Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Área Matemáticas

Programa de Estudios de Matemáticas

Semestres I al IV

INDICE

PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS SEMESTRES I A IV

PRESENTACIÓN

ORIENTACIONES GENERALES DE LOS CURSOS

En los cuatro primeros semestres del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, se incluyen los cursos obligatorios del área de Matemáticas que los estudiantes deberán acreditar y que abarcan los conocimientos básicos de cinco importantes ejes de desarrollo temático: **Álgebra, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones**. A través de estos cuatro cursos, se brinda al alumno un panorama de los principales aspectos del conocimiento y del quehacer matemático que le permitirán acceder posteriormente a conocimientos más especializados, tanto en el ámbito de estos mismos ejes temáticos como en el de otros, entre los que están incluidos el Cálculo Diferencial e Integral y la Probabilidad y Estadística.

Estos cuatro cursos constituyen un todo en su conjunto, de modo que de un semestre a otro se recuperan conocimientos adquiridos previamente, ya sea trabajándolos desde otro nivel de profundidad y extensión, o remitiéndose a su aplicación en otro contexto o temática, o incluso abordándolos desde una nueva perspectiva (por ejemplo, el estudio analítico de los objetos geométricos).

En la estructuración de los programas, subyace el hecho de que conforme el estudiante va adentrándose en los conocimientos relativos a todas y cada una de las unidades que los integran, también deberá ir avanzando paulatinamente en las siguientes líneas de desarrollo metodológico: Aproximaciones a la Resolución de Problemas; Dominio del Pensamiento Algebraico; Análisis Lógico de Argumentos; Construcción de Razonamientos; Planteamiento de Conjeturas a partir de descubrir Patrones de Comportamiento; Manejo de Transformaciones Geométricas en el Plano Cartesiano (desplazamientos, contracciones, estiramientos, cambios de escala); e Identificación de Algoritmos y de Relaciones entre Algoritmos.

Además, en concordancia con los principios educativos del Colegio, más que privilegiar la memorización de un cúmulo de contenidos matemáticos (subdivididos en muchas ocasiones en múltiples casos y fórmulas especiales) y la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas; entre estas últimas están: generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); formalizar "Material Matemático" (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); flexibilidad de pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); visualización espacial (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada).

En consecuencia, resulta importante que los alumnos interactúen de forma activa (organizando, sistematizando, comparando, clasificando, analizando, explorando, argumentando, aplicando, etcétera) con la temática que van a conocer, de modo que además de favorecer una mejor comprensión de la misma, se les dote de herramientas intelectuales. Para ello, es de gran utilidad el uso de calculadoras graficadoras y de diversas versiones de *software*, entre las que destacan *Excel, Derive, Cabri, Geometer Sketcéterah Pad*, etcétera mediante los cuales pueden diseñarse estrategias de aprendizaje que contribuyen a la búsqueda de significados, a la sistematización, a la exploración, a la formulación de conjeturas y al desarrollo de la imaginación espacial, entre otros. Cobra relevancia describir qué es de mayor interés que aprenda el alumno respecto a la temática; es decir, cuáles son los aprendizajes considerados como relevantes.

Precisamente para resaltar la trascendencia de la actividad intelectual del alumno en el proceso de su aprendizaje, en el formato de presentación de cada una de las unidades que conforman un curso, bajo el título de **aprendizajes** se pone énfasis en lo que el alumno debe de ser **capaz de hacer o de saber** al término de la misma. En la columna de **estrategias** se incluyen algunas **sugerencias** de cómo favorecer la adquisición de los aprendizajes descritos, o bien, indicaciones para precisar el nivel de profundidad o la orientación que tiene la temática en el contexto del o de los ejes que se trabajan a lo largo de los cuatro semestres. La última columna enuncia la **temática** que se trabajará en esa unidad.

Para completar la visión general de los cuatro cursos, se presentan a continuación los enfoques disciplinario y didáctico de las matemáticas que se adoptan en los programas, la contribución de la materia al perfil del egresado y, finalmente, dos cuadros que sintetizan, por un lado, el conjunto de unidades que se incluyen en dichos cursos y, por otro, los aspectos relevantes que se trabajan, curso a curso, en los cinco ejes temáticos. En este último, el llamado Mapa de Conocimientos por Ejes Temáticos, están ubicados con mayúsculas los nombres de las unidades correspondientes al eje en cuestión que se incluyen en el semestre respectivo, mientras que se describen utilizando minúsculas, aquellos elementos que sirven de base, se retoman o se utilizan en unidades relativas a otros ejes.

ENFOQUE DE LA MATERIA

Enfoque Disciplinario

Muchos de los contenidos temáticos de los Programas de Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, por su naturaleza, forman parte del currículo de cualquier institución educativa del nivel medio superior del país. Sin embargo, la forma de enfocarlos, presentarlos y trabajarlos con el estudiante, es lo que hace la diferencia y atiende a los principios educativos que pretende cada institución.

De esta manera, en el Colegio de Ciencias y Humanidades la concepción de la matemática conlleva una intención del para qué queremos enseñarla y cómo contribuye a la formación de un sujeto capaz de buscar y adquirir por sí mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y constructiva.

Por ello, en el CCH se concibe a la matemática como una disciplina que:

- **Posee un carácter dual:** Es una ciencia y una herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.
- **Manifiesta una gran unidad**. No obstante la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas presentan métodos, principios y estrategias comunes. Muchos de los conceptos y procedimientos de cualesquiera de sus ramas, se vinculan, complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.
- **Contiene un conjunto de simbologías propias** bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, gráfica, algebraica, por ejemplo) que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones, comportamientos, leyes, etcétera. Aspecto que contribuye a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones.

Enfoque Didáctico

Como en el CCH un aspecto fundamental es la búsqueda del desarrollo de habilidades de pensamiento (en contraposición al estudio de un cúmulo de contenidos) que permitan al estudiante adquirir por su cuenta nuevos conocimientos, se plantea que en la puesta en práctica de estos programas la enseñanza considere:

- Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que **no** contemplen de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.

- ✍ Analizar los enunciados de los diferentes problemas planteados, de manera conjunta estudiante-profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera paulatinamente esta habilidad y con el tiempo sea capaz de realizarla de manera independiente.
- ✍ Proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para que el alumno atienda el desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y entienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.
- ✍ Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos. Las precisiones teóricas se establecerán cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión.
- ✍ Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal.
- ✍ Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la matemática.
- ✍ Fomentar el trabajo en equipos para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada, y la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados.

CONTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS AL PERFIL DEL EGRESADO

Por lo anterior, se busca que el estudiante sea el principal actor en el proceso de su aprendizaje, adquiera un desempeño satisfactorio en la comprensión y manejo de los contenidos de los cinco ejes temáticos (Álgebra, Geometría, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones), y desarrolle:

- ✍ El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo (sistemático, especulativo y riguroso), particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.
- ✍ La adquisición de aprendizajes de manera independiente.

- ✍ La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos correspondientes al nivel bachillerato.
- ✍ La capacidad para realizar análisis y establecer relaciones mediante la identificación de semejanzas y el uso de analogías.
- ✍ La capacidad para formular conjeturas, construir argumentos válidos y aceptar o refutar los de otros.
- ✍ La capacidad de aprender tanto de los aciertos como de los errores.
- ✍ La capacidad para efectuar generalizaciones a partir del establecimiento y análisis de similitudes y el uso de razonamientos inductivos o deductivos.
- ✍ La habilidad en el manejo de estrategias de resolución de problemas.
- ✍ La incorporación a su lenguaje y modos de argumentación habituales, de diversas formas de expresión matemática (numéricas, tabulares, gráficas, geométricas y algebraicas).
- ✍ La aplicación de conocimientos en distintos ámbitos de su actividad, con actitudes de seguridad en sí mismo y de autoestima.
- ✍ El interés por la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.
- ✍ La valoración del conocimiento científico en todos los campos del saber.

Los diversos cursos del área de matemáticas contribuyen de este modo, a la formación del bachiller del Colegio de Ciencias y Humanidades.

SECUENCIA DE UNIDADES POR SEMESTRE

1er SEMESTRE	2º SEMESTRE	3er SEMESTRE	4º SEMESTRE
MATEMÁTICAS I	**MATEMÁTICAS II**	**MATEMÁTICAS III**	**MATEMÁTICAS IV**
Números y Operaciones Básicas. ***15 horas***	Funciones Cuadráticas y Aplicaciones. ***15 horas***	Solución de Sistemas de Ecuaciones. ***15 horas***	Funciones Polinomiales. ***20 horas***
Variación Directamente Proporcional y Funciones Lineales. ***20 horas***	Construcciones y Elementos Geométricos Básicos. ***15 horas***	Sistemas de Coordenadas y Lugares Geométricos. ***15 horas***	Funciones Racionales y con Radicales. ***20 horas***
Ecuaciones Lineales. ***15 horas***	Congruencia y Semejanza. ***15 horas***	La Recta y su Ecuación Cartesiana ***15 horas***	Funciones Trigonométricas. ***20 horas***
Sistemas de Ecuaciones Lineales. ***15 horas***	Perímetros, Áreas y Volúmenes. ***15 horas***	La Elipse, la Circunferencia y sus Ecuaciones Cartesianas. ***20 horas***	Funciones Exponenciales y Logarítmicas. ***20 horas***
Ecuaciones Cuadráticas. ***15 horas***	Elementos de Trigonometría. ***20 horas***	La Parábola y su Ecuación Cartesiana. ***15 horas***	

MAPA DE CONOCIMIENTOS POR EJES TEMÁTICOS

LÍNEAS TEMÁTICAS	1er SEMESTRE.	2º SEMESTRE.	3er. SEMESTRE	4º SEMESTRE
Eje 1: Álgebra. Ecuaciones con una o más incógnitas, procedimientos algebraicos diversos, formas de estudio a través de la representaciones algebraicas.	✍ **NÚMEROS Y OPERACIONES BÁSICAS.** ✍ **ECUACIONES LINEALES.** ✍ **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.** ✍ **ECUACIONES CUADRÁTICAS Y FACTORIZACIÓN.** .	✍ *Uso de procedimientos algebraicos en la unidad de funciones cuadráticas.* ✍ *Uso de procedimientos algebraicos en la parte de aplicación de geometría y trigonometría*	✍ **SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.** ✍ *Manejo del álgebra para pasar de una forma a otra; solución de ecuaciones y sistemas en las intersecciones con los ejes o bien entre cónicas.* ✍ *Se amplía la visión de lo que es una ecuación, un sistema y el sentido del álgebra misma.*	✍ *Amplio manejo algebraico para manipular funciones.* ✍ *Variación inversamente proporcional.* ✍ ***Solución de ecuaciones de grado mayor a dos** se incorpora en funciones. polinomiales.* ✍ *Acercamiento a intervalos y desigualdades.* ✍ *Repaso y extensión de la noción de exponente*
Eje 2: Geometría Euclidiana. Reflexión sobre características de figuras, trazos con regla y compás, razonamiento reflexivo, congruencia, semejanza, teorema de Pitágoras. Aplicaciones.	✍ *En problemas de variación proporcional, ecuaciones y sistemas se pueden incluir ejemplos de longitudes de segmentos, y perímetros de figuras.* ✍ *La proporcionalidad directa está fuertemente ligada a semejanza.*	✍ **CONSTRUCCIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICAS.** ✍ **CONGRUENCIA Y SEMEJANZAS.** ✍ **PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES.**	✍ *Se retoman muchos conceptos geométricos (ángulo, segmento, área, mediatriz, mediana, paralelas, etcétera) para resolver problemas de corte euclidiano. Se incluye una construcción de cada cónica y la forma de obtener las secciones cónicas .*	✍ *En funciones trigonométricas se retoman y utilizan el teorema de Pitágoras, el concepto de semejanza, y la noción de ángulo y su medida.* ✍ *En funciones polinomiales y racionales, se sugiere presentar problemas de distancias, áreas y volúmenes.*

Eje 3: Trigonometría Razones trigonómetricas, resolución de triángulos, estudio de la variación periódica.	✍ *Como antecedentes se tienen los conceptos de razón y proporcionalidad*	✍ **ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA**	✍ *Se utiliza el concepto de tangente, para la pendiente y para el ángulo entre dos rectas.*	✍ **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.**

MAPA DE CONOCIMIENTOS POR EJES (CONTINUACIÓN)

LÍNEAS TEMÁTICAS	1er SEMESTRE.	2º SEMESTRE.	3er. SEMESTRE	4º SEMESTRE

Eje 4: **Geometría Analítica.** Sistema de coordenadas. Plano Cartesiano. Estudio analítico de problemas de corte euclidiano y de lugares geométricos.	✍ *Inicia manejo del Plano Cartesiano.* ✍ *Primer acercamiento al estudio de la relación entre gráfica y expresión algebraica a través de sus parámetros* ✍ ***Bases para el concepto de pendiente y relación de paralelismo.*** ✍ *Intersección de rectas. Satisfacción de la expresión algebraica asociada.*	✍ *Se trabaja la parábola vertical en dos formas:* $y = a x^2 + bx + c$ $y = a(x - h)^2 + k$ ✍ *Se refuerza el estudio gráfica- parámetro.* ✍ *Noción de simetría.*	✍ **SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS.** ✍ **LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.** ✍ **ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS.** ✍ **LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA.**	✍ *Se sigue trabajando el plano cartesiano, la relación gráfica-parámetro, simetrías, elongaciones traslaciones, reflexiones* ✍ *En las funciones racionales se grafican y analizan algunas* ***hipérbolas****, aunque no con la definición de éstas como cónicas.*

Eje 5: **Funciones y Plano Cartesiano.** Concepto de función y sus elementos. Diversos tipos de variación, estudio de sus comportamientos. Relación parámetro- gráfica- variación. Vinculación ecuación y	✍ **VARIACIÓN PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES.**	✍ **FUNCIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES**. *(incluye mención de los números. complejos)*	✍ *Manejo amplio del plano cartesiano a través de Geometría Analítica.* ✍ *La circunferencia, la elipse y la parábola horizontal se pueden comparar con la recta y la parábola vertical para*	✍ **FUNCIONES POLINOMIALES.** ✍ **FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES.** ✍ **FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.**

función. Gama amplia de aplicaciones.			*reafirmar, el concepto de función por contras-tación.*	✍ **FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.**

PROGRAMA DEL PRIMER SEMESTRE DE MATEMÁTICAS

UBICACIÓN DEL CURSO

Este primer curso está enfocado prioritariamente a la revisión y al estudio de algunos conocimientos básicos del álgebra, pero sin descuidar la perspectiva de que éstos sirven de sustento y están relacionados con conceptos y procedimientos de los otros ejes temáticos. Es decir, no se trata de incluir contenidos del Álgebra por sí mismos, sino en función de una metodología propia y de la relación que éstos guardan con otras ramas de la Matemática.

Para favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra, se revisan de manera reflexiva tanto los números enteros y racionales como los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas, su jerarquía y los signos de agrupación. Esta revisión se trabaja a través de problemas de diversa índole, incorporando desde el inicio algunas estrategias de resolución de problemas.

También en este curso se comienza a trabajar el concepto de función y el manejo del plano Cartesiano, entretejiéndolos con la búsqueda de representaciones (algebraica, tabular y gráfica) para estudiar diversas situaciones que involucran cambio.

En cuanto al tratamiento general de los contenidos, más que la memorización de una fórmula o algoritmo, interesa que el alumno perciba la necesidad de contar con un camino más eficiente para resolver o representar cierto tipo de problemas o ejercicios que él ya ha percibido como análogos. Además de la traducción de un problema que se resuelve con una ecuación, es importante que comprenda la riqueza de la estrategia algebraica que le permite establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. Más que la repetición interminable de ejercicios que aparentan responder a un desglose exhaustivo de casos, se pretende que analice la estructura básica de ellos y vea cómo pasar de una situación nueva a otra que ya conoce.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el primer curso de Matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Conoce y maneja algunas estrategias para la resolución de problemas.
- Reconoce que la resolución algebraica de ecuaciones involucra un proceso que permite reducir una ecuación dada a otra más simple, hasta alcanzar una forma estándar.
- Desarrolla su capacidad de transitar por distintos registros de representación: verbal, tabular, algebraico y gráfico.
- Resuelve problemas que dan lugar a una ecuación de primer grado, una cuadrática, o un sistema de ecuaciones.
- Utiliza las representaciones algebraica, gráfica y tabular para estudiar fenómenos que involucran variación proporcional directa y de tipo lineal.
- Utiliza las representaciones algebraica y gráfica para modelar situaciones con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones.
- Adquiere la capacidad para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la unidad	Horas
I	Números y Operaciones Básicas	15
II	Variación Directamente Proporcional y Funciones Lineales.	20
III	Ecuaciones Lineales.	15
IV	Sistemas de Ecuaciones Lineales.	15
V	Ecuaciones Cuadráticas.	15

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Barnett, Raymond. *Álgebra,* Mc Graw-Hill, México, 2000.

Briton, Jack y Bello, Ignacio. *Matemáticas contemporáneas.* Harla, México, 1986.

Fernández, Josefa y Rodríguez, Ma. Inés. *Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática Elemental*. Síntesis, Madrid, 1991.

Gobran, Alfonse. *Álgebra elemental.* Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1990.

Larson, Ronald y Hostetler, Robert. *Álgebra.* Publicaciones Cultural, México, 1996.

Miller, Charles, *et al. Matemáticas: Razonamiento y Aplicaciones.* Addison Wesley Longman, México, 1999.

Smith, Stanley *et al. Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Addison Wesley Longman, México, 1998.

MATEMÁTICAS I
UNIDAD I. NÚMEROS Y OPERACIONES BÁSICAS

Propósitos:

✍ Revisar y dar significado a los diversos algoritmos de las operaciones básicas a través del planteamiento de problemas, reforzar el manejo de la prioridad de las operaciones y enriquecer el pensamiento aritmético del alumno.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
En relación a la resolución de problemas, el alumno: ? Se inicia en el manejo de algunas estrategias de resolución de problemas, como son: utilizar diagramas, ejemplificar con casos especiales, explorar valores extremos, trabajar "hacia atrás", reducir el problema a otro más simple. ? Utiliza algunas estrategias personales para resolver problemas de cálculo mental. ? Distingue en problemas numéricos, la información relevante de la irrelevante; así como también, los elementos conocidos de los que se desean conocer.	? Se propone la utilización de problemas clásicos sobre números como: cuadrados mágicos, pirámides, números de Fibonacci, Torre de Hanoi, Triángulo de Pascal, etcétera. ? Se sugiere plantear problemas de series numéricas o geométricas (por ejemplo: números triangulares, cuadrangulares, etcétera) que conduzcan a encontrar patrones numéricos. ? Es conveniente plantear problemas de pérdida y ganancia, medición de temperaturas, volúmenes, perímetros, excavaciones, áreas, profundidades marinas, etcétera que requieren del manejo de las leyes de los signos.	Números enteros. ? Uso, orden, representación en la recta numérica. ? Operaciones básicas, leyes de los signos. ? Prioridad de las operaciones. Números Racionales. ? Distintos significados y representaciones: ✍ División. ✍ Parte de un todo. ✍ Razón. ✍ Porcentajes. ✍ Fracciones equivalentes. ✍ Notación decimal.

? Expresa en forma verbal la solución de problemas con números enteros y racionales, los términos en los que ésta se plantea y explica el proceso de cálculo utilizado para resolverlos. ? Decide sobre las operaciones adecuadas —y su secuencia de ejecución— en la resolución de problemas numéricos. ? Formula conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos, mismos que comprueba mediante el uso de ejemplos y contraejemplos, método de ensayo y error, etcétera. *En cuanto al manejo de los números, el alumno:* ? Utiliza la recta numérica y las propiedades de los números para calcular expresiones aritméticas. ? Establece el significado de las operaciones aritméticas fundamentales, utilizando distintas representaciones: material concreto, diagramas, gráficos y explicaciones verbales. ? Utiliza los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números enteros y racionales.	? El cálculo mental se puede abordar a través de problemas que involucren una cadena de operaciones aritméticas. ? En el periódico u otros medios de comunicación pueden ser recursos para que los alumnos interpreten gráficas y den significado a los signos de los números. ? Proponer problemas que involucren la aplicación de porcentajes, así como su representación gráfica (barras, circular), insistir en que la cantidad base del cálculo del porcentaje representa el 100% o la unidad. ? Se recomienda el uso de la recta numérica para dar sentido y significado geométrico a las operaciones de números con signos. ? Se puede utilizar la recta numérica y las propiedades de los números para calcular expresiones aritméticas. ? El uso de la calculadora permite explorar los números, por ejemplo: determinar el número más grande que le cabe a la pantalla, generar aproximaciones de números irracionales con la función radical, conversión a números decimales, etcétera.	? Orden, representación gráfica en la recta numérica. ? Operaciones básicas. ? Mínimo común múltiplo. Máximo común divisor. ? Prioridad de las operaciones. Uso de signos de agrupación y prioridad del cálculo. Potencias y Radicales. Problemas diversos de corte aritmético.

? Representa a los números racionales de diversas formas: fracción común, porcentajes, decimales y viceversa. ? Reconoce que las fracciones equivalentes tienen la misma expre-sión decimal. ? Compara números enteros y racionales mediante la ordenación y la representación gráfica. ? Utiliza las formas de representación de un porcentaje —decimal y racional— para realizar cálculos. ? Encuentra un número racional entre otros dos números racionales dados. ? Utiliza diversas estrategias para contar, estimar o calcular cantidades, teniendo en cuenta la precisión requerida y el error máximo permitido. ? Utiliza fracciones o decimales según convenga, para simplificar cálculos. Elige el corte o redondeo adecuado en el caso de manejar decimales. ? Utiliza la jerarquía y propiedades de las operaciones, las reglas de uso de los paréntesis y leyes de los signos para el cálculo de expresiones aritméticas con más de una operación.	? La representación geométrica de la suma, resta, multiplicación y división de números enteros y racionales es un recurso para dar significado a los procedimientos de las operaciones básicas. ? Para visualizar la propiedad de densidad de los números racionales en la recta numérica se puede recurrir al uso de una escala conveniente y poner a los alumnos a obtener y localizar entre dos racionales dados otro racional. ? Con la representación de los distintos conjuntos numéricos, construir la recta real, haciendo mención de la de densidad de los racionales y de la existencia de los irracionales para “rellenar” la recta real.	

UNIDAD II
VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

Propósitos:

- A partir de la revisión de aspectos de la aritmética y de la noción de proporcionalidad, iniciar el manejo de la representación algebraica en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, la graficación de funciones lineales, su registro tabular y su relación con los parámetros de y= ax + b.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
En la presentación de diversas situaciones que involucran cambio, el alumno: ? Describe verbalmente en qué consiste el cambio y cuáles son los aspectos involucrados en él. ? Identifica cuál es la variable cuyos valores dependen de los que tome la otra. Ante una serie de datos, una tabla o situación verbal, en donde exista variación proporcional directa, el alumno: ? Obtiene los valores que se indiquen de **y** o de **x**, auxiliándose del reconocimiento de patrones o de la regla de tres. ? Obtiene o identifica, según el caso, la constante de proporcionalidad.	? Es importante rescatar algunos elementos aritméticos como múltiplo, fracciones equivalentes, razones, regla de tres, etcétera para iniciar el manejo de la proporcionalidad directa. ? Cuando la constante de proporcionalidad es negativa **(K < 0)**, es frecuente que el alumno diga que no existe proporcionalidad directa porque al "aumentar" una, la otra "disminuye". Es necesario aclararles que el hecho no radica en eso, haciéndoles ver por ejemplo cómo al duplicarse, triplicarse, etcétera la variable independiente, la otra a su vez se duplica, triplica, etcétera. O bien cómo al disminuir a la mitad, tercera parte, cuarta parte, etcétera a una de ellas, con la otra sucede lo mismo.	Variación Proporcional Directa Situaciones que involucran cambio. Introducción a la noción de variación. Identificación de las variables dependiente e independiente en situaciones concretas. Variación proporcional entre dos cantidades. Uso de tablas y gráficas. Análisis del cociente ***y/x*** para varias parejas de valores. Constante de Proporcionalidad. Problemas de variación proporcional directa.

- Compara diversos valores de y con los correspondientes de **x (y/x)** y observa la liga con la constante de proporcionalidad,

- Localiza en el plano cartesiano los puntos asociados a los datos que posee y traza la gráfica.

- Identifica en una gráfica los datos de la tabla correspondiente y construye la gráfica relacionada a los valores de una tabla dada.

- A partir del análisis de la gráfica, obtiene información de la situación a la que representa y lo expresa verbalmente.

Obtiene el modelo algebraico correspondiente.

Redacta el contexto de una situación que corresponda a un modelo de variación proporcional que se le proporcione. O bien, modifica la redacción, cuando se introduzcan cambios en el modelo de una situación dada.

Ante una serie de datos, una tabla o una situación verbal que dé lugar a una Función Lineal, el alumno:

- Para favorecer la formación de significados, es conveniente mantener una etapa inicial en la que el concepto de variación y el análisis de las situaciones se manejen básicamente en lenguaje común o en las representaciones que el alumno incorpore, antes de introducir las simbolizaciones convencionales.

- También para propiciar significados, a la vez que se trabaja en favorecer la **reversibilidad de pensamiento**, resulta conveniente pasar (estableciendo las modificaciones pertinentes) del lenguaje común al modelo algebraico, al gráfico, al tabular y viceversa.

- Los contenidos se prestan a la exploración y a la identificación de patrones de comportamiento, por lo que es conveniente aprovechar esto para desarrollar dicha habilidad de pensamiento.

- Cuando al graficar los alumnos elijan escalas diferentes para el eje **x** y el eje **y**, la inclinación visual de la recta se modifica, por lo que hay que analizar con ellos cómo incorporar este hecho al establecer relaciones entre gráfica y parámetro, o al comparar dos gráficas con diversas escalas.

Funciones Lineales

Formas de representación de una función lineal: tablas, gráficas y modelo algebraico.

Variación Lineal. Comparación entre los cambios de *y* respecto a los de ***x* (? *y*/? *x*).**

Análisis de los parámetros ***a*** y ***b*** en

el comportamiento de la gráfica de
y = ax + b

Vinculación entre ***a*** y el cociente ***(? y/? x)***.

Situaciones de diversos contextos que se modelan con una función lineal.

? Transita entre las distintas formas de representación (tabular, gráfica, algebraica) asociadas a una función lineal de la forma **y= ax + b**, con **b** distinto de 0. ? Distingue, por el contexto de la situación, si se trata de una variable discreta o continua, y lo toma en cuenta para construir la gráfica. ? Reconoce a **b** como el parámetro que desplaza verticalmente b unidades a la gráfica de la recta **y = ax.** ? Reconoce a **a** como el parámetro que determina una mayor o menor inclinación, respecto del eje x, de la recta **y = ax + b**. ? Grafica funciones de la forma **y= ax + b**, a partir de la información que proporcionan los parámetros **a** y **b**. ? Percibe que la inclinación de la recta está relacionada con la razón que compara los cambios de y con los de **x** (es decir, con ? ***y***/? ***x***). ? Identifica que en una Función Lineal, la variación de la variable dependiente es proporcional a la variación que sufre la variable independiente.	? En esta unidad se inicia el estudio de las funciones, pero no se pretende agotar todos los aspectos relacionados con el concepto, pues se irán incorporando con creciente grado de abstracción y formalidad a lo largo de los cuatro semestres, tanto en las unidades expresamente destinadas a trabajar con funciones, como en aquellas en las cuales desde otra óptica se puede reforzar alguna faceta de las mismas (en Geometría Analítica, por ejemplo). ? El **concepto de variación** permea al eje de funciones. Aquí se inicia con la variación más sencilla: la variación proporcional directa; misma que posteriormente podrá retomarse desde otro punto de vista o para contrastar con otras formas de variación. ? Es importante resaltar el potencial de aplicaciones que tienen la Variación Proporcional y las Funciones Lineales, por lo que se requiere presentar problemas de diversos contextos. ? Es conveniente seleccionar un número suficiente de problemas para trabajar tanto en clase como en casa.	

? Analiza las relaciones existentes entre ambas variables, para plantear tanto el modelo algebraico como el gráfico. Utiliza esos modelos para obtener información adicional de la situación dada. ? Percibe que las funciones lineales son una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.		

UNIDAD III. ECUACIONES LINEALES

Propósitos:

✍ Incrementar la capacidad del alumno para plantear problemas que conducen a ecuaciones lineales y su resolución por métodos algebraicos. Estudiar la noción de ecuación desde diversas perspectivas. Manejar su relación con las funciones lineales. Avanzar en el manejo del lenguaje algebraico.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
En cuanto a la resolución de problemas que dan lugar a una ecuación lineal en una incógnita, el alumno. ? Interpreta la expresión verbal o escrita de un problema y expresa la relación entre datos e incógnita por medio de la ecuación lineal correspondiente. ? Interpreta en el contexto del problema, el significado de la solución encontrada, en particular cuando se trata de números negativos o fracciones. ? Redacta el contexto de una situación que corresponda a un modelo expresado por medio de una ecuación lineal con una incógnita, o bien, incorpora los cambios pertinentes en la redacción de una situación dada, al introducir modificaciones en el modelo que la representaba.	? En el planteamiento inicial de problemas, además de reforzar la traducción entre los lenguajes verbal y algebraico, se pretende hacer ver al alumno la necesidad de trascender el uso de procedimientos netamente aritméticos, ya que aunque en algunos problemas resultan prácticos, en otros conducen a caminos complicados o largos. ? Es recomendable que en la etapa de ejercitación de la resolución de ecuaciones, la secuencia se presente aumentando el grado de dificultad, desde ecuaciones con la incógnita en un solo término, en dos, pero en el mismo miembro de la igualdad, hasta ecuaciones con expresiones racionales. Si además, se invita al alumno a que analice en cada ocasión cuál es la diferencia del caso nuevo respecto al anterior y de qué manera puede	Problemas que dan lugar a ecuaciones lineales en una incógnita. Su resolución por métodos informales. Ecuaciones lineales en una incógnita, como: ? Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas. ? Una condición que debe satisfacer un número buscado. ? Un caso particular de una función lineal. Resolución de ecuaciones lineales en una incógnita, por métodos algebraicos: ? Operar con ambos miembros de la igualdad. ? Transponer términos.

? Relaciona o reduce un problema dado con otro que ya ha resuelto o que resulta más sencillo de trabajar. Con relación a los conocimientos y destrezas propios de la temática de la unidad, el alumno: ? Comprende que las ecuaciones lineales en una incógnita, son un caso especial de igualdad entre expresiones algebraicas. ? Maneja con soltura la prioridad de las operaciones y el significado del uso de paréntesis para modificar dicha prioridad. ? Resuelve ecuaciones lineales en una incógnita a través de los procedimientos siguientes: a) Operaciones con ambos miembros de la igualdad. b) Transposición de términos. ? Reduce por medio de operaciones y propiedades válidas, una ecuación lineal a otra más simple de resolver.	transformarlo al que ya conoce, se le estará reforzando una estrategia general de resolución de problemas, a la vez que se contribuye a que conforme una idea general del procedimiento de resolución de las ecuaciones lineales, en contraposición a una visión de diversos casos que a veces se fomenta en los libros. ? Se recomienda utilizar problemas de muy diversos contextos que además de brindar un panorama de la vastedad de aplicaciones, ayude también a reforzar las vinculaciones entre diversas ramas de la matemática. (Problemas sobre figuras geométricas, de finanzas, de compra de artículos, de tarifas, de mezclas, de llenado de piletas con diferentes llaves, etcétera) ? Es conveniente seleccionar un número suficiente de problemas y ejercicios de ecuaciones para trabajar tanto en clase como en casa.	Resolución de ecuaciones de los siguientes tipos: ***a)*** $ax = b$ ***b)*** $ax + b = c$ ***c)*** $ax + bx + c = d$ ***d)*** $a(x + b) = c(x + d)$ ***e)*** $ax/ b = c/d$ ***f)*** $ax/b + c = dx / e$ ***g)*** $(x + b)2 = (x + c) (x + d)$ ***h)*** $(x + a) / (x + b) = (x + c) / (x + d)$ Interpretación gráfica de la solución de una ecuación lineal en una incógnita. Planteamiento y resolución de problemas de diversos contextos que dan lugar a ecuaciones lineales en una incógnita.

? Observa que cualquier forma que adopte una ecuación lineal, desde la más simple hasta las que involucran expresiones racionales, siempre puede reducirse, al simplificar términos semejantes o realizar las operaciones indicadas, a una ecuación de la forma **ax + b = 0** y con ello, resolverse fácilmente. ? Relaciona a las formas **ax + b = 0** y **ax + b = c** de la ecuación lineal como casos particulares de la Función Lineal **y = ax + b**, correspondientes respectivamente, a los valores específicos de **y=0** y **y=c**. Es decir, identificará a la ecuación lineal como un caso particular de una Función Lineal. ? A partir de la relación establecida en el punto anterior, asocia de manera adecuada, la solución de una ecuación de la forma **ax + b = 0**, con la abscisa del punto en donde la gráfica de la función **y = ax + b**, corta al eje **x**. ? Interpreta el hecho de que las ecuaciones lineales expresan una **condición que debe satisfacer un valor buscado**, como lo que permite modelar diversas situaciones.		

UNIDAD IV. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Propósitos:

✍ Profundizar en la noción de sistema de ecuaciones lineales, y al mismo tiempo en la ecuación lineal con dos incógnitas. Trabajar el método gráfico y los diferentes métodos algebraicos de solución. Analizar los diversos casos de sistemas dependiendo del número de soluciones.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
A partir de una situación dada o problema que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales, el alumno: ? Utiliza tablas de valores para explorar aquellos que satisfacen las condiciones dadas. ? Traduce las condiciones o restricciones del problema a un sistema de ecuaciones. ? Recuerda que una ecuación lineal en dos variables tiene por gráfica una línea recta y viceversa. ? Verifica que una pareja ordenada de números es solución de una ecuación lineal en dos variables. ? Identifica el punto de intersección de dos líneas rectas como la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado a dichas rectas.	? A través de los contenidos de la unidad se profundiza en los conceptos de Ecuación-incógnita y Función-variable, para comprender sus vinculaciones y diferencias. ? Esta unidad no está destinada a obtener la ecuación de la recta, ni a estudiarla desde el punto de vista de la Geometría Analítica. ? Se retoma lo que el alumno aprendió sobre la graficación de funciones lineales y se da un paso más al manejar las intersecciones con ambos ejes (abscisa y ordenada al origen). ? Se inicia el manejo del paralelismo por exploración de los parámetros, para analizar la consistencia o inconsistencia de los sistemas de ecuaciones.	Problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (casos sencillos), su solución por medio de una tabla de valores y gráficamente. Gráfica de la ecuación lineal en dos variables. Pendiente, ordenada y abscisa al origen. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, en un mismo plano. Interpretación geométrica de la solución. Sistemas Compatibles (consistentes) e Incompatibles (inconsistentes).

? Distingue, por el contexto del problema, si se trata de una variable discreta o una continua, y lo tomará en cuenta al graficar el sistema y obtener su solución. ? Obtiene de manera gráfica la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. ? Aprecia limitaciones del método gráfico para obtener la solución de un sistema de ecuaciones. A partir de un sistema de ecuaciones que obtenga o se le proporcione, el alumno: ? Identifica a partir de los parámetros de una expresión lineal dada, la ordenada y la abscisa al origen. ? Identifica a partir de la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 , si es compatible o incompatible. ? Infiere la compatibilidad (con solución) e incompatibilidad (sin solución) de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, a partir de los parámetros de las ecuaciones. ? Identifica Sistemas Equivalentes. ? Transforma sistemas de ecuaciones en otros equivalentes más sencillos.	? Al inicio de la unidad se propone la solución de problemas que involucren un sistema de ecuaciones lineales de manera informal (por ensayo-error, gráficamente), para introducir los conceptos de simultaneidad, sistema de ecuaciones y su solución. ? En los problemas que se utilicen para introducir el método gráfico de solución, es importante que se distinga cuándo se trata de una variable discreta y cuándo de una continua. Es conveniente tratar ejemplos con variables de ambos tipos. ? Es importante hacer énfasis en la inexactitud de los métodos anteriores y la necesidad de utilizar un método que no dependa de la precisión en los trazos o de la percepción visual para obtener el resultado. ? Se debe trabajar la algoritmia, sin descuidar el significado de los métodos de solución, esto es, el alumno debe comprender qué significa la búsqueda de la solución. ? Antes de estudiar los métodos algebraicos de solución, es importante introducir el concepto de sistemas equivalentes y la forma de obtenerlos, con el fin de que el alumno, en los diversos métodos, avance en la	Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2. Condición de paralelismo. Sistemas equivalentes. Métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2: Suma y Resta, Sustitución e Igualación.

? Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 por medio del método que considere conveniente: a) Suma y resta b) Sustitución c) Igualación Además, se espera que al término de la unidad, el alumno: ? Plantea problemas en diferentes contextos que lleven a sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 y los resolverá por cualquier método algebraico. ? Percibe que los sistemas de ecuaciones lineales, permiten representar, analizar y resolver diversos problemas de su entorno.	comprensión del "por qué se hace" y no solamente se quede con el "cómo se hace". ? El paso del enunciado de un problema en su expresión verbal a su expresión algebraica implica dificultad, por lo que el alumno debe tener una gran cantidad de oportunidades para realizarlo. Conviene que el maestro maneje un repertorio diversificado de problemas (geométricos, numéricos, velocidades, mezclas, tiempos de trabajo, económicos, etcétera) ? Analizar los casos de rectas coincidentes, paralelas y secantes (rectas que se cortan). Su relación con las pendientes, las características algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 correspondientes y su número de soluciones. ? Es importante que durante toda la unidad el estudiante pueda pasar de un registro a otro (verbal, tabular, gráfico y algebraico).	

UNIDAD V. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Propósitos:

- ✍ Profundizar, a través del planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas, en el concepto mismo de ecuación, en lo que significa que un número sea su solución, en la relación que existe entre grado de la ecuación y el número de soluciones. Mostrar el poder del Álgebra para encontrar tanto métodos alternos como generales de resolución.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
En relación con la actividad de resolución de problemas, el alumno: ? Analiza las condiciones y relaciones que se establecen en el enunciado verbal de un problema y expresará las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación algebraica de segundo grado. ? Reafirma la estrategia general en la resolución de problemas de reducir un problema nuevo a otro que ya se sabe cómo resolver. ? A partir del análisis del modelo algebraico de un problema, valora el método algebraico de resolución que resulta más conveniente.	Con el propósito de que el alumno parta de lo que conoce, analice limitaciones de ello y explore nuevos caminos que lo lleven a que al final obtenga la fórmula general y aprecie sus ventajas, se recomienda una secuencia como la siguiente: ? Enfrentar al estudiante a la solución de problemas que por su contexto o redacción lo lleven, con una alta probabilidad, a plantear ecuaciones de las siguientes formas: ? $\mathbf{ax^2 + c = d}$; $\mathbf{(x \pm m)^2 = n}$ **y** $\mathbf{a(x \pm m)^2 = n}$ de modo que con la orientación del profesor puedan resolverlas por inversión de operaciones. ? En alguno de los ejercicios con ecuaciones de la forma $\mathbf{a(x \pm m)^2 = n}$ efectuar el binomio al cuadrado y solicitar al estudiante que resuelva ahora la ecuación así escrita. Ello con la finalidad de que el alumno perciba en este caso la	Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita. Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas: a) $ax^2 + c = 0$ b) $ax^2 + c = d$ c) $ax^2 + bx = 0$ d) a(x + m)2 = n e) $(ax + b)(cx + d) = 0$ Resolución de la ecuación cuadrática completa $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. ? Factorización. ? Método de completar cuadrados. ? Fórmula General.

? A partir del análisis del modelo algebraico de un problema, anticipa el tipo de soluciones que éste arroja. ? Interpreta en el contexto del problema lo que significan las soluciones encontradas y elegirá, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto. Con relación a los conocimientos y destrezas propios del tema, el alumno: ? Utiliza los métodos siguientes para resolver una ecuación cuadrática: factorización, completar a un trinomio cuadrado perfecto, y uso de la fórmula general. ? Transforma una ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico. ? Identifica cuáles son los parámetros **a, b** y **c**, aún en ecuaciones "desor-denadas" o incompletas y los sustituirá correctamente en la Fórmula General.	insuficiencia de los métodos de despeje de la incógnita utilizados previamente y crear así las condiciones para conjeturar la posibilidad de transformar una ecuación cuadrática completa a otra de la forma $\mathbf{a(x \pm m)^2 = n.}$? Con el objetivo de explorar esta posibilidad, plantear la revisión del método corto para elevar un binomio al cuadrado, así como la factorización del factor común y de un trinomio cuadrado perfecto, a través de inversión de operaciones, y terminar con actividades de transformación de ecuaciones del tipo $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ a la forma $\mathbf{a(x \pm m)^2 + c = 0.}$? Después de lo anterior, enfrentar al alumno a la resolución de problemas que por el contexto o redacción, lleven con una alta probabilidad, a ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = d}$. Se requiere la orientación del profesor para resolverlas por el método de completar cuadrados ? Una vez trabajado este método, apoyar al estudiante para que con actividades de generalización, llegue a la fórmula general de solución de una ecuación cuadrática.	Análisis del discriminante $\mathbf{b^2 – 4ac.}$? El número i ? Raíces dobles ? Número y naturaleza de las soluciones de la ecuación **ax2 + bx + c = 0**

? Efectua las operaciones indicadas al aplicar la fórmula general, de modo que llegue a obtener las dos soluciones correctas. ? Comprende que cuando en el radical se obtiene un número negativo, no existe ningún número real que satisfaga esta condición, por lo que se requiere entrar al terreno de otro tipo de números llamados complejos que se forman a partir del número $i = \sqrt{-1}$ y son de la forma **a + bi.** ? Calcula el valor del Discriminante $\mathbf{b^2 - 4ac}$ para conocer la naturaleza y el número de soluciones distintas. ? Dadas las dos raíces de una ecuación, construirá la ecuación de la que provienen. En relación con actividades de generalización, el alumno: ? Comprenderá cómo se obtiene la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.	? En cuanto a la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, pueden ponerse los ejercicios en los que se tenga un producto de dos binomios igualado a cero y analizar cuándo esto es posible, haciendo notar que en cada caso la dificultad se reduce a resolver dos ecuaciones lineales sencillas. Si luego se efectúa el producto y se pide que la resuelvan la ecuación cuadrática resultante, el alumno podrá valorar, en su caso, de qué manera resultó más sencilla su resolución.	

PROGRAMA DEL SEGUNDO SEMESTRE DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

UBICACIÓN DEL CURSO

Las unidades que se trabajan en este curso, corresponden a ***los ejes de Funciones, Geometría Euclidiana y Trigonometría***; sin embargo, el Álgebra se sigue manejando a través de los contenidos de estas cinco unidades, y por otra parte se sientan los cimientos para abordar la temática correspondiente a la Geometría Analítica que se estudiará en el semestre siguiente.

El segundo semestre de matemáticas se inicia con el estudio de la función cuadrática, lo que permite, por un lado, avanzar en el concepto de función al introducir ahora un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría, y, por otro, vincular estas funciones con las ecuaciones cuadráticas que recién ha trabajado el alumno, aspecto que enriquece ambas temáticas y contribuye a la formación de significados sobre la resolución de ecuaciones.

El núcleo central del curso lo constituye el estudio de la geometría euclidiana que ayuda al alumno a describir los objetos y sus partes de acuerdo a sus formas, dimensiones y propiedades; contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validen dichas proposiciones, y finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados.

Así, las unidades correspondientes al eje de geometría euclidiana, contemplan las etapas de exploración, deducción y aplicación, mismas que permiten establecer un equilibrio entre dos tendencias[1] de la enseñanza de la geometría a nivel bachillerato. En consecuencia, en la unidad sobre “Construcciones y Elementos Geométricos Básicos”, se pretende que el alumno explore, observe patrones de comportamiento, conjeture y comience a argumentar; mientras que en la unidad de “Congruencia y Semejanza”, a partir del conocimiento básico de estos conceptos, se introduce al alumno al aspecto deductivo y a la comprensión

[1] Una tendencia propone un formalismo axiomático, mientras que la otra no trasciende la presentación mecanicista de hechos geométricos.

del por qué de las demostraciones; finalmente, en la unidad cuatro, “Perímetros, Áreas y Volúmenes”, se da paso a combinar diversos conceptos y resultados geométricos en aplicaciones teóricas y prácticas de la geometría.

Por último, la unidad cinco, está destinada a estudiar los “Elementos de la Trigonometría”, y representa un primer momento de síntesis de los conocimientos que el alumno ha adquirido sobre Aritmética, Álgebra y Geometría Euclidiana. A través de las razones trigonométricas, la resolución de triángulos y sus aplicaciones, el estudiante adquirirá nuevas herramientas que potencian, al combinarse, algunas propiedades y conceptos geométricos, como el de semejanza.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el segundo curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas, al incorporar estrategias y procedimientos para realizar construcciones geométricas y para comprender o proporcionar argumentos que justifican un enunciado.
- ✍ Percibe que existe una estructura en los conocimientos de la Geometría Euclidiana y que ésta estudia figuras y cuerpos presentes en su entorno.
- ✍ Identifica relaciones y patrones de comportamiento en diversas situaciones o problemas geométricos, y a partir de esto establece conjeturas o infiere algunas conexiones entre resultados.
- ✍ Valora la importancia de proporcionar una argumentación como la vía que otorga validez al conocimiento geométrico.
- ✍ Percibe a la Trigonometría como una herramienta de gran utilidad que combina aspectos del Álgebra, la Aritmética y la Geometría.
- ✍ Aplica conceptos, procedimientos y resultados de la Geometría Euclidiana y de la Trigonometría, para resolver problemas.
- ✍ Avanza en la comprensión del concepto de función, distingue las diferencias y similitudes entre las funciones lineales y cuadráticas. Modela con estas últimas algunas situaciones de variación cuadrática y de optimización.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No	Nombre de la Unidad	Horas
I	Funciones Cuadráticas.	15
II	Construcciones y Elementos Geométricos Básicos.	15
III	Congruencia y Semejanza.	15
IV	Perímetros, Áreas y Volúmenes	15
V	Elementos de Trigonometría.	20

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica.* Prentice Hall, México, 1991.

Gobran, Alfonse. *Álgebra elemental*. Iberoamérica, México, 1990.

Larson, Ronald y Hostetler, Robert . *Álgebra*. Cultural, México, 1996.

Miller, Charles *et al*. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Addison Wesley Longman, México, 1999.

Smith, Stanley A., *et. al., Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Addison-Wesley Longman, México, 1998.

GEOMETRÍA

Clemens, Stanley *et al*, *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas*, Addison Wesley, México, 1989.

Filloy, Eugenio y Zubieta, Gonzalo, *Geometría*, Grupo Editorial Íberoamérica, México, 2001.

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* Prentice Hall, México, 1991.

Garcia, Jesús y Bertrán, Celeste, *Geometría y Experiencias*, *Recursos Didácticos,* Alhambra, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

Miller, Charles et al. *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999.

TRIGONOMETRÍA

Fleming, Walter y Varberg, Dale. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,* Prentice Hall, México, 1991.

Flores, Homero y Victoria, Susana, *Introducción a la Geometría con el Geométra,* Iberoaméricana, México, 2001

Miller, Charles *et al. Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*, Addison Wesley Longman, México, 1999.

Rivaud, Juan José. *Trigonometría*, Limusa. México, 1992.

Smith, Stanley A., *et. al., Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, Addison-Wesley Longman, México, 1998.

MATEMÁTICAS II
UNIDAD I. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Propósitos:

✍ Continuar con el estudio de funciones a partir del estudio de situaciones que varían en forma cuadrática; contrastar este tipo de variación con la lineal. Analizar el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas en términos de sus parámetros e iniciar la resolución de problemas de optimización con métodos algebraicos .

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora, en una situación o problema que dé lugar a una función cuadrática, valores, condiciones, relaciones y comportamientos, a través de tablas, diagramas, etcétera que le permitan obtener información del problema, como un paso previo a establecer la representación algebraica. ? Diferencia dos tipos de variación fundamentales (lineal y cuadrática). ? Reconoce en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. ? Obtiene el modelo de la función cuadrática de una situación dada.	? Se sugiere iniciar con problemas de movimiento o geométricos. ? Se pueden modelar funciones cuadráticas a partir de tablas sobre este tipo de comportamiento, como arreglos de números triangulares, rectangulares, pentagonales o el patrón de comportamiento del número de diagonales en un polígono. ? También ayuda la elaboración de gráficas en clase, localizando puntos con ayuda de la calculadora. Después de una práctica formativa, se sugiere el trazado de gráficas con el apoyo de la computadora; se recomienda también el uso de Excel para tareas fuera del aula.	Situaciones que involucran cambio y que dan origen a funciones cuadráticas. Comparación de la función cuadrática con la función lineal. Intersecciones de la gráfica de una función cuadrática con el eje x. Estudio gráfico y analítico de la función: $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, casos particulares: $\mathbf{y = ax^2}$, $\mathbf{y = ax^2 + c}$, $\mathbf{y = a(x - h)^2}$, $\mathbf{y = a(x - h)^2 + k}$.

? Diferencia entre una ecuación cuadrática y una función cuadrática. ? Relaciona el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje **x**, con la naturaleza de las raíces. En particular identificará su ausencia con la existencia de raíces complejas. ? Transita por los diferentes tipos de registro de la función cuadrática (tabular, algebraico y gráfico). ? Encuentra el significado del papel que juegan los parámetros en el comportamiento de una gráfica. - En el modelo $\mathbf{y = ax^2}$, analiza el impacto de la constante **a**, y deducirá la orientación de la parábola, según la constante **a** sea mayor o menor que cero. - En el modelo $\mathbf{y = ax^2 + c}$ comprende el papel del parámetro **c**, en la traslación de la gráfica $\mathbf{y = ax^2}$ hacia arriba o hacia abajo del eje **x**, según se le asignan valores positivos o negativos a **c**. - En el modelo $\mathbf{y = a(x - h)^2}$, interpreta el papel del parámetro h, como la forma para desplazar la parábola $\mathbf{y = ax^2}$ a la derecha o la izquierda, según el valor de h sea positivo o negativo.	? Se puede sugerir a los alumnos después de algunos ejemplos, cómo aprovechar la propiedad de simetría de las funciones cuadráticas para graficar de manera más rápida. ? Mediante el análisis de distintos ejemplos tanto del comportamiento del registro tabular como de las gráficas correspondientes, se pueden revisar los conceptos de máximo y mínimo. ? En la expresión $\mathbf{y = ax^2}$, se analizarán las posibilidades del parámetro a: **a** ? **0, a** ? **0,** ?**a**? ? **1 ,** ?**a**? ? **1** y su relación con la orientación y abertura de la gráfica correspondiente. ? Es conveniente resaltar la importancia de los métodos algebraicos en la resolución de problemas de optimización, de diversos contextos, por ejemplo, numéricos, de áreas, costos, y ganancias.	Concavidad, máximo o mínimo. Problemas de máximos y mínimos. Resolución algebraica.

- En el modelo **$y = a(x - h)^2 + k$**, deduce que el impacto de los parámetros h y k es el de trasladar y desplazar la parábola **$y = ax^2$**. ? Integra a su lenguaje términos como concavidad, vértice, máximo, mínimo, traslación y simetría. ? Expresa una función cuadrática escrita en la forma general **$y = ax^2 + bx + c$**, a la forma estándar **$y = a(x - h)^2 + k$**; y puede describirla a partir del análisis de sus parámetros. ? Otorga significado a las coordenadas del vértice en términos del valor máximo o mínimo de la función. ? Resuelve problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática. ? Interpreta el comportamiento de la gráfica dentro del contexto de una situación dada.		

UNIDAD II. CONSTRUCCIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

Propósitos

✍ A través de construcciones con regla y compás, explorar las propiedades de las figuras elementales y algunos conceptos básicos de la Geometría Euclidiana. Reconocer patrones de comportamiento geométrico que permitan plantear conjeturas para proceder a su validación empírica.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce los elementos de una figura (punto, punto de Inter.-sección, líneas rectas, segmentos, semirrectas, etcétera). ? Obtiene de las construcciones, las nociones de: recta, segmento de recta, punto medio, mediatriz, ángulo, bisectriz, circunferencia, perpendicularidad y distancia de un punto a una recta. Los expresa en forma oral y escrita. ? Identifica los elementos mínimos que se requieren para trazar un segmento de recta. ? Establece los elementos mínimos que se requieren para trazar una circunferencia.	? Es importante iniciar con una revisión de los antecedentes históricos de la geometría y la forma como se sistematiza este conoci-miento. ? Para incrementar la destreza manual en el manejo de instrumentos geométricos, se sugiere dejar a los alumnos como tarea, la elaboración de dibujos libres, por ejemplo, los que se realizan en dibujo técnico, mosaicos de Escher, etcétera. ? Con las construcciones se puede inducir al alumno a que establezca propiedades y características de las figuras obtenidas, comparando medidas de ángulos y segmentos, considerando lados y vértices, etcétera. ? A través de preguntas, el profesor puede encauzar la reflexión sobre los trazos realizados en cada una de las	Construcciones con regla y compás Segmentos congruentes. Ángulos congruentes. Mediatriz y determinación del punto medio de un segmento. Bisectriz de un ángulo dado. Perpendicular a una recta dada que pasa por un punto: a) que pertenece a la recta. b) fuera de ella Triángulos Reproducción de un triángulo a partir de condiciones dadas (LAL, LLL, ALA)

? Recuerda la clasificación de ángulos por su abertura (agudo, recto, obtuso, llano) y posición (adyacentes, suplementarios, complementarios, opuestos por el vértice). ? Reconoce ángulos rectos en cualquier figura geométrica que los contenga. ? Explica en forma verbal y escrita, los trazos que siguió para realizar una construcción geométrica dada. ? Identifica y construye segmentos y ángulos congruentes. ? Recuerda clasificación de triángulos según sus lados y ángulos. ? Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados cualesquiera. ? Construye un triángulo congruente a partir de otro dado. ? Verifica triángulos congruentes haciéndolos coincidir.	construcciones, con la finalidad de identificar los elementos mínimos que se requieren para localizar un punto (intersección de rectas y/o circunferencias), trazar un segmento de recta y trazar una circunferencia. ? Se recomienda hacer énfasis en la noción de perpendicularidad y en su uso para “medir” la distancia de un punto a una recta. ? Con la orientación del profesor, los alumnos formularán las características que determinan los elementos estudiados, apoyándose, cuando corresponda, en patrones de comportamiento reconocidos en las diversas construcciones. ? Cuando en las construcciones se presente congruencia de algunos elementos se sugiere hacer coincidir las figuras como una forma de verificación. ? La construcción de triángulos tiene el propósito de establecer los datos mínimos requeridos para la construcción de triángulos congruentes. Para ello se propone trabajar de la siguiente forma: Pedir al alumno que construya un triángulo, si se le dan: a) Un dato: Lado o ángulo b) Dos datos: Dos lados, un lado y un ángulo, dos ángulos. c) Tres datos: Tres lados, dos lados y un ángulo, un ángulo y dos lados.	Desigualdad del triángulo. Rectas notables en el triángulo: mediatriz, bisectriz, mediana y altura. Puntos notables de un triángulo: Circuncentro, Incentro, Baricentro y Ortocentro. Reproducción de polígonos por triangulación. Circunferencia Rectas y segmentos. Rectas tangentes a una circunferencia a) Desde un punto sobre ella. b) Desde un punto fuera de ella. Localización del centro de una circunferencia dada.

? Identifica las alturas de un triángulo sin importar la posición que éstas tengan. ? Distingue las características que determinan a cada una de las rectas notables de un triángulo. Reconoce las diferencias entre unas y otras. ? Traza las rectas notables del triángulo. ? Identifica los puntos notables de un triángulo y puede explicar cuáles son sus características. ? Observa que los puntos notables de un triángulo, están alineados. ? Identifica cuerdas, radios, secantes y tangentes de una circunferencia. ? Construye rectas tangentes a una circunferencia. ? Describe correctamente el procedimiento requerido para realizar una construcción dada ? Argumenta, empíricamente, sobre la validez de las construcciones realizadas y lo explica de forma oral y escrita.	? Llevarlos a que analicen en qué casos se construye un único triángulo y por qué. Esto además sienta las bases para obtener los criterios de congruencia que se trabajarán en la siguiente unidad. ? En el caso de la construcción de un triángulo cuando se proporcionan tres lados, la actividad también se presta para que el alumno obtenga lo que establece la desigualdad del triángulo. ? Se recomienda trabajar problemas que involucren las construcciones en diferentes contextos. ? Se sugiere trabajar algunas construcciones con software *como Cabri, Geometer Sketcéterah Pad* u otros.	

UNIDAD III. CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

Propósitos:

- Ilustrar el papel de la demostración en los resultados de la geometría e iniciar al alumno en el método deductivo. Trabajar la congruencia y semejanza de triángulos, así como el teorema de Pitágoras.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce la importancia de la demostración para aceptar o rechazar conjeturas. ? Utiliza correctamente la nomenclatura empleada por el profesor . ? Explica la diferencia entre igualdad y congruencia. ? Conoce los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal. ? Identificará aquellos que son congruentes. ? Justifica la suma de los ángulos interiores y exteriores de cualquier triángulo.	? En la unidad no se pretende estructurar una teoría, sin embargo las demostraciones deben tener el formalismo mínimo requerido para el nivel bachillerato. ? En cada uno de los teoremas establecidos en la temática, es conveniente apoyarse de una construcción cuidadosa de la figura que relacione lo estipulado en ese teorema. Esto con la finalidad de establecer vínculos adecuados que favorezcan obtener una argumentación válida. ? Conviene resaltar la diferencia entre mostrar y demostrar, la necesidad de la deducción, la identificación de los elementos de una demostración así como las partes de un teorema y la forma de su recíproco.	Congruencia Congruencia de complementos y suplementos de ángulos congruentes. Congruencia de ángulos opuestos por el vértice. Justificación. Construcción de la recta paralela a otra por un punto dado. ? Postulado de las rectas paralelas. Congruencia de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.

? Justifica la expresión para encontrar el ángulo exterior de un triángulo como suma de los ángulos interiores no adyacentes. ? Aplica los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre segmentos, ángulos y triángulos. ? Aplica los criterios de semejanza para justificar la semejanza entre triángulos y la proporcionalidad entre sus lados respectivos. ? Identifica el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito en una circunferencia. ? Justifica la relación entre los ángulos central e inscrito en una circunferencia. ? Utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de algunos problemas.	? Hay que poner énfasis en la nomenclatura que se está utilizando y fomentar su uso por parte del alumno. ? Con el fin de refutar enunciados falsos, se recomienda utilizar contraejemplos. ? Es conveniente poner énfasis en el método deductivo y no en la memorización de las demostraciones por parte del alumno, así como propiciar que el alumno argumente en forma oral y escrita la validez de los resultados obtenidos. ? Se sugiere analizar la importancia del postulado de las paralelas en el desarrollo de la geometría, así como dejar a los alumnos un trabajo de investigación relativo a las geometrías no euclidianas. ? Al justificar la congruencia o semejanza de triángulos es importante cuidar la identificación de ángulos y lados homólogos ? Al trabajar la suma de los ángulos interiores de un triángulo, se propiciará que el alumno encuentre la expresión general para la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n*-lados.	Ángulos internos y el ángulo externo de un triángulo. a) Relación entre el ángulo externo y el ángulo interno. Justificación b) Suma de ángulos interiores de un triángulo. Justificación. c) Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono regular. Congruencia de triángulos Criterios de congruencia de triángulos. Justificación de las construcciones de: a) Bisectriz de un ángulo. b) Mediatriz de un segmento. c) Perpendicular a una recta. Teorema del triángulo isósceles y su recíproco. Justificación. Relación entre el ángulo central e inscrito en una circunferencia. Justificación.

	? Como parte de la introducción al concepto de semejanza, se puede recurrir a los modelos a escala, por ejemplo: mapas, maquetas, fotos, tangram, etcétera. ? También para motivar el tema de semejanza se puede pedir al alumno que investigue sobre la sección áurea y la importancia que le daban los griegos. ? Es importante remarcar la diferencia entre igualdad y congruencia. ? Es conveniente presentar algunas demos-traciones del Teorema de Pitágoras, incluyendo la que se basa en la semejanza de triángulos.	Semejanza y teorema de Pitágoras División de un segmento en n partes iguales. Construcciones. Teorema de Thales y su recíproco. Criterios de semejanza de triángulos. Teorema de la altura de un triángulo rectángulo. Justificación. Teorema de Pitágoras y su recíproco. Justificación.

UNIDAD IV. PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES

Propósitos:

? Aplicar conocimientos algebraicos y geométricos adquiridos en unidades anteriores en la resolución de problemas sobre figuras y cuerpos que involucren exploraciones geométricas, deducciones y cálculos numéricos. Propiciar el desarrollo de la imaginación espacial.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Comprende que la actividad de “medir” en geometría, una longitud, área o volumen, involucra contar cuántas veces cabe una unidad de medida en el objeto que se quiere medir. ? Distingue la diferencia entre unidades de longitud, superficie y volumen ? Calculará el perímetro de triángulos, cuadriláteros y otros tipos de polígonos regulares. ? Obtiene alguna de las fórmulas para calcular el área y el volumen de figuras y cuerpos por el método de descomposición y recomposición.	? En está unidad, además de obtener resultados sobre áreas de polígonos regulares, se aplicarán los conocimientos adquiridos en las unidades anteriores a la resolución de problemas de aplicación en distintos contextos y de un nivel de dificultad un poco mayor que los ya trabajados en las unidades mencionadas. ? Es conveniente resolver problemas donde se utilicen las propiedades de rectas paralelas, congruencia, semejanza de triángulos y teorema de Pitágoras; por ejemplo: cálculos de distancias inaccesibles, trazos de trayectorias de rayos de luz, el problema de Eratóstenes, etcétera.	Medida en geometría. a) ¿Qué es medir longitudes, áreas y volúmenes? b) Perímetro de un polígono regular. c) Medida aproximada de la longitud de la circunferencia. Obtención empírica de la fórmula. d) Área del rectángulo. e) Volumen de un prisma recto. Cálculo de áreas por descomposición y recomposición de figuras. Obtención de la fórmula del área del: triángulo, trapecio, rombo y paralelogramo.

? Utiliza las fórmulas obtenidas en la resolución de diversos problemas. ? Establece la razón que existe entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de un círculo. ? Encuentra las dimensiones de algunas figuras geométricas, cuando se conoce su perímetro y su área. ? Reconoce y aplica la razón que existe entre los perímetros de triángulos semejantes. ? Reconoce la razón que existe entre las áreas de triángulos semejantes. ? Aplica las propiedades de semejanza en la resolución de problemas sobre distancias inaccesibles, ? Deduce empíricamente las fórmulas para obtener la longitud de la circunferencia y el área de un círculo.	? En la obtención de la razón aproximada entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, se recomienda que los alumnos midan la circunferencia y el diámetro de varios objetos distintos: botellas, botes, vasos cilíndricos, y obtenga sus razones y el promedio de éstas. ? La idea de introducir el tema de cálculo de áreas, pretende que el alumno perciba la secuencia de razonamientos en la deducción de sus fórmulas. ? Después de resolver algunos problemas que involucren áreas de polígonos, plantear problemas de cálculo de áreas donde se involucre la razón entre perímetros o áreas de triángulos y rectángulos semejantes. ? En la obtención del área del círculo se puede utilizar un polígono inscrito de ***n*** lados, recomponiendo sus ***n*** triángulos en un paralelogramo. ? Los alumnos deberán construir un cilindro y un cono de igual radio y altura para comparar sus volúmenes de manera física.	Obtención de la fórmula del área de un polígono regular dado el apotema. Cálculo aproximado del área del círculo. Obtención empírica de la fórmula. Razón entre perímetros y entre áreas de triángulos semejantes. Problemas de longitudes y áreas que involucren semejanza, congruencia y teorema de Pitágoras. Problemas que involucren áreas y volúmenes de prismas, cilindros rectos y conos rectos, donde sea necesario aplicar conocimientos de congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras.

? Obtiene algunas fórmulas para calcular la superficie lateral y el volumen de prismas rectos. ? Generaliza la fórmula del volumen de un prisma para obtener la que proporciona el volumen de un cilindro. ? Deduce empíricamente que el volumen del cono recto, es la tercera parte del volumen del cilindro que tiene mismos radio y altura. ? Resuelve algunos problemas que involucren algunos de los siguientes elementos: Teorema de Pitágoras, semejanza, congruencia, fórmulas sobre perímetros, áreas, superficies laterales y volúmenes.	? Para trabajar el tema de áreas y volúmenes de un prisma, se recomienda que el alumno haga un manejo intuitivo para la obtención de las fórmulas; para ello, se puede pedir que manipule una caja rectangular y realice los cálculos que crea pertinentes para obtener los valores requeridos. ? Se puede llegar a una generalización de las propiedades de los prismas, si se le hace ver al alumno que un cilindro se puede manejar como un prisma de una “cantidad infinita” de lados. ? Para comparar volúmenes de cilindros y conos, se puede recomendar que los alumnos construyan un cono y un cilindro del mismo radio e igual altura. ? La construcción del rectángulo áureo permitirá consolidar las relaciones entre área y semejanza.	

UNIDAD V. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Propósitos:

- Mostrar a las razones trigonométricas como una herramienta y un modelo en la solución de problemas de diversos campos del conocimiento. Iniciar, asimismo, un nuevo saber matemático que culminará posteriormente con el estudio de las funciones trigonométricas.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Conoce que las razones trígono-métricas se derivan de una propiedad fundamental de los triángulos rectángulos semejantes, y sabe que existen seis de ellas. ? Aprecia la importancia de las tablas trigonométricas en la solución de problemas que involucren triángulos rectángulos. ? Construye una tabla de seno, coseno y tangente para los ángulos de 30, 45, y 60 grados. ? Usa tablas trigonométricas y calculadora para obtener los valores del seno, el coseno y la tangente, así como de sus recíprocos. ? Estima el valor del resultado en la resolución de triángulos y problemas, los contrasta con los	? Conviene realizar un breve esbozo histórico de la trigonometría, así como comentar el significado etimológico de los términos: grado, minuto, seno, tangente. ? También para introducir el tema y favorecer la motivación del alumno, se puede plantear un problema donde surja la necesidad de relacionar los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. ? Partiendo de que dos triángulos rectángulos semejantes tienen sus lados proporcionales, se puede hacer ver que las razones respectivas entre dos cualesquiera de sus lados serán las mismas para ambos triángulos, Se le puede pedir al alumno que analice las diversas posibilidades de combinar los lados. De ahí, llevarlos a establecer las razones trigonométricas seno, coseno y tangente y después, sus recíprocas.	Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para ángulos agudos. Valores recíprocos de las razones seno, coseno y tangente. Solución de triángulos rectángulos: a) Conociendo un ángulo y un lado. b) Conociendo dos lados. Razones seno, coseno y tangente de los ángulos de 15°, 30°, 45°, 60° y 75°. Las razones recíprocas del seno, coseno y tangente. Resolución de problemas. a) Ángulo de elevación, b) Ángulo de depresión c) Problemas de aplicación.

resultados obtenidos, y analiza la validez de los mismos en el contexto del problema. ? Adquiere habilidad en el manejo de la calculadora al resolver ejercicios y problemas de corte trígono-métrico. ? Maneja algebraicamente algunas identidades trigonométricas. ? Comprende la deducción de las fórmulas de las leyes de senos y cosenos. ? Resuelve problemas donde se involucren cualquier tipo de triángulos. ? Aplica, junto con los conocimientos de esta unidad, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el teorema de Pitágoras y los criterios de semejanza, en la resolución de problemas. ? Valora a la trigonometría como una herramienta de gran utilidad en la solución de una diversidad de problemas.	? Es importante recalcar que las razones de un triángulo rectángulo son funciones de los ángulos agudos del triángulo. Esto es, los cocientes o razones a/b. a/c, b/c permanecen invariantes para el mismo ángulo en un triángulo rectángulo cualquiera que sea su tamaño. (Mostrar el ejemplo: en el triángulo de 30-60 la razón seno siempre es igual a 0.5) ? A través de un problema de semejanza ya trabajado, se puede mostrar la importancia de las razones trigo-nométricas si se resuelve el problema por semejanza y por trigonometría y se analiza la ventaja de este último método. ? Plantear problemas donde se dan las medidas de los lados de un triángulo, por ejemplo, 7, 24 y 25 cm. y se requiere obtener las medidas de los ángulos, verificando previamente que el triángulo sea rectángulo. ? Es útil resolver problemas en los que los triángulos rectángulos se encuentran en diferentes planos, cuando forman parte de polígonos o cuando permiten el cálculo de parámetros de sólidos regulares.	Identidades trigonométricas fundamentales: a) Las recíprocas. b) Las de división. c) Las pitagóricas. Resolución de triángulos oblicuángulos. a) Ley de los senos y cosenos. b) Problemas donde intervienen triángulos oblicuángulos.

	? En aplicaciones se puede plantear, además de los problemas ya conocidos de distancias y velocidades, algunos problemas de trayectoria, haces de luz, astronomía, como son el diámetro de la Tierra, distancia de la Tierra al Sol, cálculo del diámetro del Sol, etcétera**.** ? Conviene proponer un problema donde se manifieste la necesidad de trabajar con triángulos oblicuángulos, por ejemplo, calcular la altura de una peña donde existe un obstáculo natural que impide arribar a ella. ? Analizar el comportamiento del seno, el coseno y la tangente cuando el ángulo agudo toma valores entre 0° y 90° en un triángulo rectángulo**.** Destacar los casos extremos en 0° y 90°. ? Se sugiere deducir una de las leyes de senos o cosenos.	

PROGRAMA DEL TERCER SEMESTRE DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UBICACIÓN DEL CURSO

En el tercer curso se generalizan los procedimientos algebraicos de solución para sistemas de ecuaciones al trabajar ahora con sistemas que incorporan más ecuaciones e incógnitas, o bien que incluyen ecuaciones cuadráticas. Por otra parte, se introduce una nueva representación de los objetos geométricos que permite estudiarlos desde otras perspectivas más propicias para la generalización y, con ello, aumentan también las posibilidades de su tratamiento y aplicación, tanto en matemáticas como en otras ramas del conocimiento. De esta forma se retoman conocimientos que el alumno ya trabajó en los semestres previos para ampliarlos o para darles un nuevo tratamiento.

En el estudio de los sistemas de ecuaciones, se extienden los métodos de suma y resta y el de sustitución para aplicarlos a sistemas con mayor número de ecuaciones e incógnitas, o a sistemas que incluyen ecuaciones cuadráticas. No obstante todas las posibilidades teóricas y prácticas que este tema abre, su tratamiento se reduce a ilustrar formas en que la matemática extiende sus conceptos y procedimientos cuando tiene que enfrentar situaciones de mayor dificultad, generalizando ideas centrales que surgen en los casos más simples. Es importante resaltar que los conocimientos adquiridos con esta temática, apoyarán algebraicamente el estudio de problemas y situaciones que se tratarán en las unidades posteriores.

En cuanto a la geometría analítica, que abarca la mayor parte del curso, su enfoque se centra en hacer énfasis en el método analítico que permite representar y analizar a través del álgebra, a las curvas y los objetos geométricos, que desde el punto de vista euclidiano sólo admiten formas particulares de construcción, estudio y análisis de sus elementos.

Es importante que el alumno perciba cómo a través de la introducción de un sistema de coordenadas y del manejo del método analítico, se obtienen procedimientos generales de construcción y análisis; se facilita la deducción de resultados geométricos (ya que esta tarea queda sujeta a las reglas del álgebra), y se favorece y profundiza el estudio del comportamiento de los lugares geométricos al identificar las características de los parámetros que las definen. Todo ello permite extender el campo de aplicaciones de la geometría euclidiana.

Aunque una parte importante del método analítico estriba en poder obtener la forma algebraica que representa a un lugar geométrico, para estudiarlo desde esta perspectiva, el tratamiento de la temática dista de centrarse en el manejo de un conjunto de fórmulas para cada posición de la recta o de las cónicas que se estudian; más bien, se intenta **manejar estrategias generales** y ubicar la importancia de contar con diversas formas de representación que apoyan la comprensión y facilitan el trabajo, dependiendo de los elementos o condiciones que se estipulan en un problema.

Actualmente, existe *software* en diversas versiones (*Geolap, Cabri, Derive*, etcétera) que favorece, entre otras, la exploración de las características de las cónicas por parte del alumno, el reconocimiento de patrones de comportamiento, la formulación de conjeturas, el establecimiento de relaciones entre la gráfica de una cónica y los parámetros de la ecuación asociada; por lo que es recomendable su uso para enriquecer el estudio de la Geometría Analítica.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el tercer curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir estrategias generales, tanto en la solución de los sistemas de ecuaciones, como en el análisis de la representación algebraica y gráfica de los objetos geométricos.
- Reconoce que se incrementan las posibilidades de análisis y aplicación de la Geometría Euclidiana, al incorporar al estudio de los objetos y relaciones geométricas la representación y los procedimientos del álgebra.
- Percibe a los sistemas de coordenadas como la noción fundamental para realizar el estudio analítico de los lugares geométricos.

- ✍ Identifica a partir del enunciado de un problema, la estrategia que le permita obtener los parámetros esenciales de un lugar geométrico, o bien, vislumbra un procedimiento alterno para obtener la ecuación que lo representa.
- ✍ Conoce las propiedades de los lugares geométricos estudiados en el curso, y obtiene la ecuación que los representa.
- ✍ Dada una ecuación con dos variables, lineal o cuadrática, identifica de qué tipo de “curva” se trata y obtiene información sobre sus elementos.
- ✍ Avanza en el concepto de sistema de ecuaciones y su resolución, al incorporar ecuaciones cuadráticas o un mayor número de ecuaciones e incógnitas.
- ✍ Resuelve problemas de aplicación utilizando los conocimientos adquiridos en las diversas unidades del curso.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la Unidad	Horas
I	Solución de Sistemas de Ecuaciones.	15
II	Sistemas de Coordenadas y Lugares Geométricos.	15
III	La Recta y su Ecuación Cartesiana.	15
IV	La Elipse, la Circunferencia y sus Ecuaciones Cartesianas.	20
V	La Parábola y su Ecuación Cartesiana.	15

3

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Caballero, Arquímedes, *et al*. *Geometría analítica,* Esfinge, México, 2000.

Filloy, Eugenio y Hitt, Fernando. *Geometría Analítica*, Iberoamérica, México, 1997.

Fuenlabrada, Samuel. *Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, México, 2000.

Fuller, Gordon y Tarwater, Dalton. *Geometría Analítica*, Addison-Wesley, México, 1999.

Holliday, Berchie et al. *Geometría Analítica con Trigonometría*, McGraw-Hill, México, 2002.

Leithold, Louis. *Álgebra y Trigonometría: con Geometría Analítica,* Harla, México, 1994.

Leithold, Louis. *Cálculo con Geometría Analítica*, Harla, México, 1992.

Swokowski, Earl. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002.

Torres, Carlos. *Geometría Analítica,* Santillana, México, 1998.

MATEMÁTICAS III. UNIDAD I. SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Propósitos:

✍ Ampliar el concepto de Sistema de Ecuaciones y extender de los procedimientos algebraicos de solución. Reafirmar el significado algebraico y gráfico de la solución de un sistema. Proporcionar una herramienta para el manejo del método analítico. Avanzar en la práctica de la operatividad algebraica.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas. ? Recuerda el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprende la forma en que se extiende a un sistema 3x3. ? Reafirma el concepto de sistemas equivalentes y entenderá que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones, se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirma la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.	? Se sugiere plantear y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos contemplados en la temática de la unidad, en diferentes momentos de avance de la misma. ? Es conveniente retomar los sistemas de ecuaciones 2x2 para reafirmar los diversos casos que se presentan en torno al número de soluciones, así como los métodos de solución. Una vez reafirmado esto, se puede pasar a analizar el caso de sistemas 3x3. ? Se sugiere graficar los sistemas lineales 2x2, utilizando los parámetros de una función lineal, o bien las intersecciones con los ejes, para retomar conocimientos ya vistos. A partir de las gráficas, recordar que un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas puede: a) Tener solución única. b) Tener infinidad de soluciones. c) No tener soluciones.	Situaciones que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3: a) Con solución única. b) Con infinidad de soluciones. c) Sin soluciones. Sistemas de ecuaciones equivalentes. a) Concepto. b) Forma triangular. Métodos de reducción y de sustitución. Sistemas de ecuaciones no lineales 2x2: a) Con una ecuación lineal y otra cuadrática.

? Distingue cuando un sistema de ecuaciones 3x3 o 4x4, está escrito en forma triangular y explica qué ventajas aporta esta forma para resolverlo. ? Dado un sistema de ecuaciones lineales 3x3, utiliza el método de suma y resta para transformarlo a la forma triangular, y a partir de ahí, obtiene su solución. ? A través de la última ecuación de un sistema de ecuaciones escrito en forma triangular, identifica si éste es compatible o no, o bien, si es dependiente o no. ? En el caso de sistemas 2x2, ya sea que ambas ecuaciones sean lineales o incluyan cuadráticas, explica a partir de una gráfica, qué significa que el sistema tenga una, ninguna o infinidad de soluciones. ? Para sistemas de ecuaciones 2x2 con ambas ecuaciones cuadráticas (dos parábolas, dos circunferencias, o una y una), traza un bosquejo que ilustre cómo están colocadas las graficas y, en consecuencia, cuántas soluciones tendrá el sistema.	? Relacionar cada uno de estos casos, cuando llegue el momento, con la configuración triangular del sistema obtenido por el método de suma y resta. ? En el caso del análisis gráfico de sistemas lineales 3x3, por tratarse de planos en el espacio, la interpretación gráfica tiene mayor dificultad. Por lo que dependiendo del grupo, conviene valorar qué tan conveniente es abordarlo y hasta dónde. Quizá se les puede dejar una actividad a los alumnos para que con cartones o tablas, visualicen las diversas situaciones en que pueden colocarse “tres planos” en el espacio, y de ahí explorar y predecir qué tipos de casos se presentan. ? En cuanto a los métodos de solución, sólo se están contemplando el de reducción (suma y resta) y el de sustitución. El primero permite obtener sistemas triangulares equivalentes y puede generalizarse a sistemas de orden mayor. El segundo es fácilmente transferible a los sistemas que contienen ecuaciones no lineales, y en muchos de estos casos es el método más apropiado. ? Para los sistemas no lineales, se sugiere que las ecuaciones cuadráticas correspondan a parábolas con eje sobre el eje Y, y circunferencias con centro sobre uno de los ejes, de modo que se	b) Con ambas ecuaciones cuadráticas. c) El significado gráfico de su solución. d) Método de sustitución. Problemas de aplicación.

? Aplica el método de sustitución para resolver sistemas de dos ecuaciones en los que una de ellas o ambas son cuadráticas. ? Aprecia que el álgebra es útil para obtener información acerca del comportamiento de algunos objetos matemáticos, como es el caso de saber si dos gráficas se intersectan o no, cuántas veces y en dónde. ? Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos estudiados en esta unidad, e interpreta el sentido de la solución hallada.	simplifiquen las dificultades algebraicas y gráficas para obtener o visualizar su solución; permitiendo con ello centrarse en las ideas sin distractores operativos. En las unidades de geometría analítica podrán trabajar con curvas de ecuaciones un poco más complejas. ? En cuanto a las diversas situaciones en las que pueden combinarse dos circunferencias y parábolas, podemos dejarlos que exploren, fijando un número de intersecciones determinado, y pidiéndoles que averigüen y argumenten si eso es posible o no.	

UNIDAD II. SISTEMAS DE COORDENADAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Propósitos:

- ✍ Mostrar una visión global del método de la Geometría Analítica como el medio para resolver problemas de corte euclidiano reduciéndolos a problemas algebraicos. Proporcionar los elementos que servirán en unidades posteriores para emplear el método en situaciones más complejas.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Reconoce que un aspecto relevante en el método de la Geometría Analítica, consiste en definir un sistema de referencia en un plano. ? Encuentra las coordenadas de un punto en el plano utilizando los sistemas de referencia polar y cartesiano. ? Localiza puntos en el plano cuando se proporcionen sus coordenadas polares o rectangulares. ? Representa de manera correcta, en cualquier cuadrante del Plano Cartesiano, un conjunto cualesquiera de puntos.	? Conviene antes de entrar al estudio de esta temática que el profesor exponga, a grandes rasgos, la intención de Descartes al generar el método de la Geometría Analítica. ? Para introducir lo que es un sistema de coordenadas y destacar su importancia, se pueden plantear problemas que hagan ver la necesidad de contar con la información necesaria y suficiente para localizar un punto en un plano, hasta llegar a la conclusión de que es necesario definir un sistema de referencia, en base al cual el punto queda localizado por dos valores llamados coordenadas. Se puede, por ejemplo, localizar un objeto sobre el plano de una casa, o bien ubicarlo teniendo como referencia un punto (por ejemplo un árbol), y una longitud. Esto induce el uso de los dos sistemas de coordenadas.	Estudio analítico de un punto en el plano. a) Representación numérica de un punto en el plano: - En el sistema de coordenadas polares. - En el sistema de coordenadas rectangulares. Estudio analítico de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano. a) Localización de un segmento rectilíneo en el plano. Condiciones necesarias y suficientes.

? Identifica las condiciones para representar un segmento rectilíneo en el plano cartesiano: las coordenadas de sus puntos extremos, o bien, las coordenadas de uno de ellos, la longitud del segmento y su ángulo de inclinación. ? Entiende los pasos de la deducción, de la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. ? Calcula la longitud de un segmento dadas las coordenadas de sus puntos extremos. ? Dadas las coordenadas de los puntos extremos de un segmento, calcula su ángulo de inclinación a través de su pendiente. ? Resuelve analíticamente problemas que impliquen determinar un segmento a partir de algunas de las propiedades que lo definen. ? Explica qué significa que un punto divida a un segmento rectilíneo en una razón dada. ? Dadas las coordenadas de los extremos de un segmento y las de un punto interior a él, calcula la razón en que éste último divide al segmento.	? Es recomendable iniciar el trabajo con el primer cuadrante y posteriormente, localizar un punto en el plano usando todos los cuadrantes, incluyendo puntos que están sobre los ejes de coordenadas. ? En relación al estudio analítico de un segmento, se puede plantear una secuencia de problemas que consideren: ✍ La necesidad de encontrar la mínima trayectoria entre dos puntos. ✍ La importancia de determinar la información necesaria y suficiente para localizar un segmento rectilíneo en el plano. ✍ Combinando estos dos aspectos, se puede proponer un problema que implique calcular la longitud del segmento, de modo que su contexto induzca a usar el teorema de Pitágoras, y con ello, obtener la fórmula de distancia entre dos puntos. ✍ Plantear problemas, cuya solución requiera calcular su ángulo de inclinación. ✍ Después de varios ejemplos concretos, se puede generalizar el procedimiento para trabajar en un contexto abstracto. ✍ En cuanto a la razón en que un punto dado divide al segmento, y su recíproco, si no se plantea un problema que le dé contexto, es importante inducir el caso general a través de estudiar la situación con segmentos paralelos a los ejes, e invitar al alumno	b) Longitud del segmento. Distancia entre dos puntos. c) Ángulo de inclinación del segmento. Concepto de pendiente. d) Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos. e) Coordenadas del punto que divide al segmento en una razón dada. Estudio analítico de algunos lugares geométricos en el plano cartesiano. a) Lugares geométricos sencillos que dan lugar a rectas y circunferencias y parábolas. -Su representación algebraica. -Intersecciones entre ellos o con los ejes cartesianos.

? Encuentra las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada. En particular, las coordenadas del punto medio. ? Dadas las coordenadas del punto medio y de uno de los extremos de un segmento rectilíneo, encuentra las coordenadas del otro extremo. ? Reconoce a una ecuación con dos variables, como la expresión general que satisfacen las coordenadas de los puntos de una “curva” en el plano. ? Resuelve problemas geométricos de intersección entre rectas, circunferencias o entre éstas y los ejes coordenados. ? Reduce algunas situaciones a otras más simples que ya sabe resolver, lo que reforzará esta estrategia de resolución de problemas. ? Incrementa su capacidad de generalizar, tanto al obtener fórmulas generales a partir de analizar casos concretos, como al interpretar un concepto en dos representaciones distintas. ? Identifica algunos de los procesos inversos que se presentan en esta unidad; lo que refuerza su capacidad de inversión de pensamiento.	a usar esto para obtener el caso general. ? En cuanto a lugares geométricos, se puede pedir a los alumnos que dibujen los puntos cuyas coordenadas satisfagan una condición verbal que dé lugar a rectas o circunferencias, someter a discusión las soluciones y pedir que simbolicen algebraicamente dicha condición. ? También ayuda someter a discusión grupal el tipo de información que le darían a una persona ausente para que pueda reproducir una recta o curva específica trazada en el plano cartesiano. ? Solicitar que escriban con sus propias palabras la información pertinente, y luego que la expresen algebraicamente. ? Ejercitar con varios ejemplos y solicitar que decidan (en forma no gráfica) si un punto cuyas coordenadas se dan pertenece o no a algunas de las curvas trabajadas. Plantear por último, el aspecto de encontrar la intersección con los ejes y entre curvas.	

UNIDAD III. LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos:

✍ Reafirmar el conocimiento del método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y avanzar en la solución analítica de problemas que involucran relaciones entre figuras rectilíneas estudiadas en Geometría Euclidiana.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Dada una ecuación lineal con dos variables, la identifica como una recta y viceversa. ? Encuentra la ecuación de una recta, dados distintos elementos que la definen. ? Reconoce las distintas formas de representación algebraica de la recta e identificará cuál de ellas conviene usar, dependiendo de las condiciones que se proporcionen. ? A partir de la ecuación de una recta, en cualesquiera de sus formas, encuentra los elementos que definen su posición y traza su gráfica.	? Se puede iniciar con una discusión sobre la información completa que se requiere para determinar la posición de una recta en el plano, y orientar la discusión para que se logren obtener las dos alternativas. ? Para que los alumnos exploren la condición que deben satisfacer los puntos que están sobre una recta, proponer ternas de puntos y pedirles que analicen si los tres se encuentran alineados o no. Se pueden elaborar bosquejos en el pizarrón de cómo quedaría la trayectoria del trío de puntos en ambas posibilidades. Posteriormente, "jugar" con el tercer punto de modo que su localización salga del espacio disponible. Con una orientación a través de preguntas y sugerencias pueden llegar a formular verbalmente la condición que conocemos sobre la igualdad de las pendientes.	La Recta ubicada en el Plano Cartesiano. a) Condiciones necesarias y suficientes para localizar una recta. La Ecuación Cartesiana de la Recta, cuando se conocen: a) Las coordenadas de dos de sus puntos. b) Su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. c) La ordenada al origen y su pendiente. d) Cuándo es paralela a uno de los ejes de coordenadas.

- Dadas la ecuación de una recta y las coordenadas de un punto, decide, sin recurrir a la gráfica, si éste pertenece o no a la recta.

- Dadas las ecuaciones de dos rectas, o bien, los elementos que definen sus posiciones, determina si se cortan o no y, en su caso, el ángulo de intersección y las coordenadas del punto donde se cortan.

- Expresa los argumentos que justifican las condiciones analíticas para el paralelismo o para la perpendicularidad de dos rectas.

- A partir de las ecuaciones de dos rectas, decide si son paralelas, perpendiculares o simplemente secantes.

- Comprueba algunas relaciones geométricas que involucran rectas, estudiadas en Geometría Euclidiana.

- Reconoce las relaciones presentes en una situación geométrica.

- Refuerza su capacidad para pasar de lo particular a lo general y viceversa.

- A partir de esto, se puede hacer que varíe el tercer punto pero siempre sujeto a la condición hallada, de modo que el paso a representarlo por (x, y) sea más natural. De aquí ya es fácil obtener la ecuación

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

y con base a ella las demás formas.

- Es conveniente enfatizar que las coordenadas de un punto perteneciente a una recta son soluciones de la ecuación lineal que la representa; esto ayudará a que el alumno pueda trabajar por sí solo los diversos problemas que se le presenten.

- Aunque se desea favorecer la independencia del alumno respecto al profesor en el proceso de su aprendizaje, en el caso del ángulo comprendido entre dos rectas que se cortan, se propone que el alumno únicamente obtenga la expresión para el ángulo en términos de los ángulos de inclinación de ambas rectas, ayudado del bosquejo gráfico, y que la deducción de la fórmula donde aparecen las pendientes la lleve a cabo el profesor, ya que reviste complicaciones algebraicas.

- La condición analítica de perpendicularidad, también es conveniente que la obtenga el profesor por las dificultades conceptuales inherentes.

Tratamiento analítico para determinar a partir de la ecuación de una o dos rectas:

a) Los elementos geométricos que la definen: ángulo de inclinación y uno de sus puntos, o dos de sus puntos.
b) Si un punto cuyas coordenadas se conocen, pertenece o no a una recta.
c) La intersección de dos rectas que se cortan.
d) El ángulo entre dos rectas que se cortan.
e) La condición de perpendicularidad o paralelismo de dos rectas.

Solución analítica de problemas de corte euclidiano.

a) Cálculo del área de un triángulo.
b) Comprobación en casos concretos de:
   - ✍ La concurrencia de las mediatrices de un triángulo.
   - ✍ La razón de 1: 2 en que el punto de intersección de las medianas de un

? Avanza en su desempeño respecto al método de la Geometría Analítica, al obtener la ecuación de la recta y resolver problemas que la involucran. ? Valora al Álgebra, no sólo como una herramienta para obtener resultados numéricos, sino también para establecer relaciones que proporcionan información acerca de la problemática que se estudia, esto a través de: ✍ Obtener, a partir de una de sus representaciones, las otras formas de la ecuación de la recta. ✍ Calcular los elementos que definen una recta a partir de su ecuación dada en la forma general.	? Para el último punto de la temática, el profesor puede guiar el análisis de lo que pide la situación con intervenciones como: quiero demostrar que estos elementos satisfacen lo dicho, luego, ¿se pueden representar algebraicamente?, ¿lo que deben satisfacer, tiene su contraparte con lo que deben cumplir las ecuaciones?, ¿con los elementos dados puedo representar lo que se pide, o requiero obtener primero otros datos? ? Es conveniente desde esta unidad que el alumno empiece, paulatinamente, a identificar con claridad **qué necesita** para obtener la expresión analítica del lugar geométrico que se pide y luego, plantee una serie de pasos de **cómo puede obtenerlo,** de modo que **vaya conformando una estrategia** de acción que lo ayude a entender la mecánica de los problemas y a no depender del profesor para saber qué camino seguir. ? Para comprobar la concurrencia de las mediatrices, etcétera se propone trabajar con un triángulo de coordenadas dadas y no en el caso general.	triángulo divide a cada una de ellas. ✍ La igualdad de los ángulos en un triángulo isósceles. ✍ La igualdad de los ángulos opuestos de un paralelogramo.

UNIDAD IV. ELIPSE, CIRCUNFERENCIA Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósitos

- Reafirmar el método analítico al obtener las ecuaciones de la elipse y la circunferencia y avanzar en el reconocimiento de formas y estructuras, en la formulación de conjeturas y en la resolución analítica de problemas de corte euclidiano.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: Respecto al estudio de la Elipse ? Realiza al menos una construcción de la elipse, y en función de ello: - Identifica los elementos que la definen. - Reconoce los tipos de simetría de esta curva. - Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico. - Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico. ? A partir de la expresión anterior, comprende cómo se obtiene la ecuación ordinaria (fuera del origen) de la elipse.	? Para motivar el interés y curiosidad de los alumnos, se les puede pedir que asistan al Museo de *Universum*, ubiquen ahí elipses y circunferencias, investiguen en dónde están presentes y algunas de sus características. Otros tópicos para investigar son los propósitos y características de la bóvedas de ciertos templos coloniales, o bien qué lugar ocupa el sol en las órbitas planetarias, etcétera. ? También se les puede involucrar en realizar los cortes del cono ya sea con conos de plastilina, unicel o "vasos" cónicos de papel, de modo que vean cómo de acuerdo al tipo de corte, se obtiene una u otra cónica. Esto también puede aprovecharse para hacer ver a la circunferencia como un caso límite de la elipse. ? Se recomienda usar el método del jardinero para trazar la elipse, ya que éste permite visualizar las propiedades de sus puntos, y llegar así a su definición como lugar geométrico. También se sugiere apoyarse en la expresión:	Estudio de la Elipse La elipse como lugar geométrico. a) Trazo de la elipse y sus propiedades de simetría. b) Definición geométrica de la elipse. c) Elementos que definen a la elipse: distancia focal, eje mayor y eje menor. Relación entre ellos. Ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes de coordenadas: a) Ecuación ordinaria con centro fuera del origen. b) Ecuación ordinaria con centro en el origen. c) Ecuación general.

? Utilizando la ecuación ordinaria de la elipse, obtiene las otras formas.

? Transita de la ecuación general de la elipse a la ecuación ordinaria y viceversa. Para ello, aplica el método de completar cuadrados.

? Determina los elementos esenciales de una elipse, a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica.

? Concatena con coherencia sus argumentos y deducciones en el proceso para obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una elipse.

? Aplica los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.

Con relación a la circunferencia

? Reconoce a la circunferencia como el lugar geométrico de mayor frecuencia en su entorno.

? Obtiene el lugar geométrico de la circunferencia como caso límite de la elipse.

$\mathbf{d(P, F_1) + d(P, F_2) = C}$ como un paso intermedio, que facilitará obtener la ecuación de la elipse.

? A partir de esta expresión el profesor puede conducir la deducción de la ecuación ordinaria con centro fuera del origen y eje mayor paralelo a alguno de los ejes de coordenadas.

? En la misma actividad del método del jardinero, pedirles que alejen y acerquen los focos, observen qué sucede y obtengan conclusiones al respecto.

? Utilizar el teorema de Pitágoras para establecer la relación entre **a, b** y **c**.

? Cada vez que obtengan la ecuación ordinaria, es bueno pedirles que tracen un boceto de su gráfica a partir del reconocimiento de sus elementos, de modo que valoren las ventajas que esto representa. Luego cuando ya estén trabajando con la fórmula general y se desee transformarla a la ordinaria, se les puede pedir que obtengan la gráfica y dejarlos que exploren dificultades y comparen lo que hacían cuando tenían la forma ordinaria. A partir de allí, tendrá sentido el aprender cómo llevar a cabo el camino de regreso de la general a la ordinaria, ya que éste, como sabemos, es más complicado.

? Para introducir la circunferencia como caso límite de la elipse, hay que aprovechar y retomar las observaciones que los alumnos obtuvieron cuando construyeron la elipse por el método del jardinero (cuando los dos focos coinciden) y con los cortes del cono (cuando el corte llega a ser paralelo a la

Aplicaciones:
a) La tangente a la elipse en un punto que pertenece a ésta
b) Intersecciones de rectas con la elipse.
c) Resolución de problemas diversos.

Estudio de la Circunferencia

La circunferencia como lugar geométrico:
a) Definición geométrica de la circunferencia.
b) Elementos que definen a la circunferencia.

Ecuación de la circunferencia.
a) Ecuación ordinaria, con centro fuera del origen.
b) Ecuación ordinaria con centro en el origen.
c) Ecuación general.

? Identifica los elementos que determinan una circunferencia. ? Obtiene la definición de circunferencia como lugar geométrico. ? Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen, a partir de la ecuación ordinaria de la elipse. ? Transita de la forma ordinaria a la forma general y viceversa, para ello, utiliza el método de completar cuadrados que ya conoce. ? Determina el centro y el radio de una circunferencia, a partir de su ecuación, dada tanto en la forma general como ordinaria y los utiliza para construir la gráfica. ? Ante una ecuación ordinaria de una elipse identificará si se trata del caso límite cuando se obtiene una circunferencia; en caso contrario, indica a cuál de los ejes de coordenadas es paralelo su eje mayor. ? Aplica los conocimientos adquiridos en la resolución de diversos problemas.	base del cono). Incluso se puede trazar la circunferencia con el método del jardinero. ? Se puede plantear el reto al alumno de obtener la ecuación de la circunferencia a partir de la ecuación ordinaria de la elipse. ? Por otra parte, podemos pedirles que expresen verbalmente la propiedad de los puntos que están sobre una circunferencia y que comparen si lo que establece la ecuación ordinaria obtenida a partir de la elipse coincide con dicha propiedad. ? Es conveniente hacer ver al alumno la importancia de estos lugares geométricos por las aplicaciones que tienen.	Aplicaciones: a) La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos. b) Ecuación de la recta tangente a una circunferencia, en uno de sus puntos. c) Intersecciones de rectas con una circunferencia. d) Resolución de problemas de diferente índole.

UNIDAD V. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósitos:

- Consolidar el manejo del método analítico a través del estudio de la ecuación de la parábola. Avanzar en el reconocimiento de formas, estructuras y procedimientos, al resolver diversos problemas que involucren tanto a la parábola como a otros lugares geométricos ya vistos.

TIEMPO: 15 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Realiza al menos una construcción de la parábola, y en función de ello: - Identifica los elementos que la definen. - Reconoce la simetría de esta curva. - Enuncia la definición de parábola como lugar geométrico. - Expresa, como paso intermedio, la característica que define a los puntos de la parábola, por medio de la expresión: **d(P, F) = d(P, L)** - Deduce la expresión con radicales que expresa la propiedad de los puntos de dicho lugar geométrico.	? Para motivar el interés y curiosidad de los alumnos, se les puede pedir que asistan al Museo de Universum y ubiquen ahí parábolas, e investiguen en dónde están presentes y algunas de sus propiedades. O bien, que obtengan información sobre alguno de los siguientes tópicos: las características de los faros de los coches, las antenas parabólicas, los grandes proyectores de luz que se utilizan en las inauguraciones, las trayectorias de móviles en un campo gravitacional constante, etcétera. ? También se puede trabajar con el corte del cono que proporciona esta cónica. Dado que ya lo hicieron para la elipse y la circunferencia, se les puede invitar a que exploren y conjeturen qué tipo de corte hay que hacer en esta ocasión y traten de argumentar por qué antes de verificar haciendo el corte supuesto. Una vez obtenido, es deseable que además lo contrasten con los de las otras cónicas.	La parábola como lugar geométrico a) Trazo de la parábola y sus propiedades. b) Definición geométrica de la parábola. c) Elementos que definen a la parábola: foco, directriz, eje de simetría, lado recto. Relación entre ellos. d) Definición de parábola como lugar geométrico. Ecuación de la parábola con eje paralelo a alguno de los ejes de coordenadas: a) Ecuación ordinaria con vértice en el origen.

? A partir de la expresión anterior, deduce la ecuación ordinaria (con vértice fuera del origen) de la parábola.

? Distingue, de acuerdo a las condiciones dadas (coordenadas del foco, ecuación de la directriz u otros) cuándo es parábola horizontal o vertical, y hacia dónde se abre.

? Relaciona lo que estudió para funciones cuadráticas respecto al papel de los parámetros dentro del comportamiento de la gráfica de la parábola vertical.

? Utiliza esto último para analizar la relación entre los parámetros y la gráfica de las parábolas horizontales.

? Infiere que para transitar de la ecuación general de la parábola a la ecuación ordinaria, requiere, como en el caso de la elipse y la circunferencia, aplicar el método de completar cuadrados que ya conoce. Se ejercitará al respecto.

? Valora ventajas y desventajas de cada una de las formas, ordinaria o general, en la graficación y análisis de esta curva.

? Se recomienda usar alguno de los métodos (con doblado de papel, con circunferencias concéntricas cuyos radios van aumentando proporcionalmente y se construyen tangentes a ellas, con escuadras y un hilo, etcétera.) para el trazo de la parábola sin proporcionar la definición, sino una serie de indicaciones. Después de que los alumnos hayan unido los puntos y vean qué curva les salió, reflexionen sobre el procedimiento seguido para que así obtengan la condición que satisfacen los puntos de la parábola.

? Antes de enfrentar al alumno a la deducción de la forma ordinaria, es conveniente que se le pida calcular la distancia de cualquier punto a los ejes de coordenadas, y la distancia entre dos puntos que están sobre una recta paralela a los ejes.

? Para favorecer la formación de significados, también se sugiere utilizar la expresión:

$$\mathbf{d(P, F) = d(P, L)}$$

como un paso intermedio para obtener la ecuación de la parábola, a partir de la condición que la caracteriza expresada en forma verbal.

? A partir de esta expresión el profesor puede conducir la deducción de la ecuación ordinaria con vértice fuera del origen.

? Para reforzar la definición, los alumnos pueden medir con regla o con compás las distancias involucradas y corroborar que son iguales.

b) Ecuación ordinaria con vértice fuera del origen.
c) Ecuación general.

Aplicaciones:
a) Problemas de corte geométrico
b) Problemas diversos, que surgen de las características de esta curva.

? Determina los elementos esenciales de una parábola a partir de su ecuación dada en la forma ordinaria o general, y los utiliza para bosquejar su gráfica. ? Concatena sus argumentos y deducciones en el proceso de obtener la definición, la ecuación y la gráfica de una parábola. ? Aplica los conocimientos adquiridos sobre esta curva, en la resolución de algunos problemas.	? Si el grupo y el tiempo se prestan a ello, se puede trabajar con las tangentes a la parábola y sus aplicación a problemas concretos. En las diversas unidades de este semestre, es conveniente, de ser posible, apoyarse en algún software (como *Geolap, Cabri, Derive*) para que el alumno identifique características, establezca relaciones entre gráficas y parámetros, reconozca regularidades, etcétera.	

PROGRAMA DEL CUARTO SEMESTRE DE MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UBICACIÓN DEL CURSO

En Matemáticas IV, por medio del estudio de diversas clases de funciones, se consolidan e integran conceptos y procedimientos de los ejes temáticos que el alumno ha venido asimilando en los cursos anteriores, tanto en el manejo de expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos geométricos. Corresponde a este semestre profundizar y ampliar el concepto de función; identificar sus elementos; incorporar la notación funcional; realizar un análisis cualitativo en el que se establecen relaciones entre los parámetros de la representación algebraica, la gráfica y la forma de variación de la función en cuestión; explorar simetrías y transformaciones en el plano e introducir la noción de función inversa y con ello, fomentar el desarrollo de la reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o de un proceso de pensamiento). Las funciones que se estudian corresponden a distintos tipos de variación, lo que permite mostrar al alumno una amplia gama de aplicaciones de esta importante herramienta matemática.

Por otra parte, también se avanza en los ejes metodológicos y en el desarrollo de habilidades, ya que a través de las cuatro unidades que integran el cuarto semestre, el estudiante trabajará con conceptos de mayor abstracción, establecerá generalizaciones, obtendrá modelos algebraicos, analizará comportamientos, combinará procedimientos, determinará parámetros, interpretará gráficas y resultados, dándoles sentido dentro del contexto de la situación que está modelando.

Así, este curso constituye un momento de síntesis y culminación de una etapa tanto en lo temático como en lo metodológico; a la vez, prepara el inicio de otra, en donde el concepto de función jugará un papel importante en el estudio del cálculo, la estadística y otras disciplinas.

El tratamiento de los contenidos de Matemáticas IV, está enfocado a ir entretejiendo nuevos conocimientos con actividades (tanto concretas como intelectuales) que lleven al alumno a apropiarse del conocimiento, de modo que el curso no se convierta en una serie de definiciones y recetas de manipulación que se deben memorizar sobre los diversos tipos de funciones. Por el contrario, se está pensando en un manejo dinámico de los contenidos que le permita al alumno, al final del curso, identificar el comportamiento que caracteriza a una situación o fenómeno de variación y estar capacitado para construir el modelo que mejor lo describa.

Como ya se comentó para el caso de la geometría analítica, es recomendable el uso de algún *software* como *(Geolap, Cabri, Derive,* etcétera.) ya que favorece que el alumno explore las características de los diversos tipos de funciones, reconozca patrones de comportamiento, formule conjeturas, establezca relaciones entre la gráfica y los parámetros presentes en su regla de correspondencia, etcétera.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el cuarto curso de matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- Incrementa su capacidad de resolución de problemas, al conocer y manejar nuevas herramientas para modelar y analizar situaciones y fenómenos que se pueden representar con las funciones estudiadas en este curso.
- Enriquece y utiliza de manera integrada, diversos conceptos y procedimientos de la aritmética, el álgebra, la trigonometría, las geometrías euclidiana y analítica en el estudio y modelación del tipo de funciones trabajadas en este curso.
- Modela diversas situaciones que involucran variación funcional y a través del análisis del comportamiento de la función respectiva, obtiene información y conclusiones sobre la situación modelada.
- Consolida su manejo del plano cartesiano, a través de la graficación de funciones, y el dominio de la vinculación entre los parámetros y las características de la gráfica asociada.
- Obtiene conclusiones sobre el comportamiento de las funciones estudiadas y es capaz de distinguir el tipo de variación que las caracteriza.

- ✍ Comprende y maneja el concepto de función, así como el sentido e interrelación de subconceptos, características y procedimientos asociados a él.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

N_0.	Nombre de la Unidad	Horas
I	Funciones Polinomiales.	20
II	Funciones Racionales y con Radicales.	20
III	Funciones Trigonométricas	20
IV	Funciones Exponenciales y Logarítmicas	20

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Barnett Raymond, *et al*. *Álgebra*, Mc Graw-Hill Interamericana, México, 2000.

Barnett Raymond, *et al*. *Precalculo: Funciones y Graficas*, Mc Graw-Hill, México, 2000.

Jonson, Murphy, y Steffensen, Arnold. *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*, Trillas, México, 1998.

Larson, Ronald, Hostetler, Robert. *Álgebra*, Publicaciones Cultural, México, 1996.

Leithold, Louis. *Matemáticas previas al cálculo: Análisis Funcional y Geometría Analítica*, Harla, México, 1996.

Sullivan, Michael. *Precálculo*, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.

Swokowski, Earl w., *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002

Rodríguez, Francisco, *et al*. *Paquete Didáctico para Matemáticas III*. *Guía del Profesor*, CCH Oriente, UNAM, México, 2002.

MATEMÁTICAS IV. UNIDAD I. FUNCIONES POLINOMIALES

Propósitos:

✍ Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora en una situación o problema que da lugar a una función polinomial, las condiciones, relaciones o comportamientos, que le permitan obtener información y sean útiles para establecer la representación algebraica. ? Modela situaciones que den lugar a una función polinomial. ? Establece la noción de función enfatizando la idea de expresar, sujeto a una condición, una cantidad en términos de otra. ? Examina ecuaciones algebraicas con dos variables o su gráfica para decidir si se trata de una función o no.	? Se recomienda iniciar con problemas de áreas y volúmenes que dan lugar a funciones de segundo y tercer grado; analizar, en el contexto del problema dado, el comportamiento de la función y su gráfica. ? Se sugiere que el profesor realice un bosquejo histórico de la evolución del concepto de función. ? Es conveniente que en el salón de clase el alumno obtenga las gráficas de las funciones: $f(x) ? ? x^3$, $f(x) ? ? x^4$, y que como tarea extra clase dibuje las gráficas de $f(x) ? ? x^5$ y $f(x) ? ? x^6$ con el objeto de que visualice la relación que existe entre el exponente y el signo del término de mayor grado de la expresión polinomial, respecto a la concavidad de la gráfica, y a la vez, distinga la extensión del dominio y del rango correspondiente a cada función tratada.	Situaciones que dan lugar a una función polinomial. Noción generalizada de función. a) Relación entre dos variables que cumple ciertas condiciones. b) Conjuntos asociados: dominio y rango. c) Regla de correspondencia. d) Notación funcional f(x). Concepto de función polinomial a) Notación $f(x) ? a_n x^n ? \ldots ? a_3 x^3 ? a_2 x^2 ? a_1 x ? a_0$ b) Grado de una función polinomial.

- ? Proporciona el dominio y rango de una función polinomial dada.

- ? Comprende el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.

- ? Relacionará a la ecuación

$$a_n x^n ? \dots ? a_3 x^3 ? a_2 x^2 ? a_1 x ? a_0 ? 0$$

como un caso particular de la función polinomial asociada.

- ? Resuelve ecuaciones polino-miales que se puedan factorizar utilizando los distintos métodos de exploración señalados en la temática.

- ? Identifica los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.

- ? A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial construye una función polinomial y bosqueja la gráfica asociada a ella.

- ? Determina la concavidad de la gráfica en funciones del tipo ***f(x) = ax^n +c*** ,en base al signo de ***a*** y a la paridad de ***n.***

- ? Se sugiere retomar lo que el alumno ya vio para funciones lineales y cuadráticas y extenderlo a las propiedades de las funciones polinomiales de grado mayor a dos haciendo hincapié en que:

a) Los ceros de una función son las soluciones o raíces de la ecuación f(x) = 0, y corresponden a las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas, además de la relación que existe entre los factores del polinomio y los ceros de la función polinomial.

b) La relación existente entre el término independiente de la ecuación, con el punto donde la gráfica de la función correspondiente intersecta el eje de las ordenadas.

c) Cuando se le suma o resta un número a la variable de la función, su gráfica sufre una translación horizontal sobre el eje de las abscisas.

d) Cuando se le suma o resta un número a la función, su gráfica sufre una translación vertical sobre el eje de las ordenadas.

e) Cuando se multiplica a la función por un número real, puede cambiar la concavidad y el índice de crecimiento.

c) Gráfica de funciones polinomiales de la forma:

$f(x) = ax^3 + c$ con ***a, c*** ? ?
$f(x) = ax^4 + c$ con ***a, c*** ? ?

Métodos de exploración para la obtención de los ceros, aplicable a las funciones polinomiales factorizables de grado 3 y 4.

a) División de polinomios
b) División sintética.
c) Teorema del residuo
d) Teorema del factor y su recíproco.
e) Divisores del término independiente
f) Identificación de tipos de raíz:
Enteras, racionales, reales, complejas y su multiplicidad.

Bosquejo de la gráfica de una función polinomial.

$$f(x) ? a_n x^n ? \dots ? a_3 x^3 ? a_2 x^2 ? a_1 x ?$$

a) Intersecciones de la gráfica con los ejes cartesianos.
b) Análisis del comportamiento:
Valor de $\mathbf{a}_n$
Concavidad

? Determina las concavidades de la gráfica en base al signo y al exponente del término de mayor grado de la función polinomial y los ceros de la misma. ? Bosqueja la gráfica de funciones polinomiales a partir del comportamiento local y al infinito. ? Resuelve problemas de aplicación.	? Se recomienda el uso de la computadora para construir las gráficas de las funciones utilizando software como *Excel, Derive, Cabri*, etcéteraétera. ? Se sugiere considerar y comentar como aspecto histórico, el Teorema Fundamental del Álgebra y las aportaciones de Abel y Galois.	Índice de crecimiento (alargamiento o compresión. c) Traslación horizontal y vertical: $f(x ? k), f(x) ? k$ d) Noción de intervalo. e) Intervalos donde f(x) es positiva. f(x) es negativa. f) La no-interrupción de la gráfica. Problemas de aplicación

UNIDAD II. FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

Propósitos:

- Continuar con el estudio de las funciones, a través de las funciones racionales y con radicales. Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia identificar su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

TIEMPO : 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: En relación a funciones racionales ? Explora situaciones o problemas que dan lugar a una función racional, en particular las que involucran variación inversa o inversamente proporcional al cuadrado de la variable. Analiza las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica. ? Establece la regla de correspondencia de una función racional, asociada a un problema. ? A partir de la regla de correspondencia de una función racional, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica e identifica su(s) punto(s) de ruptura y asíntotas.	? Se sugiere iniciar la unidad con fenómenos de variación inversamente proporcional tales como: a) variación de la presión respecto al volumen de un gas a temperatura constante; b) velocidad en relación al tiempo en una distancia constante; y c) tiempo de realización de un trabajo con variación de trabajadores, etcéteraétera. Después se pueden presentar, por ejemplo, las leyes de Coulomb y de la Gravitación Universal. ? Es conveniente introducir la noción de intervalo con el objeto de establecer el dominio y rango restringidos por las condiciones del problema y construir una tabla adecuada para su gráfica. Hay que hacer énfasis en la imposibilidad de la división por cero. Lo anterior permite hacer un análisis global de la función; es útil hacer preguntas sobre la interpolación y extrapolación de valores.	Funciones Racionales Situaciones que dan lugar a funciones racionales. Noción de intervalo en la recta real. Estudio del comportamiento analítico y gráfico; local y al infinito por medio del dominio y rango de las funciones del tipo: $f(x) ? \frac{a}{x ? b} ? c ... f(x) ? \frac{a}{(x ? b)^2} ? c$ $f(x) ? \frac{P(x)}{Q(x)}$; con *P(x)* y $Q(x)$ lineales o cuadráticas, con a, b y c ? ?

- Identifica el dominio de definición y el rango de una función racional, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.

- Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica de una función racional, y obtiene conclusiones sobre el problema correspondiente.

- Resuelve problemas sobre valores extremos, en una función racional, por medio de una aproximación numérica.

Respecto a funciones con Radicales:

- Explora en una situación o problema que da lugar a una función con radicales, las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.

- Establece la regla de correspondencia de una función con radicales, asociada a un problema.

- A partir de la regla de correspondencia de una función con radicales, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica.

- Ayudan problemas como la construcción de una lata cilíndrica de volumen dado que requiere determinar las dimensiones que permiten utilizar el mínimo de material, Para ello, se puede llevar al alumno a encontrar una primera aproximación por medio de valores enteros y posteriormente por medio de valores con decimales (décimos, centésimos o milésimos).

- Para las funciones con radicales, es útil presentar problemas como el de hallar la distancia mínima entre dos móviles que se separan en direcciones perpendiculares o problemas que utilicen el Teorema de Pitágoras.

- También conviene establecer la necesidad de resolver desigualdades para identificar el dominio de este tipo de funciones, sin caer en un estudio riguroso de las mismas

- Se puede apoyar el desarrollo de la unidad, haciendo uso de la computadora para recabar datos experimentales, aritméticos, gráficos y algebraicos, a través de software como:
  Cabri
  Excel.
  WinPlot.
  Derive
  Máxima, entre otros.

Funciones con Radicales

Situaciones que dan lugar a funciones con radicales del tipo

$f(x) \; ? \; \sqrt{ax \; ? \; b}$;

$f(x) \; ? \; \sqrt{ax^2 \; ? \; bx \; ? \; c}$

Estudio analítico y gráfico del dominio y el rango de una función del tipo anterior.

Resolución de problemas con fenómenos de diversa índole (geométricos y físicos), susceptibles de modelarse a través de funciones racionales o con radicales.

? Identifica el dominio y rango de una función con radicales, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema. ? Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica, de una función con radicales, y obtendrá conclusiones sobre el problema correspondiente. ? Resuelve problemas sobre valores extremos, por medio de aproximaciones numéricas en las cuales se utilicen funciones con radicales.	Este trabajo puede ser complementado con investigaciones de los alumnos respecto a algunas leyes o fenómenos físicos que se expresan con funciones racionales o con radicales.	

UNIDAD III. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Propósitos:

✍ Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre gráfica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.

TIEMPO : 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diagramas, tablas, expresiones algebraicas, etcétera que le permitan obtener información de ello, como un paso previo al establecimiento de conceptos, y al manejo de las representaciones pertinentes. ? Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente. ? Identifica el ángulo, como una rotación de un radio de un círculo. Lado inicial y lado final.	? Tanto al inicio como en el desarrollo de la temática, es útil incorporar ejemplos de fenómenos de comportamiento periódico, cuya modelación involucra fundamentalmente seno y coseno que se refieran a contextos diversos que despierten interés en el alumno, como pueden ser: ondas sonoras, encefalogramas, ciclo de la respiración, estudio de las mareas, biorritmo, corriente alterna, intensidad de la luz diurna etcétera. ? Recordar el concepto de ángulo, la forma en que se mide, hablar de radianes y ángulos negativos. ? Invitarlos a construir una tabla que relacione los ángulos de 30°, 45°, 60°, 90° y 180°, por ejemplo, con sus respectivos valores en radianes.	Situaciones que involucran variación periódica. Generalización, en el plano cartesiano, de las razones trígonométricas para un ángulo cualquiera. a) Círculo unitario: extensión de las funciones seno y coseno para ángulos no agudos b) Ángulos positivos y negativos. c) Ángulo de referencia. Sus cuatro posiciones. d) Medida de ángulos con distintas unidades: grados y radianes. e) Cálculo del seno y el coseno para ángulos mayores de 90°.

? Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa. ? Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario. ? Generaliza el concepto de razón trigonométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera. ? Expresa las razones trigonométricas como funciones, con los ángulos medidos en radianes. ? Identifica en las funciones del tipo $f(x) = a sen(bx + c) + d$ $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ la frecuencia, la amplitud, el periodo y ángulo de desfasamiento. Los usará para dibujar directamente la gráfica. De igual manera será capaz de identificar en la gráfica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.	? Una vez que se ha introducido el círculo unitario, y en él se ha explicado la forma en que pueden calcularse el seno y el coseno para ángulos diversos no agudos, hay que pedirles que ellos lo hagan para algunos círculos con radios diferentes, de modo que vean que el tamaño del radio no afecta el resultado; a la vez, sirve para reforzar el procedimiento. ? Analizar el comportamiento del seno, coseno y tangente, cuando el ángulo varía de 0° a 90°; de 90° a 180°; de 180° a 270° y de 270° a 360°. Guiar al alumno para obtener conclusiones sobre signos, repetición de valores, qué sucede cuando ***x*** toma los valores 0°, 90°, 180° etcéteraétera. ? Es conveniente utilizar la calculadora para hacer más eficientes los cálculos y conversiones. ? Para trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, se puede retomar el círculo unitario, trazado en papel milimétrico en la orilla de la hoja, para que en el resto de ella vayan construyendo la gráfica. En clase se puede trabajar con coseno y dejarles que tracen la del seno. Ya con estas dos se procedería a graficar la función tangente y relacionar los ceros del coseno con los rompimientos de la gráfica.	Gráfica de las funciones seno, coseno y tangente. a) Análisis del dominio y rango. b) Noción de amplitud, periodo y frecuencia. Definición de función periódica: $f(x + k) = f(x)$. Gráfica de las funciones: $f(x) = a sen(bx + c) + d$ $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ a) Análisis del comportamiento de sus parámetros ***a***, ***b***. ***c*** y ***d.*** b) Fase y ángulo de desfasamiento. Las funciones trigonométricas, como modelos de fenómenos periódicos. Problemas de aplicación.

? Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, ondas electromagnéticas, etcétera.	? Se aprovecharían las gráficas de estas tres funciones para estudiar sus características (dominio, rango, simetrías, etcétera.) resaltando la periodicidad y las relaciones entre las tres gráficas. ? Solicitarles que expresen con sus propias palabras y luego con símbolos, la condición de variación periódica. ? A partir de las gráficas de algunos fenómenos o situaciones que se modelen con seno y coseno, introducir el concepto de amplitud, periodo, diferencia de fase, frecuencia. Dejar que ellos en casa construyan gráficas para distintos valores de estos parámetros. ? Con un mismo ejemplo, analizar cómo puede modelarse indistintamente por seno o coseno, y resaltar el hecho de que habiendo identificado que se trata de este tipo de variación periódica, el problema de la modelación se reduce a determinar cuáles deben ser los valores de los parámetros ***a, b, c*** y ***d***, en las expresiones: $f(x) ? asen(bx ? c) ? d$ $f(x) ? a\cos(bx ? c) ? d$? Se sugiere apoyarse en el uso de software como *Excel, Derive, WinPlot y Máxima.*	

UNIDAD IV. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Propósitos:

- Continuar el estudio de las funciones trascendentes con las funciones exponenciales y logarítmicas, cuya forma peculiar de variación, permite modelar diversas situaciones de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango de una función, así como la relación entre parámetros y gráfica,.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: Respecto a Funciones Exponenciales ? Explora en una situación o fenómeno que presente crecimiento o decaimiento exponen-cial, las relaciones o condiciones existentes y analiza la forma en que varían los valores de la función respectiva. ? Reconoce que en este tipo de situaciones, para valores de **x** igualmente espaciados, son constantes las razones de los valores correspondientes de **f(x)**, ? Identifica que en la regla de correspondencia de las funciones que modelan este tipo de situaciones, la variable ocupa el lugar del exponente.	? Se sugiere iniciar el tema con alguna situación que ilustre la variación exponencial (y la logarítmica en su momento). A través de su exploración, incorporar los conceptos y las formas de representación, de modo que tengan un sentido e interpretación en el contexto de la situación analizada, antes de proceder a un estudio más general y abstracto de este tipo de funciones. ? Para ayudar a los alumnos a identificar la característica de la variación exponencial, conviene que al presentarles una serie de datos así relacionados, calculen algunas **razones** de los valores de ***f(x)*** para valores de ***x*** "igualmente espaciados"; de modo que puedan observar que se obtiene una constante.	Funciones Exponenciales Situaciones que involucran crecimiento y decaimiento exponencial. Análisis de la variación exponencial: a) Papel que desempeña la variable. b) Crecimiento y decaimiento. c) Representación algebraica. d) Contraste de comportamientos entre funciones exponenciales y funciones potencia.

? Obtiene, mediante el análisis de las condiciones de una situación o problema o bien del estudio del comportamiento de algunos valores que obtenga, la expresión algebraica **$f(x) = ca^x$** que le corresponda.

? Explica por qué la base **a debe ser mayor que 1,** en las funciones del tipo **$f(x) = a^x$** y **$f(x) = (1/a)^x$**.

? Recuerda el significado de un exponente negativo, y lo utilizará para manejar la equivalencia entre **$f(x) = (1/a)^x$** y **$f(x) = a^{?x}$**

? Proporciona el dominio y el rango de una función exponencial dada.

? Traza la gráfica de algunas funciones exponenciales como: 2^x, 3^x, 10^x, e^x. Les aplica las modificaciones pertinentes que produzcan, en la gráfica, traslaciones horizontales y verticales.

? Compara el comportamiento entre funciones exponenciales y funciones potencia. (2^X con x^2 o con $\mathbf{x^3}$ por ejemplo). Obtiene conclusiones al respecto.

? Otro momento de reflexión en la unidad, es acerca del “significado” de un exponente que no es entero, sobre todo cuando tampoco es racional, ¿qué significa $3^?$ o $2^{?x}$ por ejemplo?

? Para presentar y comentar la definición de logaritmo de un número, conviene introducir una pregunta que origine una ecuación en la que el exponente es la incógnita (en un problema relativo a una función exponencial) y que el alumno intente despejarla. Luego, hacer ver que para resolver la ecuación se requiere de un nuevo concepto e incluso una nueva simbolización.

? Para el manejo de las propiedades de los logaritmos, no se está pensando en numerosos ejercicios. Dentro de la parte de aplicación, hay situaciones y problemas que les demandarán su uso frecuente.

? La relación entre ***$y = a^x$*** y ***$\log_a y = x$*.** ayuda a introducir la noción de función inversa, por lo que es importante que al trazar la grafica de una de ellas a partir de la otra, se analice y explique con cuidado el porqué del dominio de una y otra, o por qué precisamente se reflejan mutuamente en la recta ***$y = x$*** que corresponde a la función identidad.

Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:

$f(x) = ca^x$ con a?1 y c? 0
$f(x) = c(1/a)^x$ con a?1 y c? 0

Revisión del dominio y rango. Papel que desempeña ***c***.

Importancia y caracterización del número e .

Las propiedades:

$a^x a^y = a^{x+y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$.

Problemas diversos de aplicación.

Funciones Logarítmicas

Situaciones que dan lugar a funciones logarítmicas.

La función logaritmo como inversa de la función exponencial. Noción de función inversa.

? Identifica que en **$f(x) = a^x$ (con a>1)** un exponente positivo indica crecimiento exponencial, mientras que uno negativo, habla de decaimiento. Interpreta este hecho tanto en la gráfica de la función como en el contexto de la situación dada. ? Aplica los conocimientos adquiridos respecto a funciones exponenciales, para modelar algunas situaciones de diversos contextos. Respecto a Funciones Logarítmicas ? Explica verbalmente el significado de **$\log_a x$.** ? Explica el porqué de la equivalencia entre las expresiones **$y = a^x$** y **$\log_a y = x$.** Transita de una expresión a la otra. ? Identifica que para una misma base **a**, la función exponencial y la función logaritmo respectiva, plantean situaciones inversas una de la otra. (**$\log_a a^x = x$** y **$a^{\log_a x} = x$**) ? Conoce la noción de función inversa y explica en sus propias palabras qué sucede cuando se aplica una después de la otra.	? A partir de lo que han estudiado para otros tipos de funciones, se puede guiar a los alumnos para que establezcan de manera general, las modificaciones requeridas a los parámetros de la función ***$f(x) = ca^x$*** (o ***$f(x) = \log_a x$***) , para que la gráfica se traslade horizontal o verticalmente, se refleje en el eje de las ***x***, se incremente su variación, etcétera. ? Es conveniente trabajar con problemas de diversa índole, como pueden ser: interés compuesto, crecimiento de una población, desintegración radiactiva, asimilación de un medicamento, depreciación del precio de un coche, escalas de intensidad de un sonido o de un sismo, etcétera. ? Se recomienda el uso de la calculadora para el cálculo de logaritmos y valores de ***a^x*** y de algún *software* de los ya mencionados en otras unidades, para la graficación de estas funciones.	Equivalencia de las expresiones ***$y = a^x$*** y ***$\log_a y = x$.*** Logaritmos con base 10 y naturales. Propiedades de los logaritmos incluyendo la expresión para cambio de base. Gráficas de funciones logarítmicas. Su relación con la gráfica de la función exponencial de la misma base. Su dominio y rango. Problemas diversos de aplicación

? Representa por medio de funciones logarítmicas, algunas situaciones que se le presenten, y aplica en ellas, cuando se requiera, las propiedades de los logaritmos. ? Menciona las ventajas de trabajar con los exponentes para efectuar cálculos y resolver problemas. ? Construye la gráfica de algunas funciones logarítmicas, en particular de **f(x) =log x** y de **f(x) = ln x.** ? Construye la gráfica de **$f(x) = \log_a x$** (para algún valor de **a**) a partir de reflejar la gráfica de su inversa, en la recta **y = x.** ? Reconoce a las funciones exponenciales y logarítmicas como una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.		

COMISIÓN DE REVISIÓN Y AJUSTE DE LOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICAS I AL IV

Rosario Preisser Rodríguez, Dora Lidia Rodríguez Zúñiga, Óscar Cuevas de la Rosa, Alfonso Escoto Jaramillo, Pedro M. Zerendieta Méndez, Cristino Juan Jiménez Flores, Alfredo Paulín Zamora, Sofía B. Salcedo Martínez, Ma. Concepción Allende Rodríguez, José Luis Macías Ávila, Ruperto Gaona Peláez, Ma. Victoria Popoca Yánez, Fco. Javier Rodríguez Pérez, Reynaldo de la Vega Cerón, Patricia Cafaggi Félix, Socorro Nova Covarrubias, Santos Pérez Martínez, Roberto P. Robledo Arana, Silvia Madrigal Hernández, Bertha Medina Flores, Jorge Morales Ramírez, Emigdio Navarro Esquivel, Rafael García Álvarez, Héctor Pérez Aguilar, Ricardo Martínez Zertuche.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU