona", en el que hay medios para validarlo y para impugnar las posibles falsificaciones.

Con lo anterior, Balacheff postula un modelo similar al de Verganud (1981: 220, citado en Balacheff, 2010), pero le agrega la estructura de control, quedando una caracterización de la concepción en cuatro componentes (P, R, L, $\sum$), donde:



- P es un conjunto de problemas: este conjunto corresponde a la clase de los desequilibrios del sistema considerado sujeto/medio ambiente $[S \longleftrightarrow M]$ puede reconocer, en términos matemáticos. Dichos problemas pueden ser resueltos en términos pragmáticos, P es la esfera de la concepción de la práctica.
- R es un conjunto de operadores.
- L es un sistema de representación: R y L describen el ciclo de retroalimentación en relación al sujeto y el medio, es decir, las acciones, las evaluaciones y los resultados.
- $\sum$ es una estructura de control: En la estructura de control se describen los componentes que apoyan el seguimiento del equilibrio del sistema de $[S \longleftrightarrow M]$, esta estructura garantiza la coherencia de la concepción, además, incluye las herramientas necesarias para tomar decisiones y expresar un juicio sobre el uso de un operador o sobre el estado de un problema (es decir, resuelto o no).

Sobre el control afirma que:

"Esta categoría de comportamiento se ocupa de la forma en que las personas utilizan la información potencialmente a su disposición. Se centra en las principales decisiones sobre qué hacer en caso de un problema, las decisiones que en sí mismos pueden 'hacer o deshacer' un intento de resolver el problema. Comportamientos de interés como la elaboración de planes, la selección de objetivos y sub-objetivos, el seguimiento y la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan, y revisar o abandonar planes cuando las evaluaciones indican la adopción de tales medidas." (Schoenfeld, 1985: 27).

Balacheff (2010) sostiene que el aprendizaje de las matemáticas empieza desde los primeros años de la escuela, en este nivel dependen de su experiencia y del profesor para poder distinguir entre sus opiniones y su conocimiento real. Para poder diferenciar entre aquello que se opina del conocimiento que poseen, los estudiantes deben basarse en la eficacia tangible del conocimiento y de la validación del profesor, respecto de la prueba de algo. Pero, el profesor tiene a su vez que confiar en el conocimiento (utilizado por él o por sus estudiantes, cuando es movilizado con fines de prueba de una cierta proposición), lo que demuestra que no es la última referencia. Por lo tanto, la eficiencia y la evidencia tangible (de la utilización del conocimiento con fines de prueba matemática) son los soportes para la validez de una declaración. Balacheff (2000) afirma que es cierto porque funciona, además declara que los estudiantes matemáticos, antes que nada son prácticos, pero para poder entrar a las matemáticas tienen que cambiar dicha postura para poder convertirse en teóricos.

Balacheff (2010) indica que la estrecha relación entre la acción, la formulación (sistema semiótico) y validación (estructura de control) se impone ampliando las ideas de Brousseau (1997). Esta trilogía que define una concepción también da forma a una situación didáctica, no hay validación posible sin un reclamo que no se ha expresado de manera explícita y compartida, y no hay ninguna representación sin una semántica que emerge de la actividad (es decir, de la interacción del alumno con el medio matemático).

Metodología

La investigación es de corte cualitativo. Tomando en cuenta la información respecto de este tipo de estudios, de cómo fueron seleccionados los participantes en esta investigación. Se debe mencionar que al inicio de ésta, se preseleccionaron diez estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre los 15 y 16 años y en el momento de la experimentación se encontraban cursando el tercer semestre en una institución de educación media superior. Se les pidió que resolvieran los primeros dos problemas (construcciones geométricas relacionadas con el problema de Apolonio, que más adelante, en este mismo capítulo se enuncia) seleccionados. Con base en su desempeño en el uso del *GeoGebra* se seleccionaron cinco estudiantes para que solucionaran los problemas restantes.

Tomando en cuenta la literatura de investigación, referente a los problemas de construcción, usando regla y compás, en este trabajo se decidió tomar en cuenta cinco problemas, los cuales pertenecen a casos particulares del problema de Apolonio de Praga (262-190 a.C.). La selección de estos cinco problemas fue tomando en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes seleccionados,

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

pues se debía tener certeza de éstos estuvieran «cerca» de aquellos tanto en la construcción geométrica solicitada como en su justificación de porqué ella es válida. De forma general, el problema de Apolonio puede ser enunciado de la siguiente manera: "Dadas tres circunferencias arbitrarias en el plano, construir otra circunferencia que sea tangente a ellas" (Courant y Robins, 2002: 147).

Se recolectaron dos tipos de evidencias: los archivos de su trabajo para solucionar los problemas y la grabación de sus acciones (justificaciones) mientras los solucionaban. Para los primeros, se les pidió que terminando de solucionar los problemas, guardaran su trabajo al usar *Geogebra* como herramienta de solución de los mismos. Para lo segundo, se usó el software *screencasting* (grabación digital de la salida por pantalla de la computadora) donde se grabó en video lo que hacían con el *Geogebra* y en audio lo que decían mientras eran interrogados acerca de sus acciones (justificación de porqué hacían algún trazo en particular) mientras solucionaban los problemas.

Resultados

Los estudiantes al iniciar el estudio mostraban deficiencias de conocimientos geométricos en el momento de hacerles preguntas específicas acerca de definiciones puntuales como, por ejemplo, la mediatriz o condiciones de perpendicularidad; sin embargo, el uso del software los apoyó a construir definiciones emergentes que les ayudaron para encontrar solución a los problemas propuestos. Para poder resolverlos era necesario que ellos tuvieran los conocimientos mínimos necesarios que les hubieran permitido llevar a cabo las acciones para llegar la solución. Existe evidencia de que tanto el software como las actividades (problemas) pueden ayudar a que los estudiantes construyan definiciones geométricas que les permitan construir soluciones para éstos.

Conclusiones

Es claro que uno de los principales obstáculos que los estudiantes tuvieron para lograr soluciones correctas, en todos los problemas aquí propuestos, está en que no tenían los conocimientos necesarios, aunque sus cursos previos a la presente investigación indicaban lo contrario.

Por otro lado, también es claro que los estudiantes no estaban acostumbrados a actividades que involucren la prueba matemática como tal. El primer curso donde los estudiantes se enfrentan a la prueba matemática es en su segundo semestre. De manera informal, se sabe que en actividades previas al presente trabajo, habían estado involucrados en una formación académica relacionada con la prueba matemática. El hecho de que en cursos de matemáticas de bachillerato no se contemple la discusión sobre los primeros indicios de una prueba matemática, contribuye a generar obstáculos conceptuales en los estudiantes, o tal vez, sean generados por una mala didáctica de los profesores responsables de los cursos de matemáticas de ese nivel educativo.

Como consecuencia de esta falta de atención, por parte de las autoridades educativas responsables del buen aprendizaje de las matemáticas de bachillerato, al no contemplar discusiones con los estudiantes tendientes a que ellos empiecen a entender el sentido de una prueba matemática, la mayoría de los estudiantes de bachillerato estarán bastante lejos de poder resolver problemas como los propuestos en este trabajo de investigación.

De las reflexiones precedentes, se infiere que para trabajos futuros sería conveniente diseñar y proponer actividades encaminadas a provocar básicamente en los estudiantes dos habilidades: a) poder explicarse a sí mismos, o bien, a otro de sus compañeros de clase y b) mediante el uso de herramientas tecnológicas, ser capaces de adoptar o adaptar definiciones de conceptos involucrados en los problemas propuestos; de modo que después, al abordar ciertas tareas matemáticas, ellos entiendan y reflejen (en sus procesos de solución) el uso de la prueba matemática en problemas cada vez más complejos.

Referencias

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. (K. A. Publishers, Ed.). En *Educational Studies in Mathematics*, Núm.18.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school. (D. Pimm, Ed.) . En *Hodder and Stoughton*.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990*.

Balacheff, N. (2000). *Proceso de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. En G. Hanna, H. N. Jahnke, y H. Pulte (Edits.), *Explanation and Proof in Mathematics*. Springer.

Battista, M., y Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. En *Mathematics Teacher*, Núm. 88.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school. (D. Pimm, Ed.) . En *Hodder and Stoughton*.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*. En Kluwer Academic Publishers*.

Courant, R., y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica.

Coxeter, H. S. (1989). *Introduction to Geometry*. Wiley.

Hohenwarter , M., y Lavicza , Z. (2011). The Strength of the Community. En *ModelCentered Learning.* SensePublishers.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. En *Academic Press, Inc*.

La estrategia didáctica en la enseñanza y APRENDIZAJE de LAS MATEMÁTICAS

Gustavo Adolfo Ibarra Mercado

Recibido: 20/02/2016
Aprobado: 8/03/2016

Sólo el vínculo entre aprendizaje y metodología de enseñanza le permitirá al docente implementar estrategias diferentes, con la meta última de "favorecer las condiciones del aprendizaje".

Ángel Díaz Barriga

Resumen:
En el texto se revisan algunos factores a considerar antes de diseñar una estrategia didáctica, así como algunas situaciones que dificultan la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación media superior.

Palabras clave: matemáticas, estrategia didáctica, enseñanza-aprendizaje.

Abstract:
In the text some factors to consider before designing a teaching strategy are reviewed, as well as some of the situations that hinder the teaching and learning of mathematics in high school.

Key Word: *mathematics, teaching strategy, teaching and learning.*

La dificultad en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, particularmente en educación básica y media superior, es un asunto conocido y reconocido en el ámbito nacional e internacional[1]; una verdad de Perogrullo, aunque no por ello trivial, su origen es multifactorial. Las causas se extienden desde las políticas públicas centradas en educación y las condiciones socioeconómicas y culturales de los

1 Las pruebas de aplicación masiva promovidas por organismos internacionales y nacionales dan cuenta de las limitaciones que los alumnos tienen en el conocimiento, comprensión y uso de las matemáticas. "… los resultados de PISA 2012, muestra que prácticamente uno de cada cuatro estudiantes de 15 años en los 34 países de la OCDE no alcanzan el nivel básico de desempeño en por lo menos una de las tres áreas que PISA evalúa: lectura, matemáticas y ciencias."; ésta misma determinó que "55% de los estudiantes de México tuvo un bajo rendimiento en matemáticas (media OCDE: 23%). (…) "Pisa define estudiantes de "bajo rendimiento" como aquellos que puntúan por debajo del Nivel 2…" (OCDE 2016). El resultado 2008 de la prueba ENLACE, aplicada a alumnos del último grado de bachillerato arroja que 84.4% de los jóvenes evaluados en matemáticas se ubican en los niveles de dominio "insuficiente y elemental"; en la aplicación 2014 el porcentaje disminuyó a 60.7%. Aun cuando estos instrumentos han recibido críticas fundamentadas, no dejan de ser un referente que ofrece una visión de la situación imperante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Otro ejemplo lo encontramos en los exámenes diagnósticos que la Facultad de ingeniería ha aplicado a sus nuevas generaciones (Cfr. Barrera, s.f.).

niños y jóvenes hasta la capacidad y actitud del alumno para aprender matemáticas, pasando por la habilidad del docente para diseñar e instrumentar estrategias didácticas que propicien aprendizajes significativos.

Atender el mosaico de problemas en cada grupo y alumno rebasa el radio de acción del docente; habrá quien tenga la posibilidad u oportunidad de actuar en más de uno, pero difícilmente en la totalidad. La dimensión en que no sólo es posible actuar sino es necesario hacerlo, por parte del conjunto de profesores que tienen bajo su responsabilidad el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es la didáctico-pedagógica.

El docente debe reflexionar constructivamente sobre su propia práctica, asumir una postura autocrítica, como se anticipa en el epígrafe, a partir de contrastar el aprendizaje logrado en los alumnos y los procedimientos de enseñanza empleados, con el fin de situar en su justa medida resultados tanto favorables como desfavorables y justipreciar los factores que dieron origen a los mismos. Grave daño hace el docente que se deslinda del bajo aprovechamiento escolar de sus alumnos y lo atribuye a la deficiente formación previa y apatía de éstos, sin reconocer el influjo que su propia actitud y labor didáctica tuvo en esos resultados.

Esa introspección le permitiría al profesor revalorar la trascendencia de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje que coordina. Apreciaría que la didáctica es más que un término con una significación vacía, empleado coloquialmente para adjetivar aspectos relacionados con lo escolar, omitiendo o ignorando su valor como fundamento de una práctica pedagógica. Es posible que esa reflexión crítica derive en la conformación de ambientes de aprendizaje sustentados en las características de los destinatarios y el nivel educativo en cuestión, donde se despierte interés y se promuevan actitudes positivas ante el estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

La tarea no es fácil, habrá que empezar por preguntarse: ¿para qué enseñar/aprender matemáticas?, ¿qué utilidad tienen en la vida cotidiana?, ¿cómo se vinculan con el resto de las ciencias?, ¿en el hecho educativo se deben presentar como herramienta o como campo de reflexión teórica?, ¿por qué se le dificulta a la mayoría de los alumnos su aprendizaje? Interrogaciones que por su obviedad suelen contestarse *a priori*. No obstante, la respuesta que exigen se ubica en lo socioeducativo, en ningún momento pretende cuestionar la importancia de las matemáticas como ciencia, por lo que se requiere responderlas en lo individual a fin de prefigurar la visión del profesor en la formación del joven que, por ejemplo, se inclina por estudiar la carrera de Literatura Dramática y Teatro.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2014

En la deliberación de lo propuesto conviene tener presente que un rasgo de las matemáticas es que son un lenguaje y como tal configura, una forma de pensar, percibir e interactuar con el entorno. Aprender matemáticas, va más allá de memorizar fórmulas y secuencias rígidas, implica el conocimiento de un código, de un léxico, la comprensión de su gramática y su "ortografía", supone un cambio en la manera de entender el mundo, incluso la conformación de una visión innovadora que lo transforme. Como la lengua materna, su adecuada enseñanza y aprendizaje conforma estructuras mentales que permiten entenderla y emplearla en la vida cotidiana; en contraste, una errónea enseñanza y pobre vinculación con la cotidianidad del educando redunda en limitaciones cognitivas.

Otro aspecto a considerar es el conocimiento del estudiante: ¿quién es el sujeto que está frente a mí?, ¿cuáles son sus características cognitivas, psicológicas, socioafectivas y culturales?, ¿cómo fue su formación previa?, ¿qué conocimientos de matemáticas tiene?, ¿son correctos?, ¿está en posibilidad de tener un desempeño adecuado en el curso?, ¿cuáles son sus actitudes e intereses frente al aprendizaje de las matemáticas?, en cuanto a habilidades cognitivas ¿cuál es el nivel de desarrollo que posee? La información y conocimiento obtenido mediante estas interrogantes da pauta para conformar un diagnóstico que orientaría el diseño de estrategias didácticas.

Generalmente, la evaluación diagnóstica se ha circunscrito a la identificación de contenidos declarativos: conceptos, ideas y procedimientos memorizados. Sin observar la pertinencia de los mismos y la forma en que son concebidos por el estudiante, a pesar de la importancia que revisten en la construcción de nuevos conocimientos. En este escenario, el docente se limita a establecer lo que el alumno "sabe" para, en el mejor de los casos, asignarle actividades adicionales que lo "regularicen" u ofrecer asesoría complementaria; reitero, sin escudriñar en la forma como ha construido y utiliza esos conceptos, ideas y procedimientos.

Los falsos conceptos tienen su origen en una comprensión equívoca, provocada, en un significativo número de casos, por una enseñanza incorrecta atribuible a limitaciones formativas del docente. Los profesores de educación primaria se formaron para guiar el aprendizaje en matemáticas, español, ciencias naturales y ciencias sociales, principalmente, sin necesariamente ser especialistas en alguna disciplina, lo que deriva en conocimientos confinados a lo estrictamente elemental y al desconocimiento de principios, reglas o métodos matemáticos sustanciales en la comprensión y empleo de procedimientos contemplados en el nivel medio superior y superior.

Por ejemplo, hay quien encomienda al alumno que resuelva secuencias de operaciones como $34 + 6 \div 8 - 2 \times 6$ y acepta 18 como respuesta correcta ignorando el orden en que deben resolverse operaciones de este tipo. El estudiante así lo asimila y lo repite en situaciones análogas en sus cursos de secundaria o bachillerato, con la consecuente nula obtención de un puntaje y sin que el profesor en turno averigüe la razón de tal falla. Cuestionar al alumno sobre el procedimiento que lo llevó a obtener ese resultado es una táctica sencilla que permite identificar errores de conceptualización y, por tanto, corregirlos.

La ausencia del razonamiento en los primeros años escolares del joven también representa un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas en ciclos posteriores. En la mayoría de las situaciones, se privilegia la memorización y la acumulación irreflexiva de datos, fórmulas y procedimientos rígidos. La demostración es discursiva, pocas veces vinculada a la realidad del alumno[2].

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

2 En este punto es importante señalar que el planteamiento de problemas o la referencia a situaciones concretas no necesariamente son hechos que se vinculen con la realidad del alumno. Son escenarios potenciales de interacción, mas no espacios de su cotidianidad. Al tener que relacionar un modelo abstracto a una circunstancia para él desconocida, el aprendizaje se torna aún más complejo.

En primaria, al niño se le "enseña" que el algoritmo de la multiplicación de fracciones comunes es el producto del numerador por el numerador y el denominador por el denominador, en tanto que en la división las multiplicaciones son cruzadas: numerador por denominador y denominador por numerador. No se le guía para que construya conocimiento. Lo mismo sucede con el "aprendizaje" de casi la totalidad de los contenidos matemáticos, cuando se ve en la necesidad de utilizarlos, recurre a la memoria para recordarlos, en vez de establecer la lógica que subyace en ellos para re-construirlos.

Es probable que el estudiante de bachillerato demuestre la fórmula para la obtención del área de un cuadrado, un rectángulo y un triángulo, sin embargo se le dificultará la demostración en el caso de un rombo, cuando su fórmula se puede deducir a partir de un rectángulo. O bien, sería un conflicto para él responder por qué la fracción común resultante de $1/5 \times 1/6$ es "menor" que la fracción obtenida de dividir los mismos números ($1/5 \div 1/6$). La inexistencia de un razonamiento impide que el estudiante responda adecuadamente y destaque lo capcioso del cuestionamiento.

Esa ausencia generalizada de reflexión en educación básica, no sólo en matemáticas sino en todas las áreas del conocimiento, limita y retarda (si es que en algún momento se alcanza) el desarrollo de la etapa cognitiva denominada por Piaget como de las operaciones formales[3], nivel necesario para la comprensión, aplicación y valoración de los contenidos que se abordan en la educación media superior y superior; ante ello, el alumno recurre a la técnica que asimiló y estereotipó: aprendizaje por repetición y memorización, lo que representa otro gran reto para el profesor en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Por lo anterior, en la construcción de una evaluación diagnóstica se requiere identificar el grado de desarrollo de habilidades necesarias para el estudio y aprendizaje de las matemáticas. En el examen diagnóstico de ingreso, aplicado a una generación de principios de este siglo, el Colegio de Ciencias y Humanidades determinó algunas de esas habilidades: razonamiento inductivo, análisis visual, solución de problemas, razonamiento deductivo,

3 "El pensamiento formal alcanza su plenitud durante la adolescencia. El adolescente, por oposición al niño, es un individuo que reflexiona fuera del presente y elabora teorías sobre todas las cosas, complaciéndose particularmente en las consideraciones inactuales. (…) Este pensamiento reflexivo, característico del adolescente, tiene nacimiento hacia los 11-12 años, a partir del momento en que el sujeto es capaz de razonar de un modo hipotético-deductivo…" (Piaget, 1983:163).

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2016

operatividad aritmética y operatividad algebraica, las dos últimas las ubicó como destrezas. En cada caso precisó si la habilidad o destreza estaba nada, poco, regularmente o suficientemente desarrollada[4]. Como en este caso, la institución juega un papel relevante de apoyo, pues probablemente se le dificulte al profesor de bachillerato diseñar un instrumento como el sugerido.

El conjunto de información y conocimientos hasta aquí contemplados ofrece un sustento para iniciar el diseño de estrategias didácticas. Negar, ignorar o excluir el contexto socioeducativo del estudiante, sus rasgos distintivos individuales y generacionales, la forma en cómo ha construido su conocimiento, además de los fines de la institución en donde se está adscrito, reduce la elaboración de estrategias a un mero listado de acciones susceptibles de aplicar en cualquier momento y lugar, centradas más en la demostración matemática (la cual no se descarta) que en un proceso didáctico para la construcción de un conocimiento.

Incluso, más que concebir una forma didáctica para el desarrollo de un contenido matemático acorde a la situación educativa en la que se encuentran, hay profesores que consciente o inconscientemente reproducen la manera en que aprendieron en educación superior. Su técnica predominante es expositiva[5],

---

4 En el plantel Oriente del Colegio de Ciencias y Humanidades (UNAM), con el fin de que se utilizara para la planeación y desarrollo de los cursos de primero y segundo semestres de esa generación, la información fue proporcionada a los respectivos profesores a través de la Secretaría de Asuntos Estudiantiles.

5 Es importante subrayar que existe una relación estrecha entre la práctica docente y la manera en que se comprenden las matemáticas; al respecto destacan la pertinencia de "plantearse las siguientes preguntas: ¿A qué didáctica conduce una cierta concepción de la matemática y del conocimiento matemático? ¿A qué concepción de la matemática y del conocimiento matemático obedece una cierta práctica educativa?" (Moreno y Waldegg, 1998: 28)

se inclinan por esta forma de "enseñanza" debido a la facilidad que representa en contraste con la formulación de una estrategia. La participación del alumno se reduce a la resolución de ejercicios en el pizarrón o en su cuaderno de notas.

Sólo después del análisis de los factores descritos, focalizándolos en el contexto propio, se estaría en la posibilidad de elaborar estrategias didácticas que promuevan la construcción de un conocimiento permanente en el alumno. Hasta este momento se estaría en condiciones de comprender la importancia y utilidad de propuestas didácticas tanto genéricas como centradas en el aprendizaje de las matemáticas. En este instante y no antes es cuando conviene revisar métodos y técnicas de enseñanza-aprendizaje como las sugeridas por Díaz Barriga y Hernández (Díaz Barriga y Hernández, 2002).

Estrategias didácticas diseñadas por los pares son un adecuado punto de referencia y valiosa aportación para conocer otras visiones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de ellas se puede retomar alguna secuencia, material o ejemplo. Las estrategias son singulares, se conciben para escenarios particulares, por lo que su empleo en las condiciones propias, aun cuando provenga de la misma institución escolar, exige conocerlas y comprenderlas en su conjunto, valorando la pertinencia de cada una de sus sugerencias. Su carácter flexible permite que un nuevo usuario las adecue a las condiciones imperantes en un grupo académico, lo desafortunado sería una aplicación puntual, cada profesor tendrá que "imprimir" su sello personal.

De entre los procedimientos estratégicos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas destaco la narrativa. Por medio del relato histórico, el alumno tiene la posibilidad de apreciar los avatares a los que se enfrentó un pensador para arribar a una idea trascendente, o bien, el proceso de construcción que se siguió a lo largo de la historia de la humanidad para articular lo que actualmente se conoce. Cuevas y Díaz ofrecen un ejemplo de este método en el artículo "La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función" (Cuevas y Díaz, 2014).

El método de mayor recurrencia es la resolución de problemas, corresponde a una de las "líneas de desarrollo metodológico" en el programa de estudios de Matemáticas en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH, s.f: 3). Debido a su importancia y empleo generalizado es pertinente resaltar la importancia de observar y emplear adecuadamente las reglas de uso de la lengua materna en la redacción de los problemas. La ambigüedad o imprecisión del texto impide una correcta comprensión del contenido y provoca que el alumno no conjeture sobre lo que el profesor pretende, elevándose la posibilidad de un error.

Una vez concluida la aplicación de la estrategia didáctica se deben evaluar sus resultados, algunos criterios a considerar serían: establecer el impacto que tuvo en la construcción de un conocimiento, identificar los aspectos susceptibles de cambiar o corregir, ubicar los factores que limitaron o potenciaron esos resultados, describir la respuesta de los alumnos, señalar si se favoreció el desarrollo de una habilidad cognitiva y contrastar el estado inicial del alumno con el final, lo anterior con el objetivo de distinguir algún cambio. La consecuencia de este ejercicio valorativo derivaría en una mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las reflexiones expuestas tienen la intención de mostrar que una estrategia didáctica no sólo es una secuencia de acciones, es una propuesta de trabajo en donde se deben considerar factores contextuales e individuales, tanto del profesor como del alumno, para estructurar ambientes deliberativos que propicien aprendizajes significativos. Tal vez esto contribuya a reducir la reprobación, el rezago escolar y el desinterés por el estudio de las matemáticas.

Fotografía: Archivo Histórico Fotográfico del Colegio de Ciencias y Humanidades, S.C.I., 2014

Referencias

Barrera García F. (s.f.). *Las matemáticas y el abandono escolar*. Recuperado de <http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/ponencias/55.pdf> de diciembre de 2015.

Caballero, A. y Blanco L. J. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Comunicación presentada en el grupo de trabajo "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor", en el *XI Simposio de Investigación y Educación Matemática* (Universidad de La Laguna, 4 al 7 de septiembre). Recuperado de <http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/anacaba.pdf> de noviembre de 2015.

CCH (s.f.). *Programa de Estudios de Matemáticas. Semestres I a IV*, México: UNAM / CCH / Área de Matemáticas. Recuperado de <http://www.cch.unam.mx/programasestudio> de diciembre de 2015

Cuevas Vallejo, C. A. y Díaz Gómez J. L. (2014). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. En *El Cálculo y su enseñanza*, vol. 5, año 2013-2014, Revista del CINVESTAV-IPN. Recuperado de <http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=5&index_web=11&index_mgzne> de noviembre de 2015.

Díaz Barriga, A. (2009). *Pensar la didáctica*. Buenos Aires: Amorrortu editores.

Díaz Barriga Arceo, F. y Hernández Rojas G (2002). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo*. México: Mc Graw Hill.

Moreno Armella, L. y Waldegg G. (1998). Constructivismo y educación matemática. En SEP. La enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria*. Lecturas*. México.

OECD (2016). *Estudiantes de bajo rendimiento: por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito*. Resumen México. Recuperado de <http://www.oecd.org/centrodemexico/medios/PISA%20Low%20Performing%20Students%20Press%20Handout%20MEXICO%20FINAL.pdf> de febrero de 2016.

Piaget, J. (1983). *La Psicología de la Inteligencia*. España: Crítica/Grijalbo.

SEP (2014). *Resultado Nacional Enlace 2014. Último grado de bachillerato*. Recuperado de <http://www.enlace.sep.gob.mx/> de diciembre de 2015.

EUTOPÍA

REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO

CONVOCA

EUTOPÍA, revista indexada y arbitrada de la UNAM, invita a los docentes del Colegio de Ciencias y Humanidades, a los académicos universitarios y profesores de instituciones del Nivel Medio Superior del país, a participar con artículos inéditos en el número 25 (julio-diciembre 2016) con el tema:

Didáctica de las ciencias experimentales

Los textos que se envíen deberán reunir las siguientes características:

- Ser inéditos, tener como mínimo tres cuartillas y no exceder de ocho.
- Archivo digital en Word, con fuente Arial de 12 puntos e interlineado a 1.5.
- La fuente de las citas textuales deberá indicarse con base al sistema APA: el primer apellido del autor, el año de publicación de la fuente y el número de la página donde se extrajo la cita: (Gadotti, 1998: 148).
- La referencia bibliográfica se anotará al final del trabajo de la siguiente forma: Gadotti, M. *(1998). Historia de las Ideas Pedagógicas*. Brasil: Siglo XXI.
- Los artículos deberán ir acompañados de un resumen en español y el *abstract*, además de incluir palabras clave en español e inglés.
- Los autores pueden anexar fotos, grabados, gráficos, cuadros o figuras que ilustren el texto, citando de forma obligatoria su fuente y considerando que no se tengan derechos reservados. La resolución de las imágenes debe ser de 200 dpi mínimo con formato jpg., con un tamaño de media carta.
- Los artículos presentados serán sometidos a evaluación. La recepción y revisión de un trabajo no implica ningún compromiso para su publicación.
- En otro archivo con formato Word, se incluirán los datos del autor: nombre completo, grado académico, incluyendo la institución donde lo obtuvo, adscripción (plantel y materia que imparte), número telefónico, correo electrónico y una síntesis curricular que no exceda de cinco líneas.
- Los trabajos deberán enviarse al correo electrónico eutopiacch@yahoo.com.mx dirigido a Arcelia Edith Ugarte Jaime, responsable.

Fecha límite para la recepción de artículos
2 de septiembre del 2016

EUTOPÍA

REVISTA DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PARA EL BACHILLERATO