Presentación

Las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral I y II, optativas del Área de Matemáticas que se ofrecen en los semestres quinto y sexto del Plan de Estudios, ofrecen a los estudiantes la oportunidad de construir los conceptos y métodos del Cálculo a partir del estudio sistemático de fenómenos de variación y acumulación. En esta perspectiva, los aprendizajes en relación a la cantidad y la forma adquiridos en los cuatro primeros semestres, se amplían y son sustento para los propósitos señalados.

Para el bachiller es el primer acercamiento a esta importante rama de las Matemáticas. El nivel de conocimiento que adquiera, enriquecerá la formación de su pensamiento matemático y así enfrentará con éxito los estudios superiores que realice.

Respecto a las consideraciones para organizar y dirigir la actividad cotidiana en el aula, en la que el aprendizaje del alumno es la actividad rectora, se propone como idea sustantiva darle significado a los conceptos, técnicas y procedimientos con base en el estudio de situaciones problémicas en diferentes contextos de aprendizaje, en las que el Cálculo es una herramienta fundamental para su entendimiento, análisis, y solución, con el propósito de que sea capaz de resolver problemas, abstraer, establecer conjeturas y encontrar el sentido de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral.

Dada la creciente importancia de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como un medio en la construcción de un ambiente de experimentación en el aula, deben ser consideradas para la puesta en práctica de los programas de estudio; esto contribuirá al desarrollo del pensamiento matemático desde otras perspectivas.

Finalmente, la formación que se adquiere con base en los procesos de enseñanza y de aprendizaje que le dan identidad a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, debe contribuir a la construcción sólida de las bases conceptuales que permitan a los egresados continuar sus estudios universitarios.

Enfoque disciplinario

La selección de los conceptos, técnicas y métodos del Cálculo Diferencial e Integral para ser incorporados a los programas, toma en cuenta: el carácter propedéutico y terminal en la formación del alumno, la concepción de la Matemática como disciplina científica y la caracterización de los objetos de estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

En primer término, respecto a la formación del alumno, se toma en cuenta la necesidad de proporcionarle conocimientos suficientes para enfrentar con éxito sus estudios superiores; además de comprender y resolver con mejores recursos culturales diversas situaciones de la vida cotidiana y dotarlo de estrategias de aprendizaje y capacidades analíticas que le permitan superar las exigencias que el trabajo productivo demanda.

En segundo término, no menos importante para dicha selección, es la interpretación de las Matemáticas como disciplina científica. Al respecto se considera que:

a) Las Matemáticas son un cuerpo de conocimiento lógicamente estructurado que estudia las relaciones cuantitativas y de forma de objetos abstractos que surgen de analizar situaciones concretas mediante procesos y razonamientos cada vez más depurados.

b) En los procesos de descubrir y construir el conocimiento matemático se reconoce la importancia de la búsqueda intuitiva, los titubeos, el tanteo, las suposiciones, las dudas e incluso los errores.

c) Como área de conocimiento destaca que el carácter abstracto y general de conceptos y métodos le genera un gran potencial de aplicaciones.

d) En sus métodos y estructura aparece el rigor lógico como componente indispensable para aceptar como válidas sus afirmaciones, lo que obliga a proporcionar una rigurosa demostración de éstas.

e) En sus usos y aplicaciones se relaciona con otras ciencias lo que se manifiesta con una vinculación más estrecha con los procesos tecnológicos.

Un tercero y último aspecto, la caracterización de los objetos de estudio del Cálculo Diferencial e Integral, considera que esta rama de las Matemáticas se articula a partir de dos ideas fundamentales, la variación y la acumulación. Dos representaciones significativas de estas ideas, que le dieron origen, se refieren a la solución de problemas en los ámbitos geométrico y físico. En el aspecto geométrico, son la obtención de la recta tangente a una curva y la obtención del área bajo una curva; en el escenario de la Física es la modelización de la velocidad cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado y la obtención de la distancia recorrida cuando se conoce la velocidad.

Para la concreción de estas dos ideas centrales, la variación y la acumulación, que se traducen en los conceptos fundamentales del Cálculo, la derivada y la integral, se incorporan otros conceptos, técnicas y métodos que se describirán posteriormente al presentar los propósitos de cada curso; al respecto es pertinente hacer las siguientes precisiones:

- Si bien el concepto de función es el sustento para la derivada y la integral, no se incorpora como un tema de estudio de estos programas dado que en cursos anteriores, principalmente en el curso de Matemáticas IV, se ha trabajado con bastante amplitud y profundidad. Emplearlas en el contexto de los conceptos de derivada e integral permitirá profundizar en la comprensión del concepto de función.
- Se reconoce que el concepto de límite es fundamental para una construcción completa del Cálculo, pero al considerar que es un primer acercamiento al estudio de esta disciplina y a la experiencia y conocimientos adquiridos en los primeros cuatro semestres, se optó por realizar un acercamiento a la idea esencial del límite a partir de procesos infinitos dado que permiten reconocer la tendencia, estabilización y la posibilidad de predicción de valores y

comportamientos de las variables involucradas, para enfrentar desde esta perspectiva, el estudio de la derivada y la integral.

- Aun cuando la percepción intuitiva de la continuidad de una función ha permeado en el desarrollo de los cursos anteriores, al trabajar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones, este concepto no forma parte explícita de la temática; la justificación obedece a que en este primer acercamiento a las ideas esenciales del Cálculo es posible llevarlo a cabo con esa percepción intuitiva, lo cuál posibilitará la apropiación formal de este concepto en cursos de Cálculo en sus estudios en el nivel superior, si éstos así lo demandan.

Considerando que la materia de CálculoDiferencial e Integral ofrece al bachiller un primer acercamiento sistemático a esta disciplina, y tomando en cuenta el propósito de su formación, las características de las matemáticas como disciplina científica y el objeto de estudio del Cálculo Diferencial e Integral, la selección del contenido disciplinario se orienta bajo las siguientes premisas:

- Desarrollar el sentido del Cálculo Diferencial e Integral, mediante la comprensión de diferentes situaciones que se modelan con las herramientas de esta disciplina, así como con el establecimiento de conexiones con otros contextos matemáticos y otras disciplinas científicas
- Identificar el carácter abstracto de los conceptos de variación y acumulación, a partir de analizar diferentes contextos del ámbito matemático y de otras disciplinas en los que surgen dichos conceptos.
- Apropiarse de conceptos, técnicas y procedimientos propios del Cálculo Diferencial con el propósito de enriquecer el análisis de diversas situaciones tanto del ámbito matemático como el de otras disciplinas.
- Enriquecer el razonamiento matemático al desarrollar métodos que están presentes al aplicar los conceptos, técnicas y procedimientos del Cálculo Diferencial e Integral.

En resumen, la selección del contenido disciplinario se rige con la siguiente orientación general:

> Con base en la identificación de carácter abstracto de las ideas de variación y acumulación, darle sentido a los conceptos, técnicas y procedimientos del Cálculo Diferencial e Integral.

Enfoque didáctico

En este apartado se plantea un conjunto de consideraciones para organizar y dirigir la actividad cotidiana en el salón de clases. Inicialmente se identifican rasgos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, en particular del Cálculo, posteriormente se proporcionan elementos para interpretar a la resolución de problemas como método del pensamiento matemático que se debe privilegiar, se continúa señalando los atributos a tomar en cuenta para incorporar las TIC como herramienta de aprendizaje y se concluye con la identificación de elementos que permiten estructurar el proceso de enseñanza que posibilite la apropiación de los aprendizajes.

Para caracterizar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, esencialmente se toma en cuenta que el Modelo Educativo del Colegio reconoce la importancia de que el estudiante sea capaz de apropiarse y construir nuevos conocimientos, y que la Matemática es una disciplina en constante desarrollo en la que aprender matemáticas debe estar íntimamente relacionada con la participación activa del estudiante en la construcción de resultados matemáticos; en dicha participación, es relevante la disposición de plantear y resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas, esto es, desarrollar matemáticas, proceso en el que es muy importante encontrar el sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir sus conexiones con otras ideas.

Aprender matemáticas, y en particular Cálculo Diferencial e Integral, es un proceso en el que se desarrolla una disposición y forma de pensar con el propósito de que el estudiante desarrolle un pensamiento y lenguaje variacional a través de un proceso continuo de resolución de problemas, donde se busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas y se argumente su validez, utilicen diferentes sistemas de representación, establezcan conexiones, y comuniquen sus resultados.

Al considerar que para la formación del estudiante del bachillerato del CCH es relevante privilegiar, la apropiación y construcción de los conceptos matemáticos, es conveniente insistir que el planteamiento y solución de problemas debe ser el hilo conductor para organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones (problemas o conceptos) que demandan, en los procesos de comprensión y solución, el empleo de recursos y estrategias matemáticas.

Para la puesta en práctica el método de la resolución de problemas, se propone el desarrollo de un método indagador o interrogativo, también conocido como inquisitivo[1] que le permite al estudiante conceptualizar a las matemáticas como un conjunto de dilemas o preguntas que se representan, exploran y responden a partir de recursos, estrategias y formas de razonar que son consistentes con el quehacer de la disciplina.

Para establecer los niveles de extensión y profundidad en la apropiación de los conceptos y procesos matemáticos implementando el método interrogativo (inquisitivo), es conveniente distinguir tres contextos de aprendizaje: a) contexto puramente matemático: el referente en donde se desarrolla la situación involucra solamente aspectos matemáticos, b) contexto del mundo real: en esta situación, el entendimiento del problema se relaciona con la identificación de variables de la situación real y c) contexto hipotético: la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de la variable o parámetros que explican el desarrollo de la situación.

[1] Diccionario de la Real Academia Española: “Que inquiere y averigua con cuidado y diligencia las cosas o es inclinado a ello”.

El trabajo organizado con base en la resolución de problemas le posibilitará al estudiante el desarrollo de habilidades matemáticas, entre las que destacan: *Estimación* (identificar el rango de valores en los que puede estar un resultado, redondear cantidades para facilitar operaciones y contar así con una apreciación del resultado de las mismas); *Generalización* (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); *Formalizar "Material Matemático* (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); *Reversibilidad de Pensamiento* (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); *Flexibilidad de Pensamiento* (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); *Visualización Espacial* (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada).

El tercer aspecto a considerar en la organización y conducción de las acciones en el salón de clases, es la incorporación de las TIC con el propósito de enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. El acceso social a esta tecnología, en sus distintas manifestaciones, teléfonos celulares, tabletas electrónicas, computadoras, reproductores digitales de audio y video, servicios de la Web, redes sociales o plataformas educativas, entre otras, nos lleva a considerar su incorporación al aula. Además, resultados en el ámbito de la investigación educativa contribuyen a la consecución de dicho propósito. A continuación se señalan consideraciones para utilizarla:

- La posibilidad de almacenar, compartir y presentar información en distintos formatos, voz, texto, imágenes datos, de manera simultánea, así como el procesamiento y transmisión de esta información en diferentes modalidades, libros electrónicos, apuntes interactivos, blogs, entre otros, permite acercamientos novedosos a los conceptos del Cálculo.
- Ofrecer la posibilidad de formular y explorar hipótesis y conjeturas de tal suerte que la escuela no sea solamente un lugar donde los conocimientos se transmitan, sino también se construyan.

- Organizar actividades en el proceso de resolución de problemas que promueven el pensamiento matemático del alumno al tener la posibilidad de trabajar en la solución desde diferentes perspectivas.
- Representar objetos matemáticos dinámicamente a partir de la identificación de propiedades y relaciones de objetos particulares que son difíciles de pensar o identificar en aproximaciones que se realizan sin este recurso.
- La representación dinámica de objetos matemáticos, permite explorar relaciones entre variables en una configuración geométrica, mediante diferentes aproximaciones (gráfica o numérica) sin que se tenga que establecer de forma explícita relaciones algebraicas entre las variables involucradas en el problema.

En resumen, la incorporación de las TIC, permitirá promover las habilidades en el uso de la tecnología, favorecer la incorporación de los avances actuales en el ámbito escolar y enriquecer el método de resolución de problemas y la consolidación del pensamiento crítico en el alumno.

Finalmente, las consideraciones respecto a la interpretación del aprendizaje de las matemáticas privilegiando el proceso de resolución de problemas, sustentado en diferentes contextos de aprendizaje, así como el uso de las TIC, para su concreción en el aula, es importante la implementación de las estrategias propuestas, considerándolas como actividades a realizar para el logro de los aprendizajes. Para llevar a cabo dicha implementación, debe considerarse la organización del proceso de instrucción a partir de los siguientes aspectos:

a) La selección del contenido matemático, indicado en la temática y los procedimientos del pensamiento matemático, la resolución de problemas, las formas de razonamiento y argumentación, la comunicación de resultados, el establecimiento de conexiones y el uso de diversas representaciones. Además de la selección de los contextos de aprendizaje: puramente matemático, del mundo real e hipotético.

b) Los materiales e instrumentos a utilizar, de los cuales destacan, la selección de lecturas de un libro de texto, la aplicación de hojas de trabajo la utilización de calculadoras o computadoras.
c) La selección, organización e implementación de las tareas para obtener los aprendizajes planteados, en las que se enfatiza, la participación de los estudiantes en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos, la presentación de los acercamientos de los estudiantes a los problemas a toda la clase o grupo, la realimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución de los estudiantes y la necesidad de aprender nuevos contenidos y la reflexión individual que permita al estudiante incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades.
d) La evaluación de la apropiación de los aprendizajes, no únicamente como la aplicación de instrumentos, sino como parte del proceso de instrucción para enriquecer el aprendizaje al reflejar la matemática que los estudiantes deben conocer y ser capaces de hacer.

Evaluación

En este apartado, inicialmente se puntualizará el significado de evaluación como componente en la organización del proceso de instrucción. Posteriormente, se ofrece una interpretación de los métodos de evaluación como un elemento que permite la consecución de los objetivos de la materia y los propósitos de cada unidad. Se concluye con la descripción de algunos métodos de evaluación que permitirán enriquecer el proceso de evaluación.

La evaluación, como una componente en la organización del proceso de instrucción, la interpretaremos como un proceso sistemático de obtención de información del logro de los aprendizajes del alumno. Dicha información permitirá, por una parte, dar a conocer al alumno los aprendizajes obtenidos, y por otra parte, al profesor, identificar las fortalezas y debilidades del estudiante y de él mismo para modificar favorablemente sus propuestas de aprendizaje y de enseñanza.

En este proceso, tienen relevancia los métodos de evaluación que se utilicen. Deben considerarse los instrumentos de evaluación, los contenidos y contextos que propician los aprendizajes planteados, y los procesos del pensamiento matemático involucrados.

La concreción de los aprendizajes a evaluar, tienen como referentes los propósitos educativos de la materia, así como los propósitos de aprendizaje general y particular, indicados en cada una de las unidades. Esto es, el método de evaluación debe estar relacionado estrechamente con las orientaciones del curso y propósitos de las unidades.

Es recomendable que los métodos de evaluación que se utilicen sean diversos, así como acordes con los propósitos planteados, con la intención de que promuevan el compromiso del alumno hacia la apropiación de los aprendizajes. A continuación se mencionan métodos de evaluación que permiten la obtención de información desde distintas perspectivas.

Proyecto de trabajo individual

Se considera que es la investigación de un tema o la solución de un problema, en la que el alumno tiene que recurrir a diferentes fuentes de información y a diversos recursos digitales; lo cual le posibilitará desarrollar tanto su iniciativa, como un trabajo independiente. Se debe elaborar un reporte escrito y hacer una presentación de los resultados.

La complejidad de la investigación o el problema asignado permitirá estimar el tiempo, con trabajo extra-clase, que se debe invertir para su solución. En este sentido el proyecto puede atender a los conocimientos de todo el curso, a una unidad o a aprendizajes específicos.

Es conveniente indicarle al alumno que significará un buen trabajo, y qué un mal trabajo, con la intención de que en el desarrollo del proyecto, aprenda a realizar una investigación o resolver un problema no rutinario, y presentarlo de manera convincente.

Proyecto de trabajo grupal

Este proyecto es similar al individual, adicionando la problemática de trabajar en equipo. Se recomienda que la investigación o el problema propuesto se desarrolle durante todo el semestre.

Variaciones sobre el examen escrito

Utilizar otras formas del examen escrito, restringido a un determinado tiempo durante la clase y generalmente sin incluir situaciones no rutinarias, son pertinentes para recabar otro tipo de información de los aprendizajes obtenidos. Destacamos los siguientes: Examen a libro abierto; examen utilizando entornos de Geometría Dinámica o CAS; examen que involucre preguntas conceptuales.

Lecturas de comprensión

Consiste en proponerle la lectura del apartado de un libro o un artículo de divulgación, para propiciar el estudio crítico y reflexivo, posibilitando evaluar el entendimiento de procesos matemáticos; es conveniente orientar el análisis mediante un cuestionario.

Resolución de problemas

Para la obtención de información del aprendizaje que surge en la resolución de problemas, es recomendable diseñar actividades que capturen dicha información de acuerdo a los siguientes aspectos: a) el entendimiento del problema: el estudiante debe mostrar que ha entendido el problema; b) la habilidad del estudiante para seleccionar estrategias de resolución y llevarlo a cabo y c) lo razonable de la solución y la posible extensión del problema.

Se recomienda instrumentar estos aspectos en una actividad grupal y obtener la información mediante una entrevista que se desarrolle a partir de preguntas clave, que se pueden ampliar a partir de la participación de los estudiantes del equipo.

Contribución al perfil del egresado

Con base en la adquisición de los contenidos y procesos matemáticos que le permitan enriquecer su formación en el ámbito de las matemáticas, será capaz de:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas.
- En la resolución de problemas matemáticos, valore la generalidad de la solución
- Apreciar la resolución de problemas como generadora de conocimiento más que como una actividad de ejercicio mental.
- Efectuar generalizaciones a partir del análisis de diferencias y similitudes, del reconocimiento de estructuras, de la identificación de analogías y de patrones de comportamiento.
- Proporcionar argumentos de validez sobre tópicos matemáticos y evaluar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales diversas formas de representación matemática para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Analizar y evaluar el trabajo matemático y las estrategias de otras personas.
- Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas y éstas entre otras disciplinas.
- Reconocer conceptos, métodos y procedimientos comunes en las diversas áreas del conocimiento matemático.
- Usar las representaciones matemáticas pertinentes para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y biológicos, entre otros.

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UBICACIÓN DEL CURSO

Esta asignatura representa el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del Cálculo Diferencial e Integral. Para darle sentido a sus conceptos, se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionarán las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

La Primera Unidad está dedicada al estudio de procesos infinitos y la noción de límite. Es importante que el alumno reconozca las condiciones que caracterizan a un proceso infinito, esto es, que reconozca el patrón de comportamiento identificando las variables y las instrucciones que posibilitan establecer siempre un resultado más. Posteriormente, a partir de representaciones tabular, gráfica, aritmética y algebraica de procesos infinitos, empiece a construir para si el significado del concepto de límite y comprenda y maneje su notación; este concepto se enriquecerá al interpretar situaciones concretas que involucren el concepto de derivada y en el siguiente curso, el de integral.

El estudio del concepto de derivada se inicia en la Segunda Unidad. Con base en el desarrollo de situaciones formuladas en contextos reales o hipotéticos se analiza la variación de funciones polinomiales, de grado no mayor a tres, para dotar de significado, inicialmente, a la razón de cambio y posteriormente, mediante la identificación del proceso infinito asociado a la razón de cambio, construir el concepto de derivada. Ejemplificar el concepto de derivada con funciones polinomiales mencionadas, sienta las bases para centrar el análisis de la relación entre la variación y el comportamiento gráfico.

La Tercera Unidad considera la obtención de las derivadas de funciones algebraicas por medio de las llamadas fórmulas y reglas de derivación. El contexto de aprendizaje que se debe privilegiar para desarrollar las actividades de esta unidad, es el puramente matemático; la justiificación de las fórmulas y reglas de derivación puede realizarse a partir de procesos de inducción, basándose en analogías geométricas o en resultados previamente obtenidos, entre otros. Se privilegia la manipulación algebraica porque es necesario que el estudiante adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas y reglas de derivación

La Cuarta Unidad representa un primer momento de síntesis. Se enriquece el análisis de la gráfica cartesiana de una función con base en la manipulación algebraica, con el propósito de profundizar en la comprensión de la relación existente entre la función original y su primera y segunda derivada. Se enriquece el entendimiento del concepto de derivada al extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas, en particular, el campo de los problemas de optimización; las actividades de aprendizaje se realizan principalmente en los contextos hipotéticos y reales.

En la siguiente tabla, se presentan tanto los propósitos, como el número de horas de cada una de las unidades.

Cálculo Diferencial e Integral I			
No.	Nombre de la unidad	Propósitos	Horas
I	Procesos infinitos y la noción de límite	Al finalizar la unidad, el alumno planteará y resolverá diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica, aritmética y simbólica para un acercamiento al concepto de límite.	12
II	El concepto de derivada: variación y razón de cambio	Al finalizar la unidad, el alumno construirá el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	16
III	Derivada de funciones algebraicas	Al finalizar la unidad, el alumno estudiará el concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtener las reglas de	16

		derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y reconocerla como otra función, además aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.	
IV	Comportamiento gráfico y problemas de optimización	Al finalizar la unidad, el alumno analizará las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.	20

EVALUACIÓN

Las propuestas de los métodos de evaluación, tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado.

Se ofrecen ejemplos de los diversos métodos mencionados anteriormente, a saber: proyecto de trabajo individual, proyecto de trabajo grupal, variaciones al examen escrito, lecturas de comprensión y resolución de problemas.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades y procedimientos, y a la comprensión de conceptos y métodos. El alumno:

- Incrementa su capacidad en la resolución de problemas al adquirir sistemáticamente técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.

- Adquiere una visión del concepto de límite, a través de la manipulación de las representaciones tabular, gráfica y algebraica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- Relaciona la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Identifica de manera sistemática y fundada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

UNIDAD I. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

Propósitos:
Al finalizar la unidad, el alumno planteará y resolverá diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica, aritmética y simbólica para un acercamiento al concepto de límite.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Distingue un proceso infinito de uno que no lo es. • Resuelve problemas que involucren procesos infinitos utilizando procedimientos aritméticos, algebraicos, gráficos o tabulares. • Reconoce y explica las características de los procesos infinitos, en una situación concreta utilizando diversas representaciones: lenguaje natural, diagramas, gráficas, tablas y expresiones algebraicas. • Identifica un patrón de comportamiento en un proceso infinito. • Resuelve problemas en diversos	**Procesos infinitos** • Situaciones aritméticas, geométricas, algebraicas o tabulares que dan lugar a procesos infinitos. • Comportamiento de un proceso infinito: representación aritmética, algebraica, gráfica o tabular. • Representación simbólica de procesos infinitos.	• Mostrar ejemplos que involucren procesos infinitos en los cuales se tiene un resultado que es posible determinar. • Plantear problemas que conduzcan a encontrar patrones numéricos, geométricos o simbólicos, de procesos infinitos como los siguientes, - y reforzarlos con el uso de software y Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC): videos, simuladores, Web 2.0, etc. • Representar 1/3 en su forma decimal 0.3 +0.03 +0.003 ... para justificar que 1 = 0.999… • Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente. Calcular las áreas de cada sección e inferir hacia qué valor se acerca el área seccionada y hacia dónde se acerca la suma de las áreas seccionadas. • Inscribir polígonos regulares en un círculo y determinar el resultado límite tanto de sus perímetros como de sus áreas desde el punto de vista geométrico; inferir los valores

contextos que involucren en su solución, procesos infinitos. • Analiza el comportamiento de un proceso infinito mediante representaciones algebraica, gráfica y tabular; a partir de la identificación de las variables, cómo cambian ellas, cuáles son sus valores posibles y cuál es su tendencia. • Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen. • Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe. • Interpreta el límite de un proceso infinito. • Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito. • Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.	**Noción de límite** • Acercamiento al concepto de límite de una función. Notación de límite $\lim_{x \to a} f(x) = b$	numéricos de dichos límites. • Calcular la velocidad media de un automóvil entre dos puntos y aproximarse sucesivamente a la velocidad instantánea en un punto intermedio, a partir de la construcción de una tabla. • Cálculo aproximado de volúmenes de botellas, tinacos, veladoras, vasos o cualquier objeto de uso común a partir de cilindros inscritos o circunscritos. • Cálculo aproximado de áreas de regiones limitadas por curvas, como: lagos, ciudades, etc., o gráficas de funciones a partir de rectángulos inscritos o circunscritos. • Hacer énfasis en el hecho de que una sucesión permite expresar de forma simbólica procesos infinitos discretos. • Como un primer acercamiento al concepto de límite de una función, es conveniente trabajar ejemplos discretos para analizar los casos donde la función tiene un dominio en los naturales. • Considerar que las representaciones gráfica, algebraica y tabular de una sucesión permiten expresar un proceso infinito que puede tener o no tener límite. • Considerar que la simbolización $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, permite representar procesos infinitos que tienen un valor límite.

		• Proponer tareas donde se muestre que dado un número real, existen diferentes sucesiones cuyos términos permiten acercarse al punto dado de tres maneras: siempre con valores mayores, siempre con valores menores y con valores mayores y menores al número dado. • A partir de las representaciones tabular y gráfica de funciones en las cuales la relación entre sus variables establecen procesos infinitos, dar significado a la simbolización $$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

UNIDAD II. EL CONCEPTO DE DERIVADA: VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

Propósitos:
Al finalizar la unidad, el alumno construirá el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

TIEMPO: 16 horas.

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Calcula en diversos contextos la variación y la razón de cambio en la función lineal asociada: al desplazamiento en un problema de movimiento, a la producción de una mercancía en función del precio, a la ordenada en función de la abscisa. Explica el significado de la razón de cambio y verifica que es una constante. • Calcula en diversos contextos la variación y la razón de cambio de una función cuadrática en un intervalo dado. • Calcula e identifica la razón de cambio instantánea en diversos contextos en un punto dado de una función cuadrática.	**En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:** • Funciones lineales • Funciones cuadráticas • Función polinomial de grado tres.	• Proponer problemas cuyo modelo es una función lineal, para analizar la variación y su relación con la pendiente, por ejemplo: el movimiento rectilíneo uniforme, el costo de producción de una mercancía, la dilatación lineal de un metal la ley de Hooke, entre otros. Los problemas se modelarán utilizando al menos dos de los siguientes registros: numérico, gráfico o algebraico. • En la interpretación del signo de la razón de cambio, es importante recuperar el concepto de pendiente de una recta. • Es conveniente el uso de gráficas poligonales de problemas reales o hipotéticos asociados a funciones en contextos diversos, por ejemplo, las tarifas diferenciadas de acuerdo al consumo de agua, de energía eléctrica o desplazamientos rectilíneos sujetos a diferentes condiciones.

• Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las pendientes de las rectas secantes. • Reconoce la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio. • Calcula la razón de cambio instantánea para un valor de la variable independiente. • Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio. • Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$	**Concepto de derivada**	• Proponer problemas cuyo modelo es una función cuadrática, para analizar la variación, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, por ejemplo: el movimiento de un objeto en caída libre, el costo de producción de una mercancía, el área de un rectángulo con perímetro constante, entre otros. Los problemas se modelarán utilizando al menos dos de los siguientes registros: tabular, gráfico o algebraico. • Proponer problemas cuyo modelo es una función polinomial de grado tres, para analizar la variación, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea, por ejemplo: el costo de producción, el ingreso y la utilidad por ventas de una mercancía; el volumen de un sólido con área fija, entre otros. Los problemas se modelarán utilizando al menos dos de los siguientes registros: tabular, gráfico o algebraico. • Recuperar las nociones de proceso infinito y de límite para obtener la razón de cambio instantánea e interpretarla en el contexto correspondiente, por ejemplo, velocidad instantánea, tasa marginal, etc. • Se sugiere que se calcule, con recursos geométricos, la pendiente de la recta tangente en un punto, a diferentes cónicas con el propósito de establecer un método general

		para la obtención de dicha pendiente a la gráfica de una función. • En el análisis de la razón de cambio que definen las pendientes de las rectas secantes, es conveniente utilizar la noción de límite como una herramienta para definir la pendiente de la recta tangente. • Para definir la derivada en un punto retomar los problemas vistos anteriormente haciendo énfasis que se utilizó el mismo modelo $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$ Y considerar la diferencia entre variable y parámetro.

UNIDAD III. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Propósitos:
Al finalizar la unidad, el alumno estudiará el concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtener las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y reconocerla como otra función, además aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grado, usando la definición en su representación: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$ • Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ con la representación anterior. • Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores.	• Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. • Reglas de derivación para: – Función lineal. – Función constante. – Constante por una función. – Suma de funciones. – Producto de funciones. – Cociente de funciones. – Funciones del tipo $(f(x))^n$ con $f(x)$ polinomial.	• Utilizar la definición de derivada $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$ para obtener derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. *con n natural.* Iniciar con ejemplos en los que $c=1$ y posteriormente con $c \neq 1$. • Proponer ejemplos para identificar geométricamente la correspondencia entre diferentes notaciones: Δx como: $x-a$ o h Δy como: $f(x)-f(a)$ o $f(x+h) - f(x)$ • Proponer ejercicios utilizando ambos límites con el propósito de observar su equivalencia. • Utilizar las propiedades necesarias de límites y definiciones de las operaciones con funciones, para justificar algunas reglas de derivación, sin ser

• Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante. • Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^{n}$ obtenidas usando la definición y determina su regla de derivación. • Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $(f(x))^{n}$, para obtener las reglas de derivación correspondientes. • Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación. • Identifica la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original. • Identifica la derivada como una función que proporciona la razón de cambio instantánea.		exhaustivo en el uso. • Al calcular la derivada de la función $f(x)=mx+b$ identificar el comportamiento de la recta y hacer un análisis gráfico cuando m es positiva, negativa o cero. • Utilizar la definición para determinar la derivada de $f(x) = cx^{n}$ con n=-1, -2, ½, -½ y 1/3, para justificar que la regla de derivación encontrada también se cumple para los números racionales. • A través del cálculo de la derivada de polinomios con la definición, inferir las reglas de derivación para: - Función lineal. - Función constante. - Producto de una constante por una función. - Suma de funciones. • Mediante productos de polinomios se puede introducir la regla del producto; por ejemplo, obtener la derivada de $f(x)=5x^{2}(x^{3}+4x)$. Si por similitud con la suma lo realizan como el producto de las derivadas, sugerir que primero hagan la multiplicación y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un producto no se comporta de igual manera que la de la suma. Con el mismo ejercicio guiarlo para que halle la regla correcta, combinando adecuadamente las funciones involucradas y sus derivadas.

		• En el caso de que el alumno se equivoque en la derivación, se sugiere utilizar el contraejemplo: dado un punto, que calcule la supuesta recta tangente a la función usando la derivada que obtuvo en dicho punto y dibuje la recta con la función utilizando un software apropiado y verifique que la recta no es tangente en el punto propuesto. • La regla del cociente se puede obtener a partir de la del producto, escribiendo el cociente como una multiplicación. • Usar ejemplos de funciones de la forma f^n con n=2 y 3 y f una función polinomial de primero o segundo grado, para introducir su regla de derivación a partir de la regla del producto. • Enfatizar la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función algebraica para aplicar correctamente las reglas de derivación.
• Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.	• Problemas de aplicación de razón de cambio instantánea, por ejemplo: cálculo de tangentes y normales, cálculo de velocidades, cálculo de tasa marginal.	• Proponer problemas que involucren la obtención de la ecuación de las rectas tangente y normal en un punto de la gráfica de una función. • Resolver problemas sobre velocidad y aceleración instantáneas de un móvil y de tasa marginal, entre otros. • Resolver ejercicios o problemas de la interpretación

		geométrica de la derivada de funciones algebraicas. • A partir de la gráfica de una función obtener la gráfica de su derivada mediante el análisis de las pendientes de las rectas tangentes. • Dibujar la gráfica de una función y la de su derivada, buscando una primera identificación de la relación entre ambas, por ejemplo máximos y mínimos. • Presentar las diferentes notaciones usadas en fuentes de información para la representación de la derivada: $f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, D_x(y)$

UNIDAD IV. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos:

Al finalizar la unidad, el alumno analizará las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS

El alumno:
• Determina gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.
• Concluye a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad punto de inflexión.
	• Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.
	• Comportamiento gráfico de una función.
	  ○ Crecimiento y decrecimiento de funciones
	  ○ Puntos críticos. Concavidad. Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivada.
	• Puntos de inflexión.
		• Aprovechar el conocimiento adquirido en los cursos anteriores (Mat II) sobre las funciones cuadráticas. En particular, las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ ayudan a comprender tanto lo que es un punto máximo ó mínimo al vincular el comportamiento gráfico de la función (creciente o decreciente) con el signo de la pendiente de las tangentes (positivo, negativo), como la noción de punto crítico (derivada cero). Esto ayuda a establecer el criterio de la primera derivada.
		• Con la función $f(x) = x^3$ se muestra la insuficiencia de la condición de que un punto crítico debe ser máximo o mínimo; lo que permite introducir el concepto de punto de inflexión.

• Bosqueja la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma. • Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión. • Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada. • Grafica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada. • Comprende que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de f, f', f''.	• Gráfica de f (x) a partir de las gráficas de $f'(x)\ y\ f''(x)$ y viceversa.	• Después de analizar, identificar y definir gráficamente punto crítico y concavidad, obtener máximos, mínimos y puntos de inflexión en forma algebraica. • Una vez que el alumno ha comprendido el significado de máximo, mínimo y punto de inflexión, a través de la primera derivada, es conveniente para estudiar la concavidad, utilizar alguna función de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo, por ejemplo $f(x) = x^3 - 12x$. • Realizar el análisis gráfico del comportamiento por intervalos tanto de la función como de la primera y segunda derivada para obtener las relaciones entre todas ellas y concluir con el criterio de la segunda derivada. Mostrar con este tipo de ejemplos (polinomios de grado tres o mayor) que el criterio de la segunda derivada es más práctico que el otro. • Construir el bosquejo de la gráfica de la derivada a través de la gráfica de la función y viceversa, ya que permite al alumno (en el estudio posterior de la antiderivada) asociar la forma de la curva con el significado geométrico

		de la derivada. • Finalmente, hacer ver que dada la gráfica de una función o la de su derivada, se obtiene información sobre el comportamiento gráfico de la otra.

• Resuelve problemas que involucran máximos y mínimos de una función.	• Problemas de optimización.	• En cuanto a los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones.
		
		• También es útil, enfatizar en los ejemplos que resuelva el profesor, la forma en que la condición que establece el problema entre las variables (por ejemplo ancho y largo; radio y altura, etc.) permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente.
		
		• Es importante plantear otras situaciones, como son problemas del tipo:
		  • Dados dos números cuyo producto sea 72 y la suma del primero más el triple del segundo sea máxima.
		
		  • Una compañía que produce x números de artículos mensuales cuyo costo esté dada por

		la función C(x) determinar el número de x unidades mensuales que se deben producir para que el costo sea mínimo.. • El cálculo del volumen máximo de una caja que se forma a partir de un rectángulo haciendo cortes iguales en esquinas. • Minimizar el costo de una lata cilíndrica a partir de un volumen determinado. Con una o dos tapas de material de valor diferente o igual al del rectángulo envolvente del cilindro. • El problema de hallar el radio y altura de un cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de radio y altura conocidos.

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

UBICACIÓN DEL CURSO

En esta asignatura se concluye el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del Cálculo Diferencial e Integral: se desarrolla el concepto de derivada de funciones trascendentes y se concretan las ideas fundamentales del Cálculo Integral. Para darle sentido a sus conceptos, se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionarán las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

En la Primera Unidad se extiende el estudio de la variación a funciones trascendentes, al obtener la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; la justificación de estos resultados se realiza fundamentalmente con el análisis gráfico de la función original y sus dos primeras derivadas. Con base en la modelación de diversos fenómenos físicos, químicos biológicos y sociales, entre otros, se contribuye a una mejor comprensión de la derivada de las funciones antes mencionadas, a la vez que se enriquece el significado del concepto de derivada.

A partir de la modelación de situaciones geométricas y de contextos, principalmente de movimiento, en la que se presenta la idea de acumulación, en la Unidad Dos se inicia el estudio del concepto de integral definida; es importante recurrir a los procesos infinitos para esbozar la definición de integral definida. Para la obtención de resultados de sumas infinitas, debe recurrirse a las funciones constante y lineal, principalmente. Con base en estos resultados, aportar elementos para presentar el Teorema Fundamental del Cálculo.

La Unidad Tres inicia con la presentación del desarrollo inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función a partir de conocer su rapidez de cambio. Para la comprensión de las ideas de antiderivada, condición inicial e integral indefinida, el trabajo con funciones polinomiales debe ser el punto de partida. Se prepara al alumno en el manejo algorítmico al resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas, para concluir con los métodos de sustitución e integración por partes. Al retomar los resultados que presenta el Teorema Fundamental del Cálculo, resuelve problemas, de mayor complejidad, que utilizan la integral definida.

Por ultimo, la Cuarta Unidad presenta tanto la conclusión de los dos cursos, como perspectivas de desarrollo de los métodos y conceptos estudiados. Consolida la comprensión, manejo y aplicación de la derivada y la integral al construir el modelo asociado a diversas situaciones , en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como son: crecimiento de una población, desintegración radioactiva, ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo, propagación de una enfermedad.

En la siguiente tabla, se presentan tanto los propósitos, como el número de horas de cada una de las unidades.

Cálculo Diferencial e Integral II			
No	Nombre de la unidad	Propósitos	Horas
I	Derivadas de funciones trascendentes	Al finalizar la unidad, el alumno extenderá el conocimiento de la derivada a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al abordar situaciones que se modelan con funciones trascendentes.	16
II	La integral definida	Al finalizar la unidad, el alumno conocerá el concepto de integral definida a través de diferentes contextos, para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral para establecer el Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará en diferentes situaciones.	16
III	La integral indefinida	Establecer mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones. Obtener las	20

		fórmulas inmediatas y conocer algunos métodos de integración.	
IV	Modelos y predicción	Al finalizar la unidad el alumno complementará el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de las situaciones planteadas.	12

EVALUACIÓN

Las propuestas de los métodos de evaluación, que tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado.

Se ofrecen ejemplos de los diversos métodos mencionados anteriormente, a saber: proyecto de trabajo individual, proyecto de trabajo grupal, variaciones al examen escrito, lecturas de comprensión y resolución de problemas.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral II, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades y procedimientos, y a la comprensión de conceptos y métodos. El alumno:

- Incrementa su capacidad en la resolución de problemas al apropiarse de nuevas técnicas y herramientas que proporciona el Cálculo, en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Avanza en el entendimiento de la derivada, al analizarla en funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Comprende la relación entre la derivada y la integral de funciones, que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo.

- Manipula adecuadamente las fórmulas de integración, así como los métodos de sustitución e integración por partes.
- Con la modelación de situaciones geométricas y de movimiento, entre otras, relaciona la integral definida de una función, ya sea con el área bajo una curva o la descripción del comportamiento de un objeto en movimiento, y comprende que puede llevarse a cabo mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- Sistematiza las diversas interpretaciones de la integral y las utiliza en la resolución de problemas relacionados con variación y con acumulación.

UNIDAD I. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Propósitos*:*
Al finalizar la unidad, el alumno extenderá el conocimiento de la derivada a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al abordar que se modelan con funciones trascendentes.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Deduce la derivada de las funciones seno y coseno. • Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica. • Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. • Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas.	**Derivada de funciones trigonométricas** Situaciones que den lugar a funciones trigonométricas y al estudio de su variación Derivada de las funciones seno y coseno. Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas. Resolución de problemas en diversos contextos.	Iniciar el tema presentando problemas que involucren el uso de la variación de funciones periódicas, para motivar la discusión de la variación de dichas funciones, por ejemplo, la profundidad del agua en el puerto de San Felipe B. C. está dada por: $y = 3 + 2.5\cos(\pi/6\ t)$ *; y está en metros* Donde *t* es el número de horas desde la media noche. Calcular la rapidez con que está cambiando el nivel del agua a las 6 horas. Para la deducción de la derivada de la función seno es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones, gráfica, tabular y algebraica, considerando lo siguiente: • Al efectuar un análisis a través de su gráfica, utilizando el trazado de tangentes comparar estos valores con la gráfica de la función coseno y hacer una conjetura. • En la representación numérica conviene calcular

• Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos.		la aproximación de la derivada, usando una tabla, para los valores: $x = 0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}$ • Al utilizar la definición: $\frac{d(senx)}{dx} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{sen(x+h)-senx}{h}\right]$ calcular $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} \quad ; \; \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$ mediante una aproximación numérica. Para deducir la derivada de la función coseno por medio de la definición utilizar la identidad trigonométrica apropiada. Para obtener las derivadas de las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de las identidades: $tanx = \frac{senx}{cosx}, cotx = \frac{1}{tanx}, secx = \frac{1}{cosx}, cscx = \frac{1}{senx}$ Emplear la derivada de las funciones circulares para el estudio de fenómenos periódicos tales como el péndulo simple, pistón oscilante y el movimiento de las mareas,

• Interpreta gráfica y analíticamente que la derivada de la función exponencial natural es ella misma. • Deduce la derivada de las funciones logarítmicas y exponenciales. • Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones logarítmicas y exponenciales compuestas.	**Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas** Situaciones que den lugar a funciones exponenciales o logarítmicas y su variación. Derivada de las funciones: e^x, e^u , 10^x, *y* 10^u. Derivada de las funciones: *lnx, lnu, logx y logu*	Utilizar la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento. Iniciar el tema presentando problemas que involucren el uso de la variación de funciones exponenciales o logarítmicas, por ejemplo: se depositan cien mil pesos en un banco que paga 5% de interés anual compuesto de manera continua. a) Encuentre la cantidad total acumulada en 10 años b) Con qué rapidez está creciendo el capital cuando $t = 10$ años Con el apoyo de la geometría dinámica el alumno conjeture que la derivada de la función exponencial natural es la misma función. Para la deducción de la derivada de la función exponencial es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular y algebraica, considerando lo siguiente: • Al efectuar un análisis a través de su gráfica, utilizando el trazado de tangentes comparar estos valores con la gráfica de la función misma y hacer una conjetura. • En la representación numérica conviene calcular la aproximación de la derivada, usando una tabla, para valores apropiados: $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$

• Aplica las derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales a problemas en diversos contextos.	Resolución de problemas en diversos contextos.	• Al utilizar la definición la derivada de la función e^x calcular el $\lim_{h \to 0} \left[\frac{e^h - 1}{h} \right]$ lim . lim mediante una aproximación numérica. Se propone que la derivada de la función logarítmica se deduzca a través de las propiedades de su función inversa. Proponer, graduando la dificultad, ejercicios diversos de cálculo de derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales, cuyo argumento sea a su vez función de *x*. Enfatizar las aplicaciones del decaimiento radioactivo a diversas disciplinas, crecimiento de poblaciones, la ley de enfriamiento, entre otras. Dar a conocer y aplicar el método de la derivación logarítmica. Resaltar el hecho de que al aplicar primeramente el logaritmo en ejercicios de derivadas de productos, cocientes, potencias y exponenciales, y posteriormente derivar, esto se reduce a aplicar las reglas de la derivación de la suma, resta y el producto por un número real.

UNIDAD II. LA INTEGRAL DEFINIDA

Propósitos:

Al finalizar la unidad, el alumno conocerá el concepto de integral definida a través de diferentes contextos, para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral para establecer el Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará en diferentes situaciones.

TIEMPO : 16 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Aproxima el área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general. • Asocia el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito y el concepto de límite. • Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$ como un límite de sumas infinitas para $n=1, 2$ y 3. • Obtiene el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0,x]$ y calcula con ella el área en el intervalo [a,b].	• Situaciones que se pueden representar mediante áreas. • **El área bajo una curva** – El área bajo la gráfica de una función constante o lineal. - Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. - Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$, donde k es una constante. - Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva. • **La integral definida** – Definición. – Propiedades.	• Plantear un problema que involucre el cálculo de distancia, trabajo o presión, entre otros; que se represente mediante una función constante o lineal, para que posteriormente los analicen gráficamente y perciban que dichos problemas se pueden resolver al calcular el área bajo la gráfica de esa función, auxiliándose de la figura geométrica respectiva. • Para la aproximación numérica, proponer la gráfica de una función sin su representación analítica y pedir que calcule el área bajo la curva en un intervalo dado e inducirlo para que obtenga una aproximación al área a través de la suma de las áreas de figuras rectilíneas y solicitarles mejores aproximaciones.

• Identifica la función área como una antiderivada o primitiva. • Conoce la integral definida como el límite de sumas infinitas. • Analiza la relación que se establece en el Teorema Fundamental del Cálculo. • Valora las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida. • Utiliza las propiedades de la integral definida.	• **La función área como antiderivada** • **Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo**.	• Determinar el área bajo las funciones $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^3$, en un intervalo [0,a], a partir de aproximar el área mediante rectángulos inscritos y circunscritos de igual base, para acotar el área. Se puede iniciar circunscribiendo n rectángulos para n=4 y calcular su área, continuar con n=5, 6, etc. y observar el patrón de comportamiento para n. • Para enriquecer lo anterior, hacer el cálculo con particiones más finas utilizando la hoja electrónica de cálculo. Complementar y verificar los valores obtenidos con el uso de software dinámico, observando gráficamente cómo se pueden obtener mejores aproximaciones. • Para calcular de manera exacta las áreas referidas retomar lo visto en la Unidad I de Cálculo I, analizar el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para conocer si tiene un valor límite y cuál es éste. Para esta estrategia se requiere calcular $\sum_{k=1}^{k=n} k$, $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$ y

		$\sum_{k=1}^{k=n} k^3$, que se podrían determinar, por ejemplo, a partir de sumas telescópicas. • En la representación del área desde *a* hasta *x* bajo la gráfica de *f(t)*, incorporar la notación $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ • A partir de los resultados anteriores analizar la relación entre: la función área, la antiderivada y la integral definida; para enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). • Reconocer la importancia de funciones continuas para enunciar el TFC, a partir de que analicen la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$
• Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo. • Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva	• **Aplicaciones de la integral definida** - Área comprendida entre dos funciones. - Cálculo de la distancia a partir de la velocidad. - Costo total a partir del costo marginal.	• Resolver problemas que incluyan áreas entre dos funciones, cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad, cálculo del costo total a partir del costo marginal; apoyándose en el trazo de sus gráficas para calcular las integrales respectivas. • Resolver problemas utilizando las propiedades de la integral: $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

		$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$ $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$ • Durante la unidad se realizarán algunas lecturas sobre el desarrollo histórico del cálculo de áreas y sobre el surgimiento de la integral. Al final de la unidad el alumno podría entregar un escrito relacionando las lecturas con lo abordado en clase.

UNIDAD III. LA INTEGRAL INDEFINIDA

Propósitos:

Establecer mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones. Obtener las fórmulas inmediatas y conocer algunos métodos de integración.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Conoce la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida. Maneja la notación respectiva. • Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. • Reconoce que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante. • Explica el significado de condición inicial y antiderivada.	• Fórmulas inmediatas de integración. • Relación entre la condición inicial y la constante integración. • Fórmulas y métodos de integración - Cambio de Variable. - Integración por partes.	• A partir del Teorema Fundamental del Cálculo, obtener las fórmulas de integración usando la idea de que la derivada y la integral son operaciones inversas, "invirtiendo" las fórmulas de derivación. • Presentar al alumno la diferencial como una aproximación lineal local entre Δf y Δx, donde Δf es el cambio del valor de la función que dependerá del cambio en x, Δx. Se sugiere utilizar la variedad de problemas de Procesos Infinitos (Unidad I, cálculo I) para estudiar la dependencia entre estos cambios y escribir Δf como función de Δx, según como se proponga la función f en cada caso. • Para clarificar el papel que representa la condición inicial en la solución particular, es conveniente utilizar algún

• Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada. • Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales. • Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. • Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla. • Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar productos de funciones y lo utiliza.		software graficador para explicar el sentido de la condición inicial y su relación con la familia de curvas que se generan al variar la constante de integración. • Retomar el análisis gráfico que se realizó en la Unidad IV de Cálculo I, como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de soluciones y resaltar el papel que juega en ella la constante de integración. • Para introducir el método de sustitución o de cambio de variable, se sugiere realizar pequeñas modificaciones a algunas integrales inmediatas y sugerir al alumno cómo hacer "ajustes" para obtener la solución. También es útil, que el profesor muestre este método como la "inversión" de la regla de la cadena para el caso particular de potencias de funciones. Esto ayudará a que identifiquen la ***u*** comprueben si tienen ***du*** ó, en su caso, qué tipo de "ajuste" requieren para tenerla y procedan a aplicar la sustitución. • Se sugiere que el profesor muestre el método de integración por partes como el proceso inverso de la regla para calcular la derivada de un producto.

		Darles algunas sugerencias para la elección de ***u*** y ***v***, a través de los ejercicios que se realicen en clase, presentar algún ejemplo invirtiendo la elección y discutir cuál de ellas fue la mejor estrategia.
• Selecciona el método de integración apropiado para resolver integrales que resultan de resolver problemas de física (trabajo, presión), o de áreas, volúmenes y otros problemas de economía.	• Cálculo de áreas y volúmenes. • Problemas de la Física, de Trabajo, de economía, presión de un líquido y otros.	• Para el método de sustitución trigonométrica, se sugiere que se trate como un método especial de cambio de variable que transforma la integral original a una integral trigonométrica lo que propiciará la necesidad de construir un triángulo rectángulo para obtener la integral en términos de la variable original. Se sugiere que este método sea usado principalmente para hallar áreas o volúmenes de figuras geométricas como el círculo, esferas, etcétera. • Es importante hacer ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. También es útil, retomar alguno de los problemas sobre distancia, trabajo o presión, proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.

UNIDAD IV. MODELOS Y PREDICCIÓN

Propósito:
Al finalizar la unidad el alumno complementará el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de las situaciones planteadas.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	TEMÁTICA	ESTRATEGIAS
El alumno: • Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación $$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$ • Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos. • Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de C. • Considera las condiciones iniciales para obtener la solución particular que representa a la situación, y llega a un modelo del tipo $P(t) = P_0e^{kt}$	**Modelos y Predicción** • Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$ • Método de separación de variables. • Condiciones iniciales aplicadas al modelo $$P(t) = Ce^{kt}$$	• Explora en forma numérica, gráfica y algebraica el comportamiento de diversas situaciones por ejemplo, el crecimiento de una población, y conducir a los alumnos a que propongan los factores que intervienen en ella. Al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, es posible llegar a lo que significa la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Con ello, sólo se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante la ecuación: $$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$ • En esta etapa del curso, los alumnos deben tener claro que necesitan integrar para obtener la función solución $P(t)$; sin

• Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. • Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. • Reconoce la importancia del modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ al saber que se aplica en situaciones de índole diversa.		embargo, es necesario hacerles ver que requieren de un nuevo camino. Al presentar el método de separación de variables, es conveniente cuidar que no se queden con la idea errónea de que dt pasa multiplicando pero sin caer en explicaciones teóricas que exceden los propósitos de esta unidad. • Una vez hallada la solución $P(t) = P_0e^{kt}$ analizar su comportamiento general y efectuar predicciones de la población. Para ello, es conveniente contar con datos del INEGI del último censo (están disponibles en internet) sobre la tasa de crecimiento de la población del país. • Predecir el tamaño de la población en el futuro a través del modelo, hacerlo también para décadas pasadas y cotejar el resultado con los datos del INEGI.

Bibliografía

Aquino Vásquez, Eulogio et. at. (2010). *Paquete Didáctico, Material de Apoyo Cálculo Diferencia e Integral II*. UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Oriente. México.

Ávila Curiel, Arturo et. al. (2006). *Cálculo Diferencia e Integral I*. UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Oriente. Seminario de Matemáticas-Club de Matemáticas. México.

Ávila Curiel, Arturo et. al. (2007). *Cálculo Diferencia e Integral II*. UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Oriente. Seminario de Matemáticas-Club de Matemáticas. México.

Azcárate, Carmen et. al (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Síntesis. S. A. España

Bittinger, Marvin (2002) *Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas.* Séptima edición, Addison Wesley. Colombia.

Cruse, Allllan B. et. al. (1982). Lecciones de Cálculo. Fondo Educativo Interamericano.

Filloy, Eugenio et. al. (2003). *Matemática Educativa*. "El concepto de infinito: *Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial".* Fondo de Cultura Económica, México.

Goldstein, L. J. et. al. (1987). *Cálculo y aplicaciones*. Prince – Hall Hispanamericana. México.

Goldstein, L. J. et. al. (2007). *Brief Calculus & its Applications*. Prentice Hall. United States of America.

Gómez Carranza, Pantaleón et. al. (2010). *Cálculo I*. Procesos infinitos, cambio, derivadas y aplicaciones. UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Oriente. México.

Hoffmann, L. (1990). *Cálculo aplicado*. McGraw Hill. Cali, Colombia.

Hughes-Hallett, Deborah *et al*. (1997). *Cálculo*, Continental, SA. México.

Hughes, Deborah et. al. (2002). *Cálculo Aplicado*. CECSA. México.

Imaz, Carlos. (2010). *La Génesis y la Enseñanza del Cálculo*. Ed. Trillas, S. A., México.

Larson, Ron *et al*. (2006). *Cálculo.* McGraw-Hill. México.

Licea Durán, Jaime et. al (2008) *Paquete Didáctico Cálculo Diferencial e Integral I.* UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Sur. México.

Licea Durán, Jaime et. al (2009) *Paquete Didáctico Cálculo Diferencial e Integral II.* UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades.

Plantel Sur. México.

Leithold, Louis (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. Ed. Harla. México.

Leithold, Louis (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press. México.

Mochón, Simón (1994). *Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana. México.

Molina Tapia, Alberto, et. al (2008). *Cálculo I y II. Cuadernos de Trabajo*. Trillas. México.

Natanson, I.P. (1984). *La suma de cantidades infinitamente pequeñas*. Limusa-Willey. México.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Purcel, Edwin J. Y Varberg, Dale (1992). *Cálculo Diferencial e Integral*. Prentice Hall. México.

Rodríguez Pérez, Francisco Javier et. al. (2009). *Cálculo Diferencia e Integral Tomo 1*. UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades. Plantel Oriente. México.

Rondero Guerrero, Carlos, (2001). *Cálculo Discreto, Cuadernos Didácticos, Volumen 8.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Salinas, Patricia et. al. (2001). *Elementos del Cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Shilov, G. E. (1980). *Cómo construir gráficas: Los problemas más sencillos de máximos y mínimos*. Limusa. México.

Stein, Sherman y Barcellos (1995). *Cálculo y Geometría Analítica 1*. McGraw Hill. Colombia.

Soler, Francisco et al. (2008). *Cálculo con aplicaciones*. Pearson. Prentice Hall. Colombia.

Stewart, James (2001). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Thomson-Learning. Cuarta edición. México.

Swokowski, Eart W. (1987). *Introducción al Cálculo con geometría analítica.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. México.

Thompson, Silvanus P. y Gardner, Martin (1998). *Cálculo diferencial e integral*. McGraw-Hill. México.

Warner, Stefan y Costenoble, Steven. (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición, Thomson, México.

Zill, Dennis G. *et al*. (2011). *Cálculo de una variable*. McGraw-Hill. México.