Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional

Colegio de Ciencias y Humanidades

Programas de Estudio

Área de Matemáticas

Cálculo I–II

Índice

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Presentación

Las asignaturas del Área de Matemáticas correspondientes a los semestres de quinto y sexto del Plan de Estudios del CCH incluyen dos cursos optativos de Cálculo Diferencial e Integral, con la perspectiva de brindar a los estudiantes que opten por ellos la oportunidad de construir los conceptos y procedimientos básicos del cálculo, a la vez que completan su formación en esta disciplina al reforzar el empleo de estrategias, la capacidad de resolución de problemas, el desarrollo de habilidades y de diversas formas de razonamiento, como el inductivo, el deductivo y el analógico.

Los cursos de cálculo, al impartirse en los dos últimos semestres, constituyen la culminación de la formación matemática del ciclo del bachillerato. En ellos se retoman y aplican conocimientos de los cursos obligatorios anteriores, conforme se van incorporando los conceptos y técnicas del cálculo. Para el bachiller es el primer acercamiento a esta importante rama de las matemáticas. El nivel de conocimiento que adquiera enriquecerá la formación de su pensamiento matemático y así enfrentará con éxito los estudios superiores que realice.

En concordancia con el Modelo Educativo del Colegio, donde el aprendizaje del alumno es la actividad rectora, se propone como idea sustantiva darle significado a los conceptos, técnicas y procedimientos con base en el estudio de situaciones problémicas en diferentes contextos de aprendizaje, en las que el cálculo es una herramienta fundamental para su comprensión, análisis, y solución, con el propósito de que sea capaz de resolver problemas, abstraer, establecer conjeturas y encontrar el sentido de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral.

Dada la creciente importancia de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como un medio en la construcción de un ambiente de experimentación en el aula es conveniente, sean consideradas para la puesta en práctica de los programas de estudio; esto contribuirá al desarrollo del pensamiento matemático desde otras perspectivas.

Finalmente, la formación que se adquiere con base en los procesos de enseñanza y de aprendizaje que le dan identidad a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, debe contribuir a la construcción sólida de las bases conceptuales que permitan a los egresados continuar sus estudios universitarios.

Relaciones con el Área y con otras asignaturas

El apropiarse de los conceptos, técnicas y procedimientos propios del Cálculo Diferencial e Integral permitirá al alumno enriquecer el análisis de diversas situaciones, tanto en el ámbito matemático como el de otras disciplinas como la física, la química, la biología, la economía, la administración, entre otras. En las licenciaturas de corte científico y técnico el Cálculo Diferencial e Integral forma parte de su requisito curricular.

Enfoque de la materia

Enfoque disciplinario

La selección de los conceptos, técnicas y métodos del Cálculo Diferencial e Integral para ser incorporados a los programas, toma en cuenta: el carácter propedéutico y terminal en la formación del alumno, la concepción de la matemática como disciplina científica y la caracterización de los objetos de estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

En primer término, respecto a la formación del alumno, se toma en cuenta la necesidad de proporcionarle conocimientos suficientes para enfrentar con éxito sus estudios superiores; además de comprender y resolver con mejores recursos culturales diversas situaciones de la vida cotidiana y dotarlo de estrategias de aprendizaje y capacidades analíticas que le permitan superar las exigencias que el trabajo productivo demanda.

En segundo término, no menos importante para dicha selección, es la interpretación de las matemáticas como disciplina científica. Al respecto se considera que:

a) Las matemáticas son un cuerpo de conocimiento lógicamente estructurado que estudia las relaciones cuantitativas y de forma de objetos abstractos que surgen de analizar situaciones concretas mediante procesos y razonamientos cada vez más depurados.

b) En los procesos de descubrir y construir el conocimiento matemático se reconoce la importancia de la búsqueda intuitiva, los titubeos, el tanteo, las suposiciones, las dudas e incluso los errores.

c) Como área de conocimiento destaca que el carácter abstracto y general de conceptos y métodos le genera un gran potencial de aplicaciones.

d) En sus métodos y estructura aparece el rigor lógico como componente indispensable para aceptar como válidas sus afirmaciones, lo que obliga a proporcionar una rigurosa demostración de éstas.

e) En sus usos y aplicaciones se relaciona con otras ciencias lo que se manifiesta con una vinculación más estrecha con los procesos tecnológicos.

Un tercero y último aspecto, la caracterización de los objetos de estudio del cálculo diferencial e integral, considera que esta rama de las matemáticas se articula a partir de dos ideas fundamentales, la variación y la acumulación. Dos representaciones significativas de estas ideas, que le dieron origen, se refieren a la solución de problemas en los ámbitos geométrico y físico. En el aspecto geométrico, son la obtención de la recta tangente a una curva y la obtención del área bajo una curva; en el escenario de la física es la modelización de la velocidad cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado y la obtención de la distancia recorrida cuando se conoce la velocidad.

Para la concreción de estas dos ideas centrales, la variación y la acumulación, que se traducen en los conceptos fundamentales del cálculo, la derivada y la integral, se incorporan otros conceptos, técnicas y métodos que se describirán posteriormente al presentar los propósitos de cada curso; al respecto es pertinente hacer las siguientes precisiones:

- Si bien el concepto de función es el sustento para la derivada y la integral, no se incorpora como un tema de estudio de estos programas dado que, en cursos anteriores, principalmente en el curso de Matemáticas IV, se ha trabajado con amplitud y profundidad. Emplearlas en el contexto de los conceptos de derivada e integral permitirá profundizar en su comprensión.
- Se reconoce que el concepto de límite es fundamental para una construcción completa del cálculo, pero al considerar que es un primer acercamiento al estudio de esta disciplina y a la experiencia y conocimientos adquiridos en los primeros cuatro semestres, se optó por realizar un acercamiento a la idea esencial del límite a partir de procesos infinitos dado que permiten reconocer la tendencia, estabilización y la posibilidad de predicción de valores y comportamientos de las variables involucradas, para enfrentar desde esta perspectiva el estudio de la derivada y la integral.
- Aun cuando la percepción intuitiva de la continuidad de una función ha permeado en el desarrollo de los cursos anteriores, al trabajar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones, este concepto no forma parte explícita de la temática; la justificación obedece a que en este primer acercamiento a las ideas esenciales del cálculo es posible llevarlo a cabo con esa percepción intuitiva, lo cual posibilitará la apropiación formal de este concepto en cursos de cálculo en sus estudios en el nivel superior, si éstos así lo demandan.

Considerando que la materia de Cálculo Diferencial e Integral ofrece al bachiller un primer acercamiento sistemático a esta disciplina, y tomando en cuenta el propósito de su formación, las características de las matemáticas como disciplina científica y el objeto de estudio del cálculo diferencial e integral, la selección del contenido disciplinario se orienta bajo las siguientes premisas:

- Desarrollar el sentido del cálculo diferencial e integral mediante la comprensión de diferentes situaciones que se modelan con las herramientas de esta disciplina, así como el establecimiento de conexiones con otros contextos matemáticos y otras disciplinas científicas.
- Identificar el carácter abstracto de los conceptos de variación y acumulación, a partir de analizar diferentes contextos del ámbito matemático y de otras disciplinas en los que surgen dichos conceptos.
- Apropiarse de conceptos, técnicas y procedimientos propios del cálculo diferencial con el propósito de enriquecer el análisis de diversas situaciones tanto del ámbito matemático como el de otras disciplinas.
- Enriquecer el razonamiento matemático al desarrollar métodos que están presentes al aplicar los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral.

En resumen, la selección del contenido disciplinario se rige con la siguiente orientación general:

Con base en la identificación de las ideas de variación y acumulación, darle sentido a los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral.

Enfoque didáctico

En este apartado se plantea un conjunto de consideraciones para organizar y dirigir la actividad cotidiana en el salón de clases. Inicialmente se identifican rasgos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, en particular del cálculo, posteriormente se proporcionan elementos para interpretar a la resolución de problemas como método del pensamiento matemático que se debe privilegiar, se continúa señalando los atributos a tomar en cuenta para incorporar las TIC como herramienta de aprendizaje y se concluye con la identificación de elementos que permiten estructurar el proceso de enseñanza que posibilite la apropiación de los aprendizajes.

Para caracterizar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, esencialmente se toma en cuenta que el Modelo Educativo del Colegio reconoce la importancia de que el estudiante sea capaz de apropiarse y construir nuevos conocimientos, y que la matemática es una disciplina en constante desarrollo en la que aprender debe estar íntimamente relacionada con la participación activa del estudiante en la construcción de resultados matemáticos; en dicha participación, es relevante la disposición de plantear y resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas, esto es, desarrollar matemáticas, proceso en el que es muy importante encontrar el sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir sus conexiones con otras ideas.

Aprender matemáticas, en particular cálculo diferencial e integral, es un proceso en el que se desarrolla una disposición y forma de pensar con el propósito de que el estudiante desarrolle un pensamiento y lenguaje variacional a través de un proceso continuo de resolución de problemas, donde se busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas y se argumente su validez, utilicen diferentes sistemas de representación, establezcan conexiones, y comuniquen sus resultados.

Al considerar que para la formación del estudiante del bachillerato del CCH es relevante privilegiar la apropiación y construcción de los conceptos matemáticos, es conveniente insistir que el planteamiento y solución de problemas debe ser el hilo conductor para organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones (problemas o conceptos) que demandan, en los procesos de comprensión y solución, el empleo de recursos y estrategias matemáticas.

Para la puesta en práctica el método de la resolución de problemas, se propone el desarrollo de un método indagador o interrogativo, también conocido como inquisitivo,[1] que le permite al estudiante conceptualizar a las matemáticas como un conjunto de dilemas o preguntas que se representan, exploran y responden a partir de recursos, estrategias y formas de razonar que son consistentes con el quehacer de la disciplina.

Para establecer los niveles de extensión y profundidad en la apropiación de los conceptos y procesos matemáticos implementando el método interrogativo (inquisitivo), es conveniente distinguir tres contextos de aprendizaje: *a)* contexto puramente matemático: el referente en donde se desarrolla la situación, involucra solamente aspectos matemáticos; *b)* contexto del mundo real: en esta situación, la comprensión del problema se relaciona con identificar a las variables involucradas en la situación real, y *c)* contexto hipotético: la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación.

El trabajo organizado con base en la resolución de problemas posibilitará al estudiante el desarrollo de habilidades matemáticas, entre las que destacan: *estimación* (identificar el rango de valores en los que puede estar un resultado, redondear cantidades para facilitar operaciones y contar así con una apreciación del resultado de las mismas); *generalización* (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); *formalizar "material matemático* (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); *reversibilidad de pensamiento* (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); *flexibilidad de pensamiento* (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); *visualización espacial* (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada).

El tercer aspecto a considerar en la organización y conducción de las acciones en el salón de clases es la incorporación de las TIC con el propósito de enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral. El acceso social a esta tecnología, en sus distintas manifestaciones, teléfonos celulares, tabletas electrónicas, computadoras, reproductores

[1] *Diccionario de la Real Academia Española:* "Que inquiere y averigua con cuidado y diligencia las cosas o es inclinado a ello".

índice

digitales de audio y video, servicios de la WEB, redes sociales o plataformas educativas, entre otras, nos lleva a considerar su incorporación al aula.

Además, resultados en el ámbito de la investigación educativa contribuyen a la consecución de dicho propósito. A continuación se señalan algunas consideraciones para utilizarla:

- La posibilidad de almacenar, compartir y presentar información en distintos formatos, voz, texto, imágenes datos, de manera simultánea, así como el procesamiento y transmisión de esta información en diferentes modalidades, libros electrónicos, apuntes interactivos, blogs, entre otros, permite acercamientos novedosos a los conceptos del cálculo.
- Ofrecer la posibilidad de formular y explorar hipótesis y conjeturas de tal suerte que la escuela no sea solamente un lugar donde los conocimientos se transmitan, sino esencialmente se construyan.
- Organizar actividades en el proceso de resolución de problemas que promueven el pensamiento matemático del alumno al tener la posibilidad de trabajar en la solución desde diferentes perspectivas.
- Representar objetos matemáticos dinámicamente a partir de la identificación de propiedades y relaciones de objetos particulares que son difíciles de pensar o identificar en aproximaciones que se realizan sin este recurso.
- La representación dinámica de objetos matemáticos permite explorar relaciones entre variables en una configuración geométrica, mediante diferentes aproximaciones (gráfica o numérica) sin que se tenga que establecer de forma explícita relaciones algebraicas entre las variables involucradas en el problema.

En resumen, la incorporación de las TIC permitirá promover las habilidades en el uso de la tecnología, favorecer la incorporación de los avances actuales en el ámbito escolar y enriquecer el método de resolución de problemas y la consolidación del pensamiento crítico en el alumno.

Finalmente, las consideraciones respecto a la interpretación del aprendizaje de las matemáticas privilegiando el proceso de resolución de problemas, sustentado en diferentes contextos de aprendizaje y el uso de las TIC para su concreción en el aula, es importante la implementación de las estrategias propuestas, considerándolas como actividades a realizar para el logro de los aprendizajes. Para llevar a cabo dicha implementación debe considerarse la organización del proceso de instrucción a partir de los siguientes aspectos:

a) La selección del contenido matemático, indicado en la temática y los procedimientos del pensamiento matemático, la resolución de problemas, las formas de razonamiento y argumentación, la comunicación de resultados, el establecimiento de conexiones y el uso de diversas representaciones. Además de la selección de los contextos de aprendizaje, puramente matemático, del mundo real e hipotético.

b) Los materiales e instrumentos a utilizar, de los cuales destacan, la selección de lecturas de un libro de texto, la aplicación de hojas de trabajo y la utilización de calculadoras o computadoras entre otros.

c) La selección, organización e implementación de las tareas para obtener los aprendizajes planteados en las que se enfatiza, la participación de los estudiantes en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos, la presentación de los acercamientos de los estudiantes a los problemas a toda la clase o grupo, la realimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución de los estudiantes y la necesidad de aprender nuevos contenidos y la reflexión individual que permita al estudiante incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades.

d) La evaluación de la apropiación de los aprendizajes, no únicamente como la aplicación de instrumentos, sino como parte del proceso de instrucción para enriquecer el aprendizaje al reflejar la matemática que los estudiantes deben conocer y ser capaces de hacer.

Evaluación

En este apartado, inicialmente se puntualiza el significado de evaluación como componente en la organización del proceso de instrucción. Posteriormente, se ofrece una interpretación de los métodos de evaluación como un elemento que permita la consecución de los objetivos de la materia y los propósitos de cada unidad. Se concluye con la descripción de algunos métodos de evaluación que permitirán enriquecer el proceso.

La evaluación, como una componente en la organización del proceso de instrucción, la interpretaremos como un proceso sistemático de obtención de información del logro de los aprendizajes del alumno. Dicha información permitirá, por una parte, dar a conocer al alumno los aprendizajes obtenidos y, por otra parte, al profesor, identificar las fortalezas y debilidades del estudiante y de él mismo para modificar favorablemente sus propuestas de aprendizaje y de enseñanza.

En este proceso, tienen relevancia los métodos de evaluación que se utilicen. Deben considerarse los instrumentos de evaluación, los contenidos y contextos que propician los aprendizajes planteados, y los procesos del pensamiento matemático involucrados.

La concreción de los aprendizajes a evaluar, tienen como referentes los propósitos educativos de la materia, los propósitos de aprendizaje general y particular, indicados en cada una de las unidades. Esto es, el método de evaluación debe estar relacionado estrechamente con las orientaciones del curso y propósitos de las unidades.

Es recomendable que los métodos de evaluación que se utilicen sean diversos, así como acordes con los propósitos planteados, con la intención de que promuevan el compromiso del alumno hacia la apropiación de los aprendizajes. A continuación se mencionan métodos de evaluación que permiten la obtención de información desde distintas perspectivas.

Proyecto de trabajo individual

Es la investigación de un tema o la solución de un problema, en la que el alumno tiene que recurrir a diferentes fuentes de información y a diversos recursos digitales, lo cual le posibilitará desarrollar tanto su iniciativa, como un trabajo independiente. Se debe elaborar un reporte escrito y hacer una presentación de los resultados. La complejidad de la investigación o del problema permitirá estimar el tiempo que se debe invertir con trabajo extra–clase para su solución. En este sentido el proyecto puede atender a los conocimientos de todo el curso, a una unidad o aprendizajes específicos. Es conveniente indicarle al alumno que significará un buen trabajo a través de un protocolo de eva-

índice

luación, con la intención de que, en el desarrollo del proyecto, aprenda a realizar una investigación o resolver un problema no rutinario y presentarlo de manera convincente.

Proyecto de trabajo grupal

Este proyecto es similar al individual, adicionando la problemática de trabajar en equipo. Se recomienda que la investigación o el problema propuesto se desarrollen durante todo el semestre.

Variaciones sobre el examen escrito

Utilizar otras formas del examen escrito, restringido a un determinado tiempo durante la clase y generalmente sin incluir situaciones no rutinarias, son pertinentes para recabar otro tipo de información de los aprendizajes obtenidos. Destacamos los siguientes: examen a libro abierto; examen utilizando entornos de geometría dinámica o CAS; examen que involucre preguntas conceptuales.

Lecturas de comprensión

Consiste en proponerle la lectura del apartado de un libro o un artículo de divulgación para propiciar el estudio crítico y reflexivo, posibilitando evaluar el entendimiento de procesos matemáticos; es conveniente orientar el análisis mediante un cuestionario.

Resolución de problemas

Para la obtención de información del aprendizaje que surge en la resolución de problemas es recomendable diseñar actividades que capturen dicha información, de acuerdo a los siguientes aspectos:

a) La comprensión del problema: el estudiante debe mostrar que ha entendido el problema.

b) La habilidad del estudiante para seleccionar estrategias de resolución y llevarlo a cabo.

c) Lo razonable de la solución y la posible extensión del problema.

Se recomienda instrumentar estos aspectos en una actividad grupal y obtener la información mediante una entrevista que se desarrolle a partir de preguntas clave, que se pueden ampliar a partir de la participación de los estudiantes del equipo.

Contribución del cálculo al perfil del egresado.

Con base en la adquisición de los contenidos y procesos matemáticos que le permitan enriquecer su formación en el ámbito de las matemáticas, será capaz de:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas.
- En la resolución de problemas matemáticos, valorar la generalidad de la solución.
- Apreciar la resolución de problemas como generadora de conocimiento, más que como una actividad de ejercicio mental.
- Efectuar generalizaciones a partir del análisis de diferencias y similitudes, del reconocimiento de estructuras, de la identificación de analogías y de patrones de comportamiento.
- Proporcionar argumentos de validez sobre tópicos matemáticos y evaluar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales diversas formas de representación matemática para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Analizar y evaluar el trabajo matemático y las estrategias de otras personas.
- Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas y éstas entre otras disciplinas.
- Reconocer conceptos, métodos y procedimientos comunes en las diversas áreas del conocimiento matemático.
- Usar las representaciones matemáticas pertinentes para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y biológicos, entre otros.

índice

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Ubicación del curso

Esta asignatura representa el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del Cálculo Diferencial e Integral. Para darle sentido a sus conceptos se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionarán las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

La primera unidad está dedicada al estudio de procesos infinitos y la noción de límite. Es importante que el alumno reconozca las condiciones que caracterizan a un proceso infinito, esto es, que reconozca el patrón de comportamiento identificando las variables y las instrucciones que posibilitan establecer siempre un resultado más. Posteriormente, a partir de las representaciones tabular, gráfica, numérica o algebraica de procesos infinitos, empiece a construir para sí el significado del concepto de límite, comprenda y maneje su notación; este concepto se enriquecerá al interpretar situaciones concretas que involucren el concepto de derivada y en el siguiente curso, el de integral.

El estudio del concepto de derivada se inicia en la segunda unidad. Con base en el desarrollo de situaciones formuladas en contextos reales o hipotéticos, se analiza la variación de funciones polinomiales, de grado no mayor a tres, para dotar de significado, inicialmente, a la razón de cambio promedio y posteriormente, mediante la asociación del proceso infinito a la razón de cambio instantánea, construir el concepto de derivada. Ejemplificar el concepto de derivada con las funciones polinomiales mencionadas, sienta las bases para centrar el análisis de la relación entre la variación y el comportamiento gráfico.

La tercera unidad considera la obtención de las derivadas de funciones algebraicas por medio de las fórmulas y reglas de derivación. El contexto de aprendizaje que se debe privilegiar para desarrollar las actividades de esta unidad es el puramente matemático; la justificación de las fórmulas y reglas de derivación puede realizarse a partir de procesos de inducción, basándose en analogías geométricas o en resultados previamente obtenidos, entre otros. Se privilegia la manipulación algebraica porque es necesario que el estudiante adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas y reglas de derivación

La cuarta unidad representa un primer momento de síntesis. Se enriquece el análisis de la gráfica cartesiana de una función con base en la manipulación algebraica, con el propósito de profundizar en la comprensión de la relación existente entre la función original y su primera y segunda derivada. Se incrementa el entendimiento del concepto de derivada al extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas, en particular, el campo de los problemas de optimización; las actividades de aprendizaje se realizan principalmente en los contextos hipotéticos y reales.

En la siguiente tabla se presentan tanto los propósitos como el número de horas de cada una de las unidades.

No.	Nombre de la unidad	Propósitos	Horas
1	Procesos infinitos y la noción de límite.	Al finalizar la unidad el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.	12
2	El concepto de derivada: variación y razón de cambio.	Al finalizar la unidad, el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	16
3	Derivada de funciones algebraicas.	Al finalizar la unidad el alumno usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.	16
4	Comportamiento gráfico y problemas de optimización.	Al finalizar la unidad el alumno contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.	20

Evaluación

Las propuestas de los métodos de evaluación tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones, y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado. Un ejemplo de evaluación consiste en que el alumno elabore un portafolio que contenga las actividades llevadas a cabo, los exámenes, proyectos, trabajos, tareas, entre otros; realizados a lo largo del curso o por unidad. Por lo cual es indispensable que el alumno se involucre en el trabajo en clase.

Propósitos del curso

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades, procedimientos y a la comprensión de conceptos y métodos, el alumno:

- Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al adquirir sistemáticamente técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucren variación.
- Adquirirá una visión del concepto de límite, a través de la manipulación de las representaciones tabular, gráfica y algebraica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- Relacionará a la derivada de una función con un proceso infinito que permita estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Identificará de manera sistemática y fundada las diversas interpretaciones de la derivada y las utilizará para obtener y analizar información sobre una función.
- Aplicará la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

índice

Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Propósito: Al finalizar la unidad el alumno: • Descubrirá intuitivamente el concepto de límite, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.	**Tiempo:** 12 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Reconoce características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, algebraico o gráfico.	**Procesos infinitos:** • Situaciones numéricas, geométricas o algebraicas, que dan lugar a procesos infinitos.	• Mostrar ejemplos que involucren procesos infinitos en los cuales se tiene un resultado que es posible determinar. • Plantear problemas que conduzcan a encontrar patrones numérico, geométrico o simbólico de procesos infinitos como los siguientes: - Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente. Calcular el área de cada sección e inferir hacia qué valor se acerca el área seccionada y hacia dónde se acerca la suma de las áreas seccionadas.
• Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito.	• Comportamiento de un proceso infinito: representación numérica, algebraica o gráfica.	- Inscribir polígonos regulares en un círculo y determinar el resultado límite, tanto de sus perímetros como de sus áreas, desde el punto de vista geométrico; inferir los valores numéricos de dichos límites.
• Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es.	• Representación simbólica de procesos infinitos por medio de una función.	
• Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos.		- Cálculo aproximado de volúmenes de vasos a partir de cilindros inscritos.
• Utiliza las representaciones gráfica, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos.		- Cálculo aproximado de áreas de regiones limitadas por curvas, como lagos, ciudades, etcétera, o gráficas de funciones a partir de rectángulos inscritos o circunscritos. - Representar 1/3 en su forma decimal $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$ Los cuales se pueden reforzar con el uso de software y Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC): videos, simuladores, Web 2.0, etcétera.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen.		• Presentar algunas actividades donde se tenga que distinguir un proceso infinito de uno que no es. • Hacer énfasis en el hecho de que una sucesión permite expresar de forma simbólica procesos infinitos discretos.
• Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe. • Interpreta el límite de un proceso infinito. • Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito.	**Noción de límite:** • Acercamiento al concepto de límite de una función. Notación de límite $\lim_{x \to a} f(x) = b$	• Como un primer acercamiento al concepto de límite de una función es conveniente trabajar ejemplos discretos para analizar los casos donde la función tiene un dominio en los naturales. • Considerar que las representaciones gráfica, algebraica o tabular de una sucesión, permiten expresar un proceso infinito que puede tener o no tener límite.
• Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.		• Considerar que la simbolización $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, permite representar procesos infinitos que tienen un valor límite. • A partir de la trayectoria de un móvil, calcular su velocidad media entre dos puntos y aproximarse sucesivamente a la velocidad instantánea en un punto intermedio, a partir de la construcción de una tabla. • Proponer tareas donde se muestre que dado un número real, existen diferentes sucesiones cuyos términos permiten acercarse al punto dado de tres maneras: siempre con valores mayores, siempre con valores menores y con valores mayores y menores al número dado. • A partir de las representaciones tabular y gráfica de funciones en las cuales la relación entre sus variables establecen procesos infinitos, dar significado a la simbolización..

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(1) Capítulo 1;

(2) Capítulo 2;

(9) Capítulo 1;

(11) Capítulo 2;

(15) Capítulo 2;

(17) Capítulo 12;

(18) Capítulo 2.

índice

Unidad 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumno: • Interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	**Tiempo:** 16 horas.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica qué es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.	**En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:** • Funciones polinomiales de grado no mayor a tres.	Para la deducción de la derivada de cada una de las funciones es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular o algebraica, considerando lo siguiente: • Proponer problemas que se puedan modelar por una función lineal, resaltando que la intención del modelo es representar simbólicamente la correspondencia entre las variables involucradas en el problema. La representación simbólica, permite evaluar la magnitud del cambio de la variable dependiente con base en un cambio sufrido por la independiente. Así el cambio en la independiente se puede representar como $\Delta x = x_2 - x_1$ y a este le corresponde un cambio en la dependiente representada por $\Delta y = y_2 - y_1$, con base en la magnitud de estos cambios es posible caracterizar la pendiente o razón de cambio de la función lineal como el cociente de diferencias o razón de cambio: $m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ Reiterar que la razón de cambio de una función lineal es constante. • El uso de gráficas poligonales de problemas reales o hipotéticos asociados a funciones en contextos diversos, por ejemplo, las tarifas diferenciadas de acuerdo con el consumo de agua, de energía eléctrica las cuales son funciones discretas, para enfatizar la importancia de la continuidad, sin realizar un estudio exhaustivo.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite. • Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio.		• Plantear problemas cuyo modelo sea una función cuadrática para analizar la variación, la razón de cambio promedio y a través de un análisis numérico aproximarse a la razón de cambio instantánea, por ejemplo: el movimiento de un objeto en caída libre, el área de un rectángulo con perímetro constante, entre otros. Con el fin de enriquecer lo anterior utilizar una hoja electrónica de cálculo y calcular la razón de cambio promedio con intervalos cada vez más pequeños; para promover el uso de un proceso infinito y obtener la razón de cambio instantánea.
• Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada. • Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.		• Recalcar que la razón de cambio instantánea de una función cuadrática es una función lineal y que el cambio del cambio de una función cuadrática es una constante. • Presentar problemas que se puedan modelar mediante una función polinomial de grado tres para analizar la variación, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea a través de los procesos descritos anteriormente, por ejemplo, el volumen de un sólido con área fija. Recalcar que la razón de cambio instantáneo de una función cúbica es una función cuadrática y que la razón de cambio del cambio de una función cúbica es una función lineal.
• Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$	**Concepto de derivada:** • Notación. • Representación algebraica.	• Destacar que las unidades relacionadas a la razón de cambio son las unidades de la variable dependiente, divididas entre las unidades de la variable independiente. Relacionar el signo asociado a la razón de cambio con el crecimiento o decrecimiento de la función. • En el análisis de la razón de cambio que definen las pendientes de las rectas secantes, es conveniente utilizar la noción de límite como una herramienta para definir la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado. Verificar gráficamente los resultados obtenidos. • Para definir la derivada en un punto retomar los problemas vistos anteriormente haciendo énfasis que se utilizó el mismo modelo: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$ y considerar la diferencia entre variable y parámetro.

Referencias: (Número del libro en el listado)

(1) Capítulo 2; **(3)** Lección 4; **(7)** Capítulos 1 y 2; **(21)** Capítulo 1; **(22)** Unidad 4.

Unidad 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósito: Al finalizar la unidad el alumno: • Usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados, usando la definición en su representación: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$ • Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con la representación anterior. • Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores. • Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.	• Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ • Reglas de derivación para: - Función constante. - Función lineal. - Constante por una función. - Suma de funciones. - Producto de funciones. - Cociente de funciones. - Funciones del tipo *(f(x))*^{n} con *f(x)* polinomial y **n** un número racional.	• Utilizar la definición de derivada $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$ para obtener derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ *con n natural y c=1,* posteriormente con $c \neq 1$. • Proponer ejemplos para identificar geométricamente la correspondencia entre diferentes notaciones: Δx como: $x-a$ o h Δy como: $f(x)-f(a)$ o $f(x+h) - f(x)$ • Proponer ejercicios utilizando ambos límites con el propósito de observar las condiciones que son necesarias para obtener su equivalencia. • Utilizar las propiedades necesarias de límites y definiciones de las operaciones con funciones para justificar algunas reglas de derivación, sin ser exhaustivo en el uso. • A través del cálculo de la derivada de polinomios con la definición, inferir las reglas de derivación para: - Función constante. - Función lineal. - Producto de una constante por una función. - Suma de funciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x)=cx^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación. • Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $[f(x)]^n$, para obtener las reglas de derivación correspondientes. • Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena. • Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original. • Identifica a la derivada de una función como una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.		• Al calcular la derivada de la función $f(x)= mx + b$ identificar el comportamiento de la recta y hacer un análisis gráfico cuando m es positiva, negativa o cero. • Utilizar la definición para determinar la derivada de: $f(x) = cx^n$ con $n = -1, -2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$ para justificar que la regla de derivación encontrada también se cumple para los números enteros negativos y racionales. • Mediante productos de polinomios se puede introducir la regla del producto; por ejemplo, obtener la derivada de f(x) = $5x^2(x^3+4x)$. Si por similitud con la suma lo realizan como el producto de las derivadas, sugerir que primero hagan la multiplicación y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un producto no se comporta de igual manera que la de la suma. Con el mismo ejercicio, guiarlo para que halle la regla correcta, combinando adecuadamente las funciones involucradas y sus derivadas. • Usar ejemplos de funciones de la forma: $[f(x)]^n$ con n = 2, 3,… y $f(x)$ una función polinomial de primero o segundo grado para introducir su regla de derivación a partir de la regla del producto. • La regla del cociente se puede obtener a partir de la del producto, escribiendo el cociente como una multiplicación. • Enfatizar la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función algebraica para aplicar correctamente las reglas de derivación. • Proponer problemas que involucren la obtención de la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función. • Se sugiere utilizar la representación gráfica de la función y que el alumno bosqueje la ecuación de la recta tangente calculada, para que verifique si es tangente a la función en el punto propuesto. (Puede verificarlo utilizando algún software.)

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.	• Problemas de aplicación de razón de cambio instantánea, por ejemplo: cálculo de tangentes, cálculo de velocidades, cálculo de tasa marginal.	• Resolver problemas sobre velocidad y aceleración instantáneas de un móvil y de tasa marginal, entre otros. • Resolver ejercicios o problemas de la interpretación geométrica de la derivada de funciones algebraicas. • A partir de la gráfica de una función, obtener un bosquejo de la gráfica de su derivada mediante el análisis de las pendientes de las rectas tangentes. • Bosquejar la gráfica de una función y la de su derivada, buscando un primer acercamiento de la relación que existe entre ellas, por ejemplo, máximos o mínimos. • Presentar las diferentes notaciones usadas en fuentes de información para la representación de la derivada: $f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}\ D_x y,\ D_x\left(f(x)\right)$

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 3;

(3) Lección 12;

(7) Capítulo 3;

(9) Capítulo 2;

(10) Capítulo 2;

(21) Capítulo 3;

(22) Unidad 4.

Unidad 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumno: • Contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.	**Tiempo:** 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno:		
• Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.	• Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.	• Proponer la gráfica de una función polinomial (sin su regla de correspondencia) y determinar los puntos máximos o mínimos e intervalos donde la función es creciente, decreciente; establecer qué elementos de la derivada proporcionan esa información.
• Deduce a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad punto de inflexión.	• Comportamiento gráfico de una función. - Crecimiento y decrecimiento de funciones - Puntos críticos. Concavidad. Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivadas. • Puntos de inflexión.	• Proponer funciones fácilmente factorizables, como: $f(x)=x^3-3x$ bosquejar la gráfica y a partir de ella, identificar las coordenadas de los puntos máximo o mínimo e intervalos, donde la función es creciente o decreciente. • Realizar un análisis gráfico del comportamiento por intervalos, tanto de la función como de la primera y segunda derivadas, para que con la primera derivada se analice el crecimiento o decrecimiento y con la segunda los cambios de concavidad de la función.
• Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.	• Gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$ a partir de $f(x)$ y viceversa.	• Construir el bosquejo de la gráfica de la derivada a través de la gráfica de la función y viceversa, ya que permite al alumno (en el estudio posterior de la antiderivada) asociar la forma de la curva con el significado geométrico de la derivada.
• Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión.		• Finalmente, hacer ver que dada la gráfica de una función o la de su derivada, adquiere información sobre el comportamiento gráfico de la otra.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada. • Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada. • Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de *f*, *f'*, *f''*.		• En cuanto a los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones de acuerdo al contexto del problema. Lo cual permitirá al alumno reforzar sus conocimientos acerca del dominio y contradominio de las funciones. • En los problemas que resuelvan el profesor y los estudiantes de manera conjunta, enfatizar la forma en que la condición que establece el problema entre las variables: ancho y largo; radio y altura, etcétera, permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente. Por ejemplo: - Dados dos números cuyo producto sea 72 y la suma del primero más el triple del segundo sea máxima. - El cálculo del volumen máximo de una caja que se forma a partir de un rectángulo haciendo cortes iguales en esquinas.
• Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido.	• Problemas de optimización.	- Minimizar el costo de una lata cilíndrica a partir de un volumen determinado. Con una o dos tapas de material de valor diferente o igual al del rectángulo envolvente del cilindro. - El problema de hallar el radio y altura de un cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de radio y altura conocidos. • Es importante no olvidar que la resolución de problemas es una metodología didáctica de los programas por lo que es conveniente que en este momento se retomen los elementos necesarios para la resolución de problemas, considerando, entre otros, a autores tales como George Polya, Alan Schoenfeld o Luz Manuel Santos Trigo.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 3;

(3) Lección 1;

(6) Capítulo 5;

(7) Capítulo 4;

(11) Capítulo 5;

(18) Capítulo 4;

(19) Capítulo 1.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Ubicación del curso

En esta asignatura se concluye el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del Cálculo Diferencial e Integral: se desarrolla el concepto de derivada de algunas funciones trascendentes y se concretan las ideas fundamentales del cálculo integral. Para darle sentido a sus conceptos, se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionarán las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

En la primera unidad se extiende el estudio de la variación a algunas funciones trascendentes al obtener la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; la justificación de estos resultados se realiza fundamentalmente con el análisis gráfico de la función original y sus dos primeras derivadas. Con base en la modelación de diversos fenómenos físicos, químicos biológicos y sociales, entre otros, se contribuye a una mejor comprensión de la derivada de las funciones antes mencionadas, a la vez que se enriquece el significado del concepto de derivada.

A partir de la modelación de situaciones geométricas y de contextos, principalmente de movimiento, en la que se presenta la idea de acumulación, en la unidad dos se inicia el estudio del concepto de integral definida; es importante recurrir a los procesos infinitos para esbozar la definición de integral definida. Para la obtención de resultados de sumas infinitas debe recurrirse a las funciones constante y lineal, principalmente. Con base en estos resultados, aportar elementos para presentar el teorema fundamental del cálculo.

La unidad tres inicia con la presentación del desarrollo inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función a partir de conocer su rapidez de cambio. Para la comprensión de las ideas de antiderivada, condición inicial e integral indefinida, el trabajo con funciones polinomiales debe ser el punto de partida. Se prepara al alumno en el manejo algorítmico al resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas, para concluir con los métodos de sustitución e integración por partes. Al retomar los resultados que presenta el Teorema Fundamental del Cálculo resuelve problemas de mayor complejidad, que requieren utilizar la integral definida.

Por último, la cuarta unidad presenta tanto la conclusión de los dos cursos como perspectivas de desarrollo de los métodos y conceptos estudiados. Consolida la comprensión, manejo y aplicación de la derivada y la integral al construir el modelo asociado a diversas situaciones, en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como crecimiento de una población, desintegración radioactiva, ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo propagación de una enfermedad.

En la siguiente tabla se presentan tanto los propósitos y como el número de horas de cada una de las unidades.

Cálculo Diferencial e Integral II

No	Nombre de la unidad	Propósitos	Horas
1	Derivadas de funciones trascendentes.	Al finalizar la unidad el alumno ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelan con ellas.	16
2	La integral definida.	Al finalizar la unidad el alumno interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del teorema fundamental del cálculo y lo aplicará.	16
3	La integral indefinida.	Al finalizar la unidad el alumno establecerá mediante el análisis de situaciones de variación, la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.	20
4	Modelos y predicción.	Al finalizar la unidad el alumno concluirá el estudio de la derivada e integral con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	12

Evaluación

Las propuestas de los métodos de evaluación, que tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado. Un ejemplo de evaluación consiste en que el alumno elabore un portafolio que contenga las actividades llevadas a cabo, los exámenes, proyectos, trabajos, tareas, entre otros; realizados a lo largo del curso o por unidad. Por lo cual es indispensable que el alumno se involucre en el trabajo en clase.

Propósitos del curso

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral II, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades, procedimientos y a la comprensión de conceptos y métodos, el alumno:

- Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al apropiarse de nuevas técnicas y herramientas que proporciona el cálculo, en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Avanzará en la comprensión de la derivada, al analizarla en situaciones que es posible modelar con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Comprenderá la relación entre la derivada y la integral de funciones, que se sintetiza en el teorema fundamental del cálculo.
- Manipulará adecuadamente las fórmulas de integración y los métodos de sustitución e integración por partes.
- Con la modelación de situaciones geométricas y de movimiento, entre otras, relacionará a la integral definida de una función, ya sea con el área bajo una curva o la descripción del comportamiento de un objeto en movimiento, y comprenderá que puede llevarse a cabo mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- Sistematizará las diversas interpretaciones de la integral y las utilizará en la resolución de problemas relacionados con variación y con acumulación.

Unidad 1. Derivada de funciones trascendentes

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumno: • Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. • Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica. • Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. • Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas. • Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos.	**Derivada de funciones trigonométricas:** • Funciones trigonométricas y el estudio de su variación. • Derivada de las funciones seno y coseno. • Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. • Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas. • Resolución de problemas en diversos contextos.	• Para la deducción de la derivada de cada una de las funciones es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular o algebraica, considerando lo siguiente: - Aprovechando el conocimiento obtenido en la Unidad IV de Cálculo I, realiza una primera conjetura de la gráfica de la derivada de las funciones seno y coseno. - En la representación numérica se sugiere calcular la aproximación de la derivada, usando una tabla, para valores apropiados. • Presentar situaciones que se modelen mediante estas funciones para motivar la discusión de su variación. Por ejemplo: - La profundidad del agua en el puerto de San Felipe B. C. está dada por la función: $y = 3 + 2.5\cos(\frac{\pi}{6}t)$; y está en metros Donde t es el número de horas desde la media noche. Calcular la rapidez con que está cambiando el nivel del agua a las 6 horas. - Se depositan cien mil pesos en un banco que paga 5% de interés anual compuesto de manera continua. Suponiendo que se reinvierte el capital más los intereses. Calcula lo que se solicita. *a)* Encuentra la cantidad total acumulada en 10 años. *b)* Con qué rapidez está creciendo el capital a los 10 años.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• Calcular mediante una aproximación numérica los límites siguientes: $$\lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$ para encontrar la derivada de seno y coseno en x = 0. • Presentar problemas que se puedan modelar mediante funciones circulares para el estudio de la variación de fenómenos periódicos, como: el péndulo simple, pistón oscilante, el movimiento de las mareas, etcétera. • Promover que el alumno, con el apoyo de la geometría dinámica, conjeture que la derivada de la función exponencial natural es la misma función.
• Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.		• Si se utiliza la definición de la derivada de la función exponencial sería conveniente calcular mediante una aproximación numérica este límite: $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{e^h - 1}{h}\right]$$
• Infiere la derivada de las funciones logarítmicas.	**Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas:**	• Resaltar la importancia de la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento.
• Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.	• Derivada de las funciones: e^x, e^u, 10^x y 10^u • Derivada de las funciones: $\ln x$, $\ln u$, $\log x$, $\log u$	• Se sugiere que la derivada de la función logarítmica sea a través de la función $y = e^x$ • Enfatizar las aplicaciones a diversas disciplinas, como: el decaimiento radioactivo, crecimiento de poblaciones, la ley de enfriamiento, entre otras.
• Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.	• Resolución de problemas en diversos contextos	• Resaltar el hecho de que el aplicar las propiedades de los logaritmos facilita la obtención de las derivadas de productos, cocientes, potencias y exponenciales.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 4;

(3) Lección 16;

(9) Capítulo 5;

(11) Capítulos 2 y 5;

(15) Capítulo 6;

(18) Capítulos 2 y 3;

(21) Capítulo 4.

índice

Unidad 2. La integral definida

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumno: • Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos. • Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general. • Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito.	**El área bajo una curva:** • El área bajo la gráfica de una función constante o lineal. • Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. • Cálculo del área para funciones de la forma $f(x)=kx^n$ donde k es una constante. • Interpretación del signo de la integral con el área bajo la curva.	• Introducir situaciones problemáticas en las que se conoce la velocidad o la tasa instantánea de cambio para motivar la discusión de la acumulación. • Desarrollar problemas que involucren el cálculo de distancia, trabajo o presión, entre otros los cuales se representen mediante una función constante o lineal para que, posteriormente, los analicen gráficamente y perciban que dichos problemas se pueden resolver al calcular el área bajo la gráfica de esa función, auxiliándose de la figura geométrica respectiva.
• Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x)=x^n$ como un límite de sumas infinitas para *n=1, 2 y 3.*	**La integral definida:** • Definición. • Propiedades.	• Para la aproximación numérica, presentar la gráfica de una función positiva sin su representación analítica y solicitarles que calculen el área bajo la curva en un intervalo dado, inducirlos a que obtengan una aproximación del área a través de la suma de las áreas de figuras rectilíneas y solicitarles mejores aproximaciones.

índice

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma [*0,x*] y calcula con ella el área en el intervalo [a,b].	**La función área como una antiderivada:**	
• Identifica la función área como una antiderivada o primitiva. • Infiere a la integral definida como el límite de sumas infinitas. • Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo. • Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida.	**Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo:**	• Determinar el área bajo las funciones $f(x)=x^n$ *para* $n=1, 2, 3$. En un intervalo [0,a], a partir de aproximar el área mediante rectángulos inscritos y circunscritos con bases de igual longitud, para acotar el área. Se puede iniciar circunscribiendo n rectángulos para n=4 y calcular su área, continuar con n=5, 6, etcétera y observar el patrón de comportamiento del área conforme n crece. • Para enriquecer lo anterior, realizar el cálculo con particiones más finas utilizando una hoja electrónica de cálculo. Complementar y verificar los valores obtenidos con el uso de software dinámico, observando gráficamente cómo se pueden obtener mejores aproximaciones.
• Utiliza las propiedades de la integral definida.	**Aplicaciones de la integral definida:** • Área comprendida entre dos funciones. • Cálculo de la distancia a partir de la velocidad.	• Señalar que las unidades asociadas a la integral definida es el producto de las unidades de la variable dependiente y las unidades de la variable independiente.
• Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo. • Aplica el teorema fundamental del cálculo.	• Cálculo de una población a partir de su tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.	• Para calcular de manera exacta las áreas referidas, analizar el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para determinar si tiene un valor límite y cuál es éste.
• Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.		• En la representación del área desde *a* hasta *x* bajo la gráfica de *f(t),* incorporar la notación $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		• Resaltar la importancia de la continuidad de las funciones para enunciar el TFC, a partir de que analicen una integral como: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ • A partir de los resultados anteriores analizar la relación entre: la función área, la antiderivada y la integral definida; para enunciar el teorema fundamental del cálculo (TFC). • Proponer problemas que incluyan áreas entre dos funciones, cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad, apoyándose en el trazo de sus gráficas para calcular las integrales respectivas.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 5;

(5) Capítulo 5;

(7) Capítulo 5;

(10) Capítulo 7;

(15) Capítulo 4;

(18) Capítulo **5;**

(19) Capítulo 17;

(21) Capítulo 6.

Unidad 3. La integral indefinida

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumno: • Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración	**Tiempo:** 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación	**Fórmulas inmediatas de integración.**	• Usar la idea de que la derivada y la integral son operaciones inversas para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Retomar el análisis gráfico como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de funciones y resaltar el papel que juega en ella la constante de integración. Se recomienda utilizar algún software graficador.
• Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren. • Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada. • Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales.	**Relación entre la condición inicial y la constante de integración.**	• Para ilustrar el método de cambio de variable se sugiere realizar modificaciones a la función a integrar y solicitar al alumno identifique la diferencial para obtener la integral de una forma inmediata.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. • Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla. • Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones. • Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.	**Métodos de integración:** • Cambio de variable. • Integración por partes. **Problemas de aplicación en diferentes contextos.**	• En la integración por partes proporcionarles algunas sugerencias para la elección de ***u*** y ***v***, presentar algunos ejemplos invirtiendo la elección y discutir cuál de ellas es la adecuada. • Es importante hacer ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. También retomar alguno de los problemas sobre distancia, trabajo o presión resueltos anteriormente y proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 5;

(7) Capítulo 7;

(9) Capítulo 4;

(20) Capítulo 18.

Unidad 4. Modelos y predicción

Propósito: Al finalizar la unidad el alumno: • Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	**Tiempo:** 12 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumno: • Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ • Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos. • Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de C.	• Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$ • Método de separación de variables. • Condiciones iniciales aplicadas al modelo $P(t) = Ce^{kt}$	• Propiciar que los alumnos, exploren en forma numérica, gráfica o algebraica el comportamiento de diversas situaciones. • Por ejemplo, en el crecimiento de una población, orientarlos a que propongan los elementos que intervienen en su crecimiento, al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, arribar a la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Por lo cual, se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante la ecuación diferencial: $\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = kP(t)$

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación, dada y llega a un modelo del tipo $p(t)=P_0e^{kt}$ • Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. • Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $p(t)=P_0e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. • Reconoce la importancia del modelo $p(t)=P_0e^{kt}$.		• Al presentar el método de separación de variables, cuidar que los alumnos no se queden con la idea errónea de que *dt* pasa multiplicando pero sin caer en explicaciones teóricas que excedan los propósitos de esta unidad. • Una vez hallada la solución, analizar su comportamiento general y efectuar predicciones. • Es recomendable contar con datos de fácil acceso, por ejemplo, los del INEGI del último censo sobre la tasa de crecimiento de la población del país.

Referencias:

(Número del libro en el listado)

(5) Capítulo 10;

(6) Capítulo 7;

(7) Capítulo 10;

(9) Capítulo 6;

(21) Capítulo 7.

Referencias:

1. Azcárate, Carmen, *et al.* (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis.
2. Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison Wesley.
3. Cruse, Allan B. *et al.* (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano.
4. Filloy, Eugenio, *et al.* (2003). *Matemática Educativa. "El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial".* México: Fondo de Cultura Económica.
5. Goldstein, L. J. *et al.* (1990). *Cálculo y sus aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana.
6. Hoffmann, L. *et al.* (1995). *Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. Quinta edición. Cali, Colombia: McGraw Hill.
7. Hughes, Deborah, *et al*. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA.
8. Imaz, Carlos. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo.* México: Trillas.
9. Larson, Ron, *et al.* (2010). *Cálculo 1.* Novena edición. México: McGraw–Hill.
10. Leithold, Louis. (1988). *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*. México: Alfaomega grupo editor.
11. Leithold, Louis. (1998). *El cálculo.* Séptima edición. México: Oxford University Press.
12. Mochón, Simón. (1994). *Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
13. Natanson, I. P. (1984). *La suma de cantidades infinitamente pequeñas.* México: Limusa–Willey.
14. Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.
15. Purcel, Edwin J. *et al*. (2007). *Cálculo*. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall.
16. Shilov, G. E. (1980). *Cómo construir gráficas: Los problemas más sencillos de máximos y mínimos.* México: Limusa.
17. Stewart, James, *et al*. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo.* Sexta edición. México: CENGAGE Learning.
18. Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: CENGAGE Learning.
19. Swokowski, Eart W. (1987). *Introducción al Cálculo con geometría analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
20. Thompson, Silvanus P. *et al*. (2012). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw–Hill.
21. Warner, Stefan, *et al.* (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson.
22. Zill, Dennis G. *et al.* (2011). *Cálculo de una variable*. México: McGraw–Hill.

Se recomienda para profesores los libros: **(1), (4), (8), (13), (14)** y **(16).**

Se recomienda como referencia básica los libros: **(2), (3), (7), (9), (18)** y **(21).**

Referencias complementarias los libros: **(5), (6), (10), (11), (12), (15), (17) (19), (20) y (22).**

Versiones electrónicas:

Obras de consulta general:

<http://www.rua.unam.mx> (al 31 de mayo de 2016)

<https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus> (al 31 de mayo de 2016)

<http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_calculo.html> (al 31 de mayo de 2016)

Para la elaboración de este Programa se agradece la participación de: Jesús Aguilera García, Alejandra Georgina Bravo Ortiz, Damián Flores Sánchez, Andrés José Hernández López, Salvador Lara Núñez, Alma Delia Leos Hidalgo, Jaime Licea Durán, David Martínez Gómez, José Alberto Monzoy Vásquez, María del Socorro Nova Covarrubias, Héctor Pérez Aguilar, René Ramírez Ruiz, Marco Rojas Rivas, Roberto Santos Huerta, María Teresa Velázquez Uribe, Gerardo Yáñez Cárdenas.

1971 2016

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades