UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

SECRETARÍA ACADÉMICA

GUÍA DE ESTUDIO

PARA PRESENTAR EL EXAMEN DE CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DISCIPLINARIAS PARA LA CONTRATACIÓN TEMPORAL DE PROFESORES DE ASIGNATURA INTERINOS

DE

MATEMÁTICAS I A IV

PROMOCIÓN XL

ENERO 2019

ÍNDICE

I. Presentación

La presente guía es un documento para la preparación del Examen de Conocimientos y Habilidades Disciplinarias para la Docencia en las asignaturas de Matemáticas I a IV, cuyo propósito es orientar al profesor sobre las características del Examen de Conocimientos para la Contratación Temporal de Profesores, mejor conocido como Examen Filtro así como su evaluación.

En el examen el aspirante debe mostrar el conocimiento y manejo de los objetivos generales de los programas de las asignaturas de Matemáticas I a IV, y los aspectos relevantes como el enfoque y las estrategias que el sustentante ha desarrollado para lograr el perfil del egresado de cada asignatura.

Al ingresar a la planta docente del Colegio de Ciencias y Humanidades, aceptamos la vigencia del modelo educativo y sus principios como fundamentos de organización del Plan de Estudios, que junto con los actuales requerimientos de la enseñanza son elementos de las metas educativas.

En este contexto, cabe destacar la necesidad de proporcionar a los estudiantes una educación básica que vaya más allá del desarrollo de capacidades puramente cognitivas, considerando hábitos, valores personales y normas que impulsen su desarrollo personal y afectivo, así como sus relaciones interpersonales, al igual que su inserción social crítica y constructiva.

Lo cual nos lleva al conocimiento e interpretación de los objetivos generales del Colegio de Ciencias y Humanidades. **“aprender a aprender”, “aprender a hacer”, “aprender a ser”.**

De lo expuesto se desprende que el papel del profesor en el aprendizaje de los alumnos es fundamental, de ahí la importancia de tener profesores mejor preparados y que asuman la responsabilidad adquirida con la institución, con los alumnos y con ellos mismos.

El Área de Matemáticas tiene como finalidad principal que el alumno utilice el lenguaje simbólico en la construcción del proceso de su pensamiento; es decir, la matemática como una ciencia que organiza elementos de la realidad, deberá mostrarse a los alumnos que posee un doble valor: como ciencia y como herramienta. Como ciencia construye, organiza y sistematiza conocimientos. Como herramienta contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones.

En el actual Plan de Estudios se conserva la enseñanza de las matemáticas a lo largo de todo el ciclo del bachillerato, durante los cuatro primeros semestres, se da el aprendizaje de conocimientos básicos, en los semestres quinto y sexto, se da la introducción a especialidades.

Los programas actualizados se caracterizan por una concepción del aprendizaje que supone la participación activa del estudiante en la construcción de las ideas al aprender. Lo que implica entre otras cosas, que los conceptos, no podrán presentarse de manera formal y acabada ya que los cursos se consideran un primer acercamiento a la materia.

Los contenidos de los cuatro cursos básicos, se retoman y sirven de sustento para nuevos conocimientos y deberán ser revisados de manera no sistemática en el contexto en que se presenten, ampliándose de forma que consoliden el conocimiento. Los contenidos nuevos, deberán abordarse en un nivel medio de complejidad considerando que no existe experiencia previa de los estudiantes en su manejo.

En los programas se plantea iniciar a los alumnos a partir de la intuición, dando pie a la abstracción de los razonamientos y procedimientos de análisis, buscando destacar las ideas fundamentales y su manejo simbólico, para finalmente introducir el rigor, precisando ideas y sistematizando métodos hasta el nivel de algoritmos.

En cuanto al aprendizaje de los alumnos, el énfasis se hace en el desarrollo de significados, que permitan al estudiante una interpretación correcta de los conceptos. Ya que no sólo se gradúa la dificultad de los conceptos con que se trabaja, sino también las etapas de maduración, formalización y la manipulación de los algoritmos y procedimientos.

La guía tiene como base los programas vigentes de Matemáticas I a IV. En ella, se incluyen conocimientos de los diferentes ejes que conforman el plan de estudios del Área de Matemáticas: Álgebra, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica, Trigonometría y Funciones.

Esta guía está elaborada para que el aspirante a profesor del Colegio, la resuelva considerando el enfoque pedagógico de la resolución de problemas como una fuente generadora de ideas conceptuales de la temática a abordar en los cursos; por ello, se espera que quienes presenten su examen de ingreso a la docencia, expresen, al resolver los ejercicios y problemas propuestos, elementos generalizadores y comunique claramente, en ambos lenguajes, español y matemático, las interpretaciones a los resultados correspondientes a las soluciones que encuentre.

II. Enfoque de la materia

A. Enfoque Disciplinario

La enseñanza de la matemática atiende los principios educativos del Colegio de Ciencias y Humanidades, para cumplirlos debe lograr habilidades del pensamiento que permitan a los estudiantes ser capaces de adquirir por sí mismos nuevos conocimientos, además analizar, interpretar y modificar el mundo que lo rodea.

Por lo que en el CCH se concibe a la matemática como una disciplina que:

Posee un carácter dual: de ciencia y herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías para la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.

Manifiesta una gran unidad. No obstante, la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas se vinculan complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.

Contiene un conjunto de simbologías propias, bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, algebraica), que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones y comportamientos; aspectos que contribuyen a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones.

Esta concepción tiene como consecuencia desechar la enseñanza de la matemática como un conjunto de conocimientos acabados y organizados según la estructura formal y tomar la posición de desarrollar en el alumno habilidades intelectuales que caracterizan la construcción de la misma.

B. Enfoque Didáctico.

La columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas, que consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas para despertar el interés de los alumnos, y los inviten a reflexionar. La resolución de problemas promueve el trabajo grupal, el diálogo entre alumnos, entre el maestro y los alumnos y apoya la construcción de un vínculo entre iguales para fomentar el trabajo en equipo, la solidaridad entre compañeros y la aceptación de la corresponsabilidad en el proceso educativo, favoreciendo el desarrollo de habilidades del pensamiento que permitan al alumno el aprender a aprender y el aprender a hacer.

Considerar la resolución de problemas como metodología didáctica no consiste simplemente en enfatizar esta actividad para dar “sentido” a una serie de conceptos y métodos que son previamente expuestos por el profesor, sino que éstos deben surgir, en el alumno, como necesidad en la etapa de comprensión de situaciones problemáticas o como generalización de la resolución y la solución de éstas.

Dado los tiempos institucionales, no se desecha la exposición de conceptos y métodos por parte del profesor, siempre y cuando la necesidad de su estudio surja en la etapa de comprensión de una situación problemática y éste plantee actividades que garanticen la comprensión de los mismos. Esta actividad creará los recursos básicos necesarios que en situaciones “nuevas” permitan el “descubrimiento”, por generalización, de conceptos y métodos durante la reflexión sobre el procedimiento de solución y la solución de las mismas.

Por lo general, uno no puede suponer que los alumnos sean capaces de resolver problemas, muchos de ellos abordan esta actividad en forma caótica y con descuido, por lo que el resolver problemas aparte de ser una metodología didáctica, debe ser contemplado como objeto de aprendizaje. Así el profesor debe proporcionar ayudas para que sus alumnos transiten en forma organizada y creativa en el proceso de resolución de problemas. Estas ayudas son contempladas por autores como Polya y Schoenfeld como estrategias heurísticas.

Polya considera que en la actividad de resolución de problemas el profesor debe inducir a los estudiantes a transitar por las siguientes etapas:

a) **Comprensión del problema.**
Mediante preguntas como: ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué condiciones se deben satisfacer entre datos e incógnitas?, ¿es posible que estas condiciones se puedan satisfacer?

b) **Trazar un plan.**
Mediante preguntas y sugerencias como: ¿puede reducir el presente problema a uno que sabe resolver?; recurra a las definiciones para plantear el problema en términos más operativos; considere la condición en partes y observe la forma en qué varía el elemento que se desea encontrar conforme a cada una de las partes y vea si esto le es útil para resolver el problema; trace un diagrama que ilustre las relaciones entre datos e incógnita y vea si esto le ayuda en la resolución del problema; considere casos particulares y vea si estos siguen un patrón; considere un problema análogo. Por ejemplo, en geometría: reduciendo dimensiones; trace líneas auxiliares; considere casos extremos y vea cómo ajustar a las condiciones originales; ¿conoce algún resultado o método que le pueda ser útil en el presente problema?; considere qué datos son necesarios para encontrar lo buscado y vea si estos aparecen en el planteamiento del problema, si no, repita el procedimiento para el dato o datos no presentes, hasta que arribe a datos presentes en el problema.

c) **Ejecución del plan.**
Sugiriendo el monitoreo del procedimiento escogido: justificando cada uno de los pasos, valorando el avance logrado a fin de seguir o cambiar de plan.

d) **Retrospección.**
Con sugerencias como: reflexione sobre lo realizado y piense si el método o la solución puede aplicarse en nuevos problemas; intente inventar otros problemas donde el procedimiento de solución sea el mismo; intente pensar en una situación práctica donde el problema pueda aplicarse; piense cómo el problema puede generalizarse.

Esta forma de proceder debe ser inducida primeramente con el planteamiento de estas sugerencias y preguntas por parte del profesor, hasta que el alumno lo haga de manera independiente.

C. Contribución del Área de Matemáticas al perfil del egresado

El Área de Matemáticas, como uno de los pilares principales en la formación de los estudiantes, contribuye al perfil del egresado al formar a un alumno que esté preparado para:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Generar conocimientos a través de la resolución de problemas.
- Utilizar su conocimiento matemático en la resolución de problemas en contextos que lo requieran.
- Utilizar diversas formas de razonamiento que le permita en el análisis de eventos, tomar decisiones y ser consciente de la incertidumbre o certidumbre de los resultados de éstas.
- Elaborar conjeturas, construir argumentos de forma oral y escrita para validar o refutar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales, diversas formas de representación matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica y algebraica) para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Utilizar las nuevas tecnologías para la búsqueda de información relevante y su sistematización.
- Utilizar las tecnologías digitales para favorecer la adquisición de conocimientos.
- Adquirir el hábito de la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.
- Valorar las aportaciones de las matemáticas en todos los campos del saber.
- Exponer y aplicar sus conocimientos matemáticos con seguridad en sí mismo.

D. Descripción de la estructura general del examen

- ✓ El examen estará integrado por problemas similares a los que se presentan en la guía, tomando como base la idea de la metodología de resolución de problemas. Es importante que, al resolver los problemas, utilice únicamente álgebra, geometría o trigonometría, material comprendido en las asignaturas de Matemáticas I a IV.
- ✓ Se sugiere que el aspirante resuelva la guía para que se familiarice con el tipo de problemas que se le pueden presentar; lo que le permitirá ajustarse al tiempo destinado para la realización del mismo.
- ✓ Se dispondrá de tres horas para realizar el examen.
- ✓ El examen contendrá problemas que evaluarán conocimientos y otros que evaluarán la habilidad disciplinaria
- ✓ Es importante que en la solución de cada uno de los problemas se presente el procedimiento que se siguió para resolverlo.
- ✓ Se permite el uso de calculadora científica.
- ✓ Deberá contestar correctamente por lo menos el 80% de los problemas, la calificación mínima requerida para acreditarlo es de ocho (8).

III. Problemas para Matemáticas I

1. De las fracciones de la forma $\frac{a}{2012}$ con $0 < a < 2012$ entero, cuántos denominadores distintos puede tener una vez que se simplifica

R. Cuatro, estos son: 2, 4, 503 y 1006

2. Un radiador de automóvil está lleno con una solución de agua y anticongelante. Si el 40% es anticongelante, ¿Qué proporción de solución deben retirarse del radiador para que al ser reemplazados por anticongelante puro, la solución en el radiador tenga 60% de anticongelante?

R. Una tercera parte del volumen.

3. A partir de los siguientes resultados haremos una conjetura:

$$1^3 = 1 = 1 - 0 = 1^2 - 0^2$$

$$2^3 = 8 = 9 - 1 = 3^2 - 1^2$$

$$3^3 = 27 = 36 - 9 = 6^2 - 3^2$$

Conjetura: En los enteros positivos, todo número elevado al cubo es igual a la diferencia de los cuadrados de dos números.
¿Es esta afirmación falsa o verdadera? Justificar la respuesta.

4. Salí de mi casa en automóvil a las $8{:}00$ de la mañana. Un automóvil que va al doble de mi velocidad sale también de mi casa, me alcanza exactamente a la mitad del camino y llega $1{:}30h$ antes que yo a nuestro lugar de destino. ¿A qué hora salió el otro automóvil?

R. El otro automóvil salió a las $9{:}30\ hrs$.

5. Una alfombra mágica reduce su longitud y su ancho a la mitad cuando se cumple un deseo a su dueño. En qué proporción el área de la alfombra se reduce respecto a la original después de tres deseos.

R. 64:1

6. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

R. La fracción del pastel original que quedó es: $\frac{8}{27}$

7. La maestra distribuyó la misma cantidad de dulces entre cada uno de 5 niños y le sobraron tres para ella. No se acuerda cuántos dulces tenía, pero se acuerda que ese número era un múltiplo de 7 entre 75 y 100. ¿Cuántos dulces tenía?

R. La maestra tenía 98 dulces.

8. Cuatro saltos de una liebre equivalen a uno del galgo que la persigue. Mientras que el galgo da un salto, la liebre da tres. Si en este momento la liebre lleva una ventaja de ocho de sus saltos, ¿cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

R.8 saltos tiene que dar el galgo para alcanzar a la liebre, mientras que la liebre da 24.

9. A Jorge le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es el dígito de las centenas de su número secreto?

R. El dígito de las centenas de su número secreto es 1

10. La suma de tres dígitos es 5. El primero y el último dígito son iguales. Si el dígito de las centenas intercambia su posición con el de las decenas, el nuevo número es90 menor que el número original. ¿Cuál es el número original?

R. El número original es 212

11. El precio de cierta mercancía cambió durante cuatro períodos consecutivos, como se indica:

primer período	creció el 25 %.
segundo período	creció el 25 %.
tercer período	decreció el 25 %.
cuarto período	decreció el 25 %.

Determinar el cambio neto al cabo de los cuatro períodos, expresarlo en términos de un porcentaje aproximado a enteros.

R. Decreció 12 % aproximadamente.

12. ¿Cuántas parejas de números (*b*, *c*) permiten que las ecuaciones $3x+by+c=0$ y $cx-2y+12=0$ tengan las mismas raíces?

R. 2 parejas.

13. *K* y *M* son dos números reales, tales que *K* es menor que *M.P* y *Q* son dos números reales entre *K* y *M* tales que: La distancia de *P* a *M* es las dos terceras partes de la distancia de *K* a *P*. La distancia de *Q* a *M* es la mitad de la distancia de *K* a *Q*.

Determinar los valores de *K* y *M* si se sabe que *P*es cinco séptimos y que *Q* es tres cuartos.

R. $K = \frac{11}{28}, \quad M = \frac{13}{14}$

14. A continuación se da una lista de afirmaciones. Escribir en el paréntesis correspondiente a cada afirmación una *V* (verdadera) o una *F* (falsa)

a) Hay un primer número positivo, aunque no podamos decir cuál es ( )

b) $\sqrt{9} = \pm 3$ ( )

c) Cualquier número elevado a la potencia cero es 1 ( )

d) Si K y N son dos números reales cualesquiera, entonces $2N + 3K = 5NK$ ( )

e) Si K, N y R son números reales tales que $KN = R$, entonces $N = \frac{R}{K}$ ( )

f) Para todo número real X, $\left(\sqrt{X}\right)^2 = X$ ( )

g) Hay más números enteros positivos que números pares positivos. ( )

h) Si *f(x)* es una función polinomial tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, entonces existe un número *a* mayor que cero y menor que uno tal que $f(a) = a$ ( )

i) $\sqrt{59344200987654768132567789163}$ es un entero mayor que un millón. ( )

15. Para cada entero positivo n se define S_n como la suma de los diez primeros múltiplos positivos de n. Por ejemplo, S_3 =3 + 6 + 9 + … + 30 =165. Cuál es el valor de $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_{10} =$

R. 3025

16. ¿Cuántos números distintos pueden ser expresados como la suma de tres números distintos del conjunto {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19}?

R. 13.

17. En una fiesta, la cantidad de personas que bailan es el 25% de la cantidad de personas que no bailan. ¿Qué porcentaje del total de personas en la fiesta no bailan?

R. 80%

18. Una mezcla de 200 litros está compuesta por las sustancias *A, B* y *C*. Si la suma de las cantidades de litros que tiene la mezcla de las sustancias *A* y *B* es el triple de la cantidad de litros que tiene *C*, y la sustancia *B* conforma el 35 % de la mezcla, ¿cuántos litros de cada sustancia tiene la mezcla?

R. Tiene 80 litros de la sustancia *A*, 70 litros de la sustancia *B* y 50 litros de la sustancia *C.*

19. Un número de tres dígitos es 35 veces la suma de sus dígitos. La suma del dígito de las unidades con el de las decenas, es dos veces el dígito de las centenas. Cinco veces la suma del dígito de las centenas con el de las decenas, es cuatro veces el dígito de las unidades. Encuentra el número.

R. El número de tres dígitos es 315.

20. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} &kx+ky+kz=k \\ &kx+2ky+(3k+3)z=3+k \\ &kx+ky+\left(k^2+2k-2\right)z=2k-1 \end{aligned}$$

encontrar el o los valores de *k*, para que el sistema sea:

a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado
c) Incompatible

R.

a) $\forall \quad k \neq 1$ y $k \neq -2$
b) $k=1$
c) $k=-2, k=0$

IV. Problemas para Matemáticas II

1. Pedro y Luis copiaron una ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$ del pizarrón. Pedro copio mal el coeficiente *b* y obtuvo como soluciones 2 y 4. Luis copió mal el coeficiente *c* y obtuvo como soluciones 5 y 4. ¿Cuáles eran las soluciones de la ecuación original?

R. 8 y 1

2. El número -1 es una de las raíces de la ecuación $3x^2 + bx + c = 0$.Si *b* y *c* son números primos, determinar el valor de *4*c – *b*.

R.*4*c – *b* = 3

3. Si toda ecuación cuadrática de la forma $x^2 + px + q = 0$ se representa por el punto (p, q) en el plano cartesiano, determinar la ecuación de la curva que generan los puntos que representan a las ecuaciones que tienen una sola solución. ¿En dónde están los puntos que representan ecuaciones con dos soluciones, con respecto a esta curva? y, en dónde, los puntos que representan ecuaciones que no tienen solución. Justifica tu respuesta.

4. La gráfica de una parábola vertical corta al eje de las ordenadas en el punto $A\left(0, \frac{7}{2}\right)$ y al eje de las abscisas en los puntos $B(1,0)$ y $C(7,0)$. Determina la ecuación de la función cuadrática en su forma estándar y en su forma canónica.

R. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3.5$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4.5$

5. Si *f(x) = ax²+ b x + c,* determinar los valores de *a, b* y *c* para que la gráfica de *f* pase por los puntos: (1,1), (11,2) y (5,1)

R. Los valores son: $a = \frac{1}{60}$, $b = -\frac{1}{10}$, $c = \frac{13}{12}$ y la función: $f(x) = \frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{13}{12}$

6. La siguiente tabla muestra algunos valores del peso promedio de recién nacidos

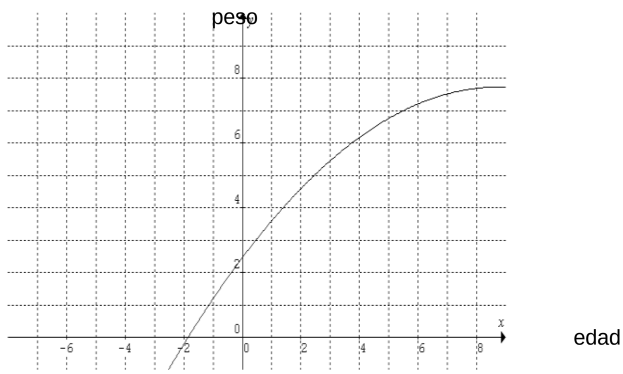
Edad (meses)	1	3	6	8
Peso (Kg)	3.600	5.450	7.200	7.64

a) Aproximar los datos mediante una función cuadrática, esto es, sustituir los valores de la tabla en la ecuación $f(x) = a + b\,x + cx^2$, escribir las tres ecuaciones que resultan.

b) Resolver el sistema y estimar el peso de un bebé de acuerdo al modelo, a los nueve meses.

R.

a)



b)

$$a + b + c = 3.6$$
$$a + 3b + 9c = 5.45$$
$$a + 6b + 36c = 7.2$$

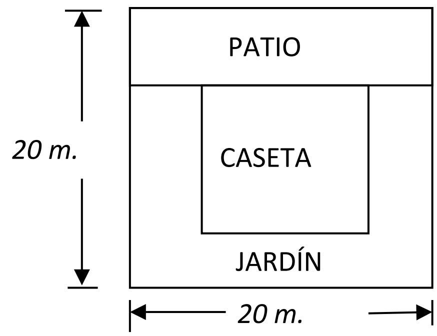
c) Al resolver el sistema, se tiene que: $a = 2.47$; $b = 1.1983$; $c = -0.0683$. El peso aproximado de un bebé a los nueve meses es de 7.72*Kg*.

7. Una pistola de señales es disparada verticalmente, la altura de la señal está dada por $h = 51t - 0.85t^2$, en donde h es la altura de la señal, medida en metros, y t es el número de segundos que habrán transcurrido después del disparo. La luz de la señal aparece en el momento del disparo y la mantiene hasta que la señal regresa al suelo. Si la pistola es disparada verticalmente, la luz de la señal puede verse desde un puesto de observación solamente cuando su altura es de *425* metros o más.

a) ¿A los cuántos segundos alcanza la señal su altura máxima?
b) ¿Cuál será la altura máxima que alcanza?
c) ¿Cuánto tiempo será visible la señal desde el puesto de observación?

R. a) 30 segundos; b) 765 metros; c) 40 segundos

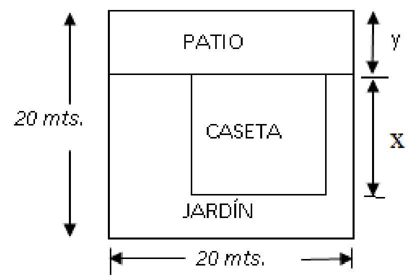
8. En el centro de un terreno cuadrado cuyos lados miden 20 metros, se quiere construir una caseta cuadrada. Además de la caseta, una parte del terreno se destinará a un patio y la otra a jardín, con la distribución que se muestra en la figura.



Si en total se desean 224 m^2 de jardín, ¿cuáles serán las dimensiones del terreno que ocupará la caseta?

R. Las dimensiones del terreno que ocupará la caseta es de 4×4 *o* 6×6

9. Suponiendo que en el problema anterior no se requiere que la caseta esté centrada y se mantengan las demás condiciones, el ancho del patio depende del lado del terreno de la caseta:



a) Expresar *y* en función de *x*.
b) Calcular los ceros de la función.
c) Establecer los valores de *x* aplicables al terreno.
d) Obtener el valor máximo que puede tener *y*.

R. a) $y=-\frac{1}{20}x^2+\frac{44}{5}$; b) $-4\sqrt{11}$ *y* $4\sqrt{11}$; c) $0 \leq x \leq 4\sqrt{11}$ d) $\frac{44}{5}$

Nota: para todas las construcciones con regla y compás, enumerar los pasos y demostrar la construcción.

10. Dadas dos rectas paralelas y un punto en el "*exterior*" de dichas rectas, trazar con regla y compás un triángulo rectángulo para el cual el punto es uno de sus vértices, la recta más cercana al punto es una altura y la otra recta es una mediatriz.

11. Dadas dos rectas paralelas y un punto en el "interior" de ambas rectas, hallar un triángulo que tenga un ángulo de 60^0 y para el cual el punto es uno de sus vértices, una de las rectas es una altura y la otra es una mediatriz.

12. Dadas dos rectas que se cortan y un punto que no pertenece a ninguna de las rectas, hallar un triángulo para el cual, dicho punto es un vértice, una de las rectas es una mediana y la otra una altura. (Existen dos casos. Dibuje al menos uno de ellos).

13. Dibujar con regla y compás un triángulo cuyos ángulos sean de 90^0, 75^0 y 15^0, los lados de cualquier dimensión.

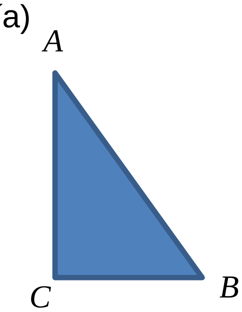
14. Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar una recta que pase por el punto y forme con la primera recta un ángulo de 30^0.

15. Dado un segmento $\overline{AB}$ trazar un triángulo rectángulo para el cual dicho segmento sea la hipotenusa y los ángulos agudos sean respectivamente de 30^0 y 60^0.

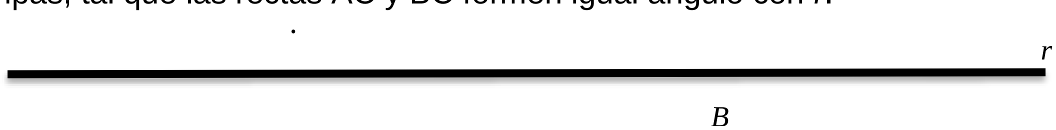
16. Dado un segmento $\overline{AB}$ trazar un triángulo cuyos ángulos tengan respectivamente 90^0, 60^0 y 30^0 para el cual dicho segmento sea el cateto que se opone al ángulo de 60^0.

17. El triángulo ABC es isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Por un punto cualquiera P de $\overline{BC}$ se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$, éstas cortan a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ en *R* y *S* respectivamente. Muestre que la suma de $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ es igual a la altura que pasa por C.

18. En el triángulo rectángulo *ABC*, la hipotenusa es el doble del cateto *BC*. Pruebe que $\hat{B} = 60^0$ y $\hat{A} = 30^0$ (sin usar trigonometría)

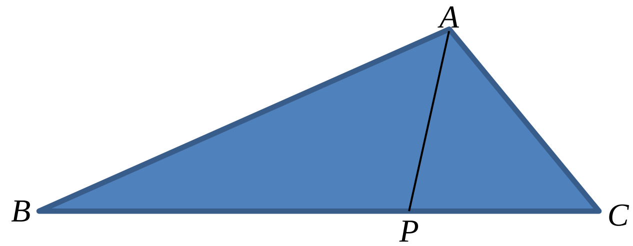


19. Dada una recta *r*, localizar un punto C sobre la recta *r,* usando regla y compás, tal que las rectas AC y BC formen igual ángulo con *r*.

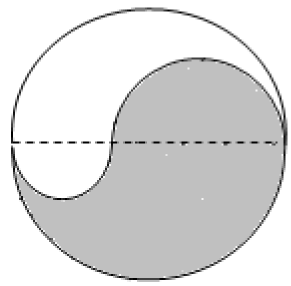


20. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm. Encuentre la distancia del incentro al cateto menor.

21. Sea *ABC* un triángulo cualquiera, y *AP* la bisectriz interior del ángulo *A*. Muestre que $\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$, es decir, que los segmentos determinados por la bisectriz interior de un ángulo sobre el lado opuesto, son proporcionales a los otros dos lados.

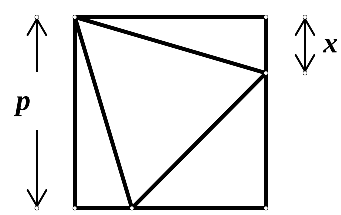


22. El diámetro de un círculo está dividido en una razón de ¾. Sobre cada diámetro se construyen dos semicírculos como muestra la figura. Establece la razón del área blanca respecto al área sombreada.



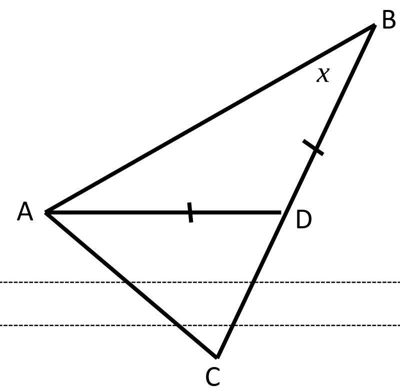
R. La razón del área blanca respecto al área sombreada es $\frac{3}{4}$

23. Sea *x* la distancia entre un vértice del cuadrado y el vértice del triángulo equilátero que se muestran en la figura; *p* es la magnitud del lado del cuadrado. Obtener el valor de *p* en términos de *x.*



R. $p = (2 \pm \sqrt{3})x$

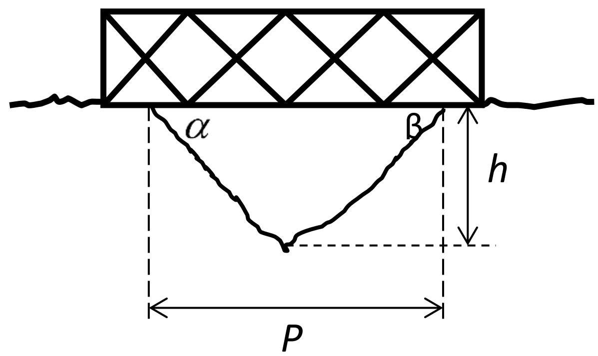
24. En el triángulo $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Determina la medida del ángulo *x*.



R. La medida del ángulo *x* es de 36º

25. Se construye un puente para pasar sobre una barranca, como se muestra en la figura. Se han representado dos ángulos □□y□□□
h representa la profundidad y *P* la distancia de una orilla a la otra de la barranca.
Demostrar que:

$$\frac{P}{h} = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$$

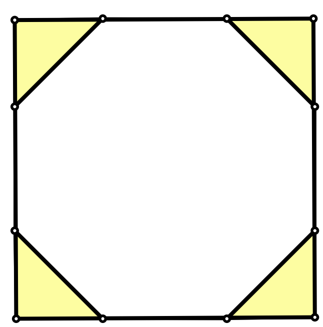


26. Sea *D* la longitud de la bisectriz del mayor de los ángulos agudos en el triángulo de lados 3, 4 y 5.

D se puede expresar como $D = \frac{m\sqrt{k}}{n}$, donde *m, n* y *k* son enteros positivos tales que *m* y *n* no tienen divisores comunes y *k* no tiene factores cuadrados mayores que 1.
Determinar los valores de estos enteros.

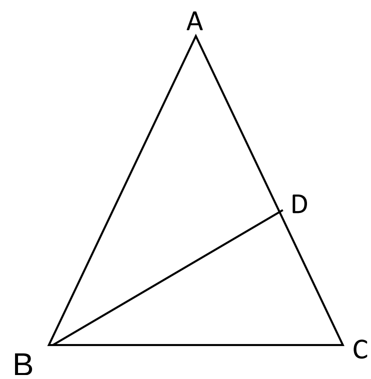
R. m = 3, n = 2, k = 5

27. En un cuadrado de lado 3 se cortan triángulos rectángulos isósceles en cada una de sus cuatro esquinas, de tal manera que se forma un octágono regular al interior del cuadrado.
Demostrar que el área de este octágono se puede expresar como $18\sqrt{2} - 18$

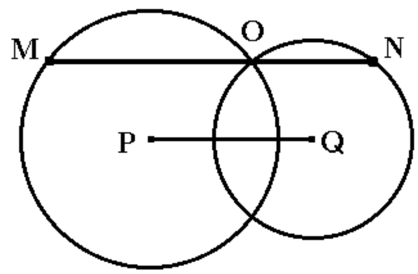


28. Demostrar que el área de un dodecágono regular de lados 2 es $12\left(2+\sqrt{3}\right)$

29. En la figura:
$\overline{AB} \cong \overline{AC}, \quad AD = BD = BC = 2$
Demostrar que el perímetro del triángulo ABC es $4 + 2\sqrt{5}$



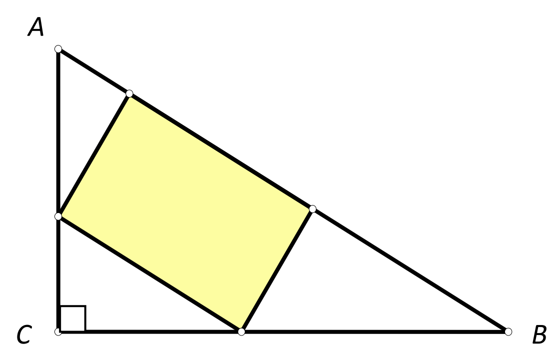
30. Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 3 centímetros. Por uno de los puntos “O” donde se cortan las circunferencias, trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide MN?



R. $\overline{MN} = 6$

31. En la figura, $AC = 3$, $CB = 4$

Determinar el área del rectángulo inscrito en el triángulo, si se sabe que su lado sobre la hipotenusa del triángulo mide 3 unidades.



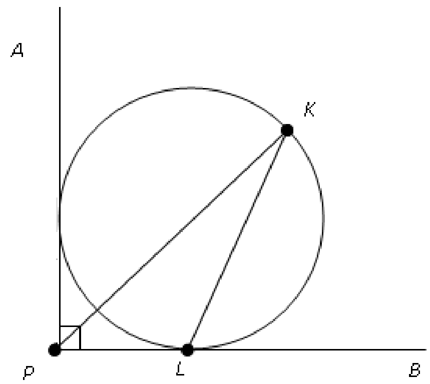
R. El área del rectángulo inscrito en el triángulo es $\frac{72}{25}u^2$

32. En la figura, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son dos segmentos perpendiculares tangentes a la circunferencia de radio 1.

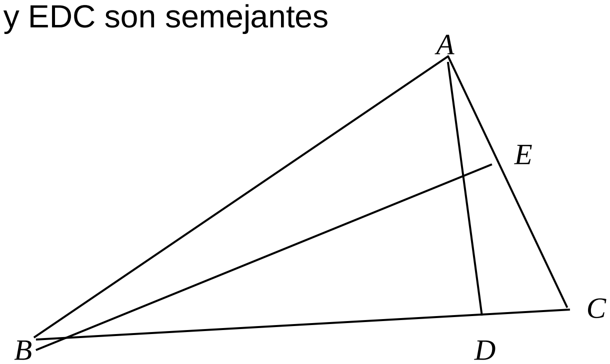
$\overline{PK}$ pasa por el centro de la circunferencia, *L* es punto de tangencia entre la circunferencia y el segmento $\overline{PB}$

Demostrar que el perímetro del triángulo *PLK* se puede expresar como:

$2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$



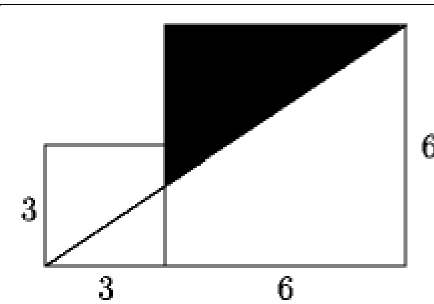
33. En el triángulo ABC se trazan las alturas AD y BE. Demuestre que los triángulos ABC y EDC son semejantes



34. Un círculo de 8 centímetros de radio está inscrito en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es igual a 40 centímetros. Determinar los catetos de este triángulo.

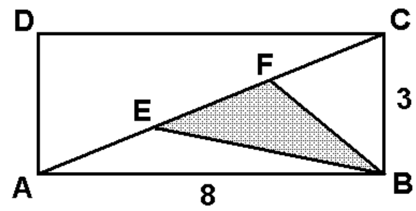
R. Los catetos de este triángulo miden 24 y 32 centímetros

35. En la figura siguiente, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 *cm* y cada lado del cuadrado más grande mide 6 *cm*, ¿qué parte del cuadrado mayor es el área sombreada?



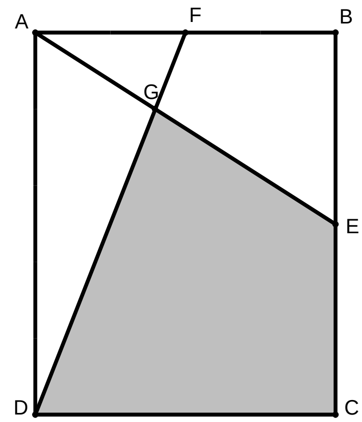
R. Un tercio

36. La longitud del rectángulo ABCD es 8 u y su anchura 3 u. Dividimos la diagonal AC en tres partes iguales mediante los puntos E y F. ¿Cuánto vale el área del triángulo BEF?



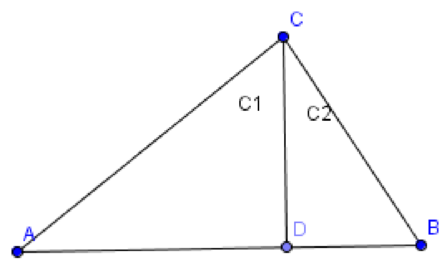
R. 4 u^2

37. En el rectángulo *ABCD* de la figura, $AB = 4$ y $BC = 5$. *F* es punto medio de $\overline{AB}$ y *E* es punto medio de $\overline{BC}$. Calcular el área delcuadrilátero *GECD*.



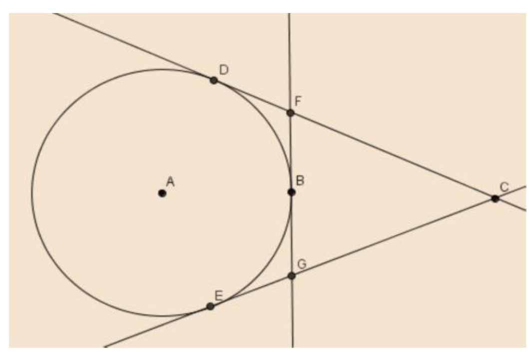
R. El área del cuadrilátero *GEDC* es de 11 unidades cuadradas.

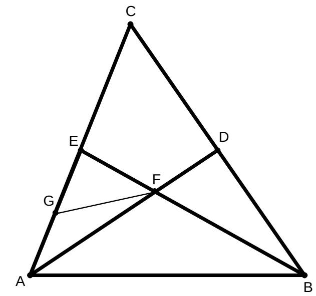
38. En la figura, la línea que separa a los ángulos C_1, y C_2 es la altura de los tres triángulos, y considere *A*, *B*, C_1, C_2 como las medidas de los ángulos, con *B*>*A*. ¿Será cierta la relación $B - A = C_1 - C_2$?



R. Es cierta la relación.

39. Dibujar dos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior *C*. Cada tangente toca a la circunferencia en los puntos *D* y *E* respectivamente. Una tercera tangente intercepta al segmento $\overline{CD}$ en el punto *F* y a $\overline{CE}$ en el punto *G*. Esta última tangente toca a la circunferencia en el punto *B*. Si $\overline{CD} = 20\,cm$,hallar el perímetro del triángulo *CFG*



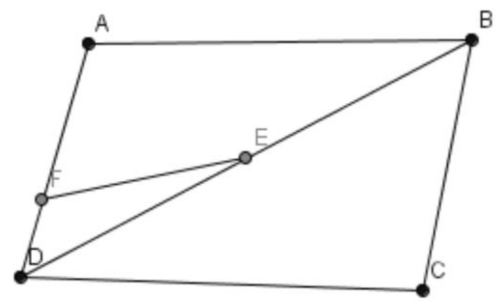
40. Dibujar un triángulo *ABC* y trazar las medianas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, las cuales se cortan en el punto *F*. Trazar el segmento $\overline{FG}$, donde *G* es el punto medio de $\overline{AE}$. ¿Qué parte es el área del triángulo *FGE* del área del triángulo *ABC*?	

R. El perímetro del triángulo *CFG* es de 40*cm*.

R. Es la doceava parte

40. En el paralelogramo *ABCD*, *E* es el punto medio de la diagonal $\overline{BD}$ y *F* está en el segmento $\overline{AD}$, de modo que $3\overline{DF} = \overline{DA}$.

a) ¿Qué parte es el área del triángulo *DFE* del área del paralelogramo *ABCD*?
b) ¿Qué parte es el área del triángulo *DFE* del área del cuadrilátero *ABEF*?



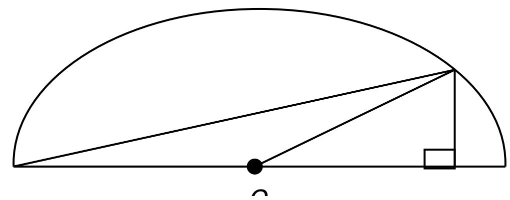
R. a) La doceava parte; b) La quinta parte

41. La suma de los perímetros de dos círculos es 16π, y la diferencia de sus áreas es 32π, ¿Cuánto miden sus radios?

R. Los radios de los círculos miden 6 y 2 unidades.

V. Problemas para Matemáticas III

1. En la figura aparece una semicircunferencia con centro *O*. Utiliza esta figura, asignando las medidas que creas convenientes para demostrar que:



a) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$

c) $sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

d) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

e) $sen15° = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

f) $sen75° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

2. Sean *n* y *k* dos variables numéricas relacionadas mediante la ecuación

$$k = 42 - 2n(n+4)$$

Localicemos en un sistema de coordenadas cartesianas la gráfica formada por los puntos (*n*, *k*) que satisfagan la ecuación anterior. Llamemos *A* y *B* a los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal; llamemos *D* al punto donde la gráfica corta al eje vertical y *C* al punto de la gráfica que tiene la misma ordenada que *D*; finalmente, llamemos *E* al punto de la gráfica cuya ordenada tenga el mayor valor posible.

Ahora consideremos el pentágono cuyos vértices son los puntos *A, B, C, D* y *E*.

Determinar el área y el perímetro de este pentágono.

R. Área = 310, perímetro = $6\sqrt{197} + 4\sqrt{17} + 10$

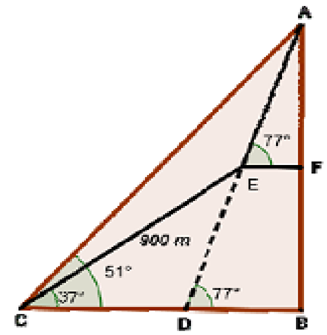
3. Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2, -1), (7, -1) y (7, 3). Encontrar el cuarto vértice y el área del Rectángulo.

R: (2, 3), Área = 20

4. Sean *A, B, C* y *D* las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero cuyos lados son las rectas de ecuaciones $5x-4y+14=0$, $4x+3y-26=0$, $3x-2y-11=0$ y $2x+5y-1=0$:
Calcular el área del cuadrilátero *ABCD.*

R. El área del cuadrilátero *ABCD* es de 25unidades cuadradas.

5. Desde el punto C, el ángulo de elevación de la cima A de una peña es de 51° (ver figura). Después de subir 900 metros por la rampa CE, inclinada 37° con la horizontal, se llega al punto E desde el que la peña se ve bajo un ángulo de 77°. Con esos datos, se pide calcular la altura AB de la peña. Suponer que AB⊥CB.



R. La altura de la peña es de 1025.58 metros

6. Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos de (2, 5), (4, 2) y (1, 1). Encontrar las coordenadas de los tres vértices.

R. (-1,4), (5,6) y (3,-2)

7. Encontrar los ángulos interiores del triángulo con vértices:

$A(-2,1)$, $B(1,3)$ y $C(6,-7)$.

R. Los ángulos interiores del triángulo miden: $Tan^{-1}(5)=$ 78.69º, $Tan^{-1}(8)=$ 82.87º, $Tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=$ 18.44º

8. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1,2)$ es siempre el doble de su distancia al eje *X*.

R. La ecuación del lugar geométrico es: $x^2 - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

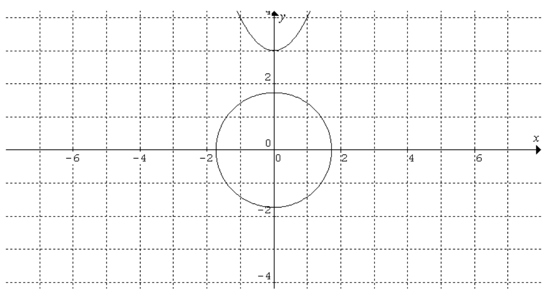
9. Encontrar la distancia entre las rectas paralelas: *2x – 5y = 4 y 4x – 10y = 14*

R. La distancia entre las rectas paralelas es: $\frac{3\sqrt{29}}{29} = 0.5571$

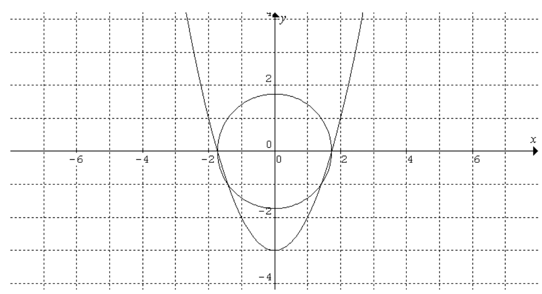
10. Graficar y resolver algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{matrix} y = x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} y = x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} y = x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{matrix}$

R. a) No tiene solución

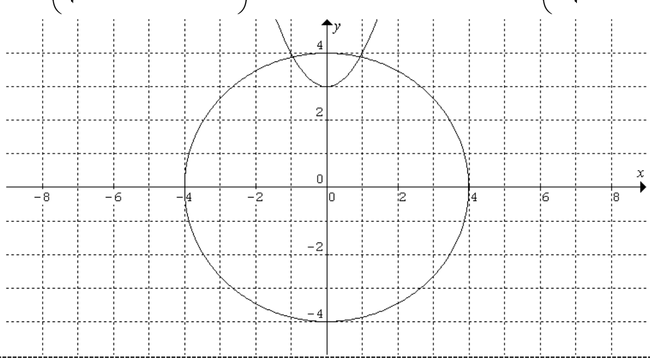


b) Tiene 4 soluciones $\left(\sqrt{2},-1\right)$, $\left(-\sqrt{2},-1\right)$, $\left(\sqrt{3},0\right)$, $\left(-\sqrt{3},0\right)$



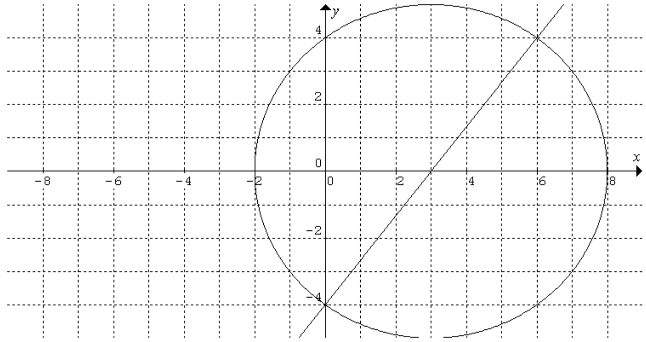
c) Tiene dos soluciones:

$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{77}-7}{2}}, \frac{\sqrt{77}-1}{2}\right) \approx (0.942062733, 3.887482194)$ $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{77}-7}{2}}, \frac{\sqrt{77}-1}{2}\right) \approx (-0.942062733, 3.887482194)$



11*.* Encontrar las intersecciones de la recta cuya ecuación es *4x – 3y – 12 = 0 con la circunferencia de e*cuación *$x^2 - 6x + y^2 - 16 = 0$.* Graficar las ecuaciones.

R. Las intersecciones de la recta con la circunferencia están en: (0,-4) y (6,4)



12. El punto *P* (*x* ,4) es equidistante de los puntos *A* (5, -2) y *B* (3, 4). Encontrar el valor de *x*.

R. La abscisa es: *x* = 13

13. Determinar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos: *L* (9, 3), *M* (4, -2) y *N* (8, 6).

R. C(4,3), Radio=

14. Se dan *G* (-5, 8), *K* (2, *a*) y *H* (*b*, 1). Determinar *a* y *b* de manera que *K* sea el punto medio de $\overline{GH}$.

R. Para que *K* sea el punto medio de $\overline{GH}$, $a = \frac{9}{2}$, *b* = 9

15. Los extremos de un segmento de recta son los puntos *A* (-4, 6) y *B* (5, -2). Encontrar las coordenadas de los puntos que trisecan el segmento.

R. $P_1 = \left(-1, \frac{10}{3}\right)$, $P_2 = \left(2, \frac{2}{3}\right)$

16. Encontrar la ecuación del lugar geométrico generado por un punto *P* que se mueve en el plano y que equidista del punto *F* (3, 0) y de la recta con ecuación

$x + 3 = 0.$

R. $y^2 = 12x$

17. Encuentra la medida del ángulo agudo que forman las rectas l_1 y l_2: donde l_1 pasa por los puntos $A(8,6)$ y $B(-2,1)$ y l_2 pasa por los puntos $C(4,6)$ y $D(2,-2)$.

R. $\phi = arc\ \tan\left(\frac{7}{6}\right)$

18. Una recta cuya ordenada en el origen es una unidad menor que su abscisa en el origen, forma un triángulo con los ejes coordenados, cuya área es 6 ¿Cuál es su ecuación?

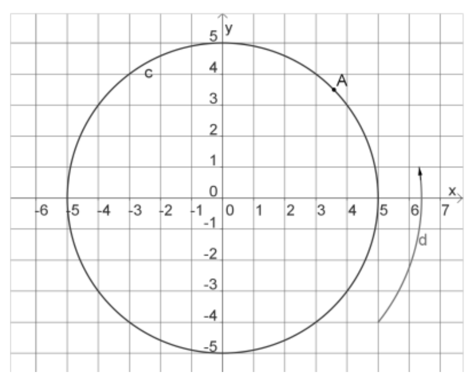
R. La ecuación es:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \quad ó \quad 3x+4y-12=0$$

19. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que al pasar por el punto (4, 3) cada una de ellas forma con los ejes del sistema de coordenadas un triángulo en el primer cuadrante cuya área es de 27 unidades cuadradas?

R. $3x+2y=18$, $3x+8y=36$

20. Un objeto se mueve en forma circular en un plano cartesiano como se muestra en la figura, sí el objeto se suelta cuando está en la posición (3, –4), obtenga la ecuación de la curva que se obtiene al salir disparado en ese punto:



R. $-3x + 4y + 25 = 0$

21. En cada uno de los siguientes ejercicios realiza lo que se pide:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (1,1) y (-3,3)
b) Demostrar que los puntos (-1,2); (3,0); (5,-1) y (-2,-7) pertenecen a la recta obtenida en el inciso anterior.
c) Demostrar que los puntos (-1,2); (3,0) y (5,-1) son colineales.

R.
a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos: (1, 1) (-3, 3) es $x+2y-3=0$
b) Los puntos que pertenecen a la recta son: (-1, 2), (3, 0), (5, -1) y no pertenece a la recta el punto (-2, -7).
c) Los puntos son colineales ya que todas las pendientes entre ellos son iguales.

22. Los lados de un triángulo están dados por las ecuaciones de las rectas siguientes. $x - 2y + 1 = 0$; $3x - y - 13 = 0$; $2x + y - 13 = 0$. Obtener:

a) Los vértices del triángulo.
b) El área del triángulo.
c) Las ecuaciones de sus medianas.
d) Las ecuaciones de las mediatrices.
e) Las ecuaciones de las alturas.

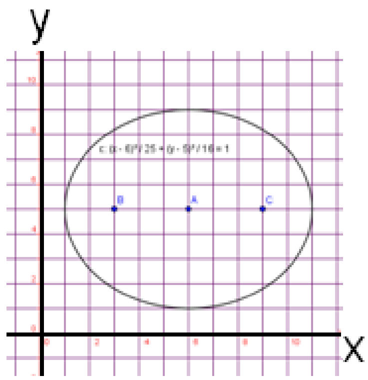
R.

a) Los vértices del triángulo están en: $A(5,3)$, $B\left(\frac{26}{5},\frac{13}{5}\right)=B(5.2,\,2.6)$
$C\left(\frac{27}{5},\frac{16}{5}\right)=(5.4,3.2)$
b) El área del triángulo mide: $A=\frac{\sqrt{\frac{1}{25}}}{2}=0.1$ u^2.
c) Las ecuaciones de las medianas son:
$5x - 26 = 0,\ x + 3y - 14 = 0,\ 4x - 3y - 12 = 0$
d) Las ecuaciones de las mediatrices son:
$4x + 2y - 27 = 0,\ \ x + 3y - 14 = 0\ y\ \ 2x - 4y + 1 = 0$
e) Las ecuaciones de las alturas son:
$2x + y - 13 = 0,\ x + 3y - 14 = 0,\ \ x - 2y + 1 = 0$

23. Graficar y encontrar la ecuación de la elipse con centro *C* (6 , 5), si la longitud del eje mayor es 10 *u*, y uno de sus focos se encuentra en *F* (3 , 5).

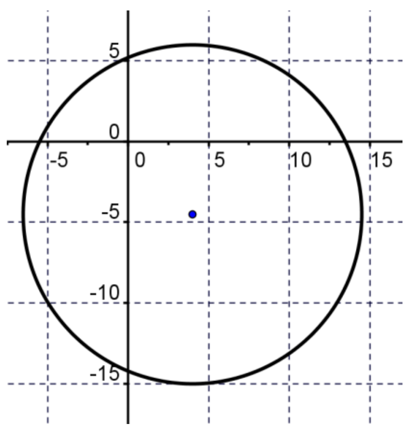
R. La ecuación de la elipse en forma general y ordinaria son:

$16x^2 + 25y^2 - 192x - 250y + 801 = 0$ $\quad \frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$



24. Escribir la ecuación de la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 16x + 18y - 148 = 0$ en la forma ordinaria, encontrar las coordenadas del centro, indicar cuánto mide el radio y graficar.

R.



Ecuación de la circunferencia:

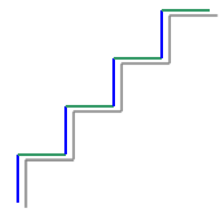
$$(x-4)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$$

Centro $C\left(4,-\frac{9}{2}\right)$, radio $r = \frac{21}{2}$

25. Sea la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y + k = 0$. Determinar el conjunto de valores de *k* para que la ecuación represente: a) Una circunferencia, b) Un punto y c) Ninguna de las anteriores

R. a) $k < 13$, b) k = 13, c) k > 13

26. Si se sabe que una escalera con ángulo de inclinación es de 52º y el ancho de cada escalon es de 15cm.¿Qué tan arriba está una persona si sube 5 escalones



R. 96 cm.

27. Obtener la ecuación de la circunferencia en su forma general, que pase por los puntos (2,1), (1,4) y (3,0).

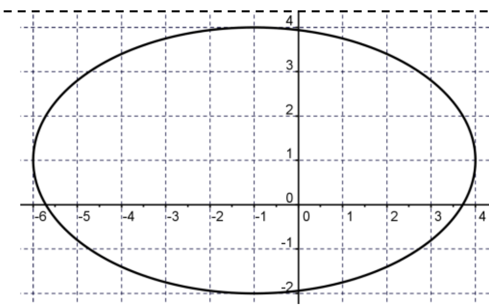
R. $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$

28. Hallar el lugar geométrico de los puntos *P*(*x, y*) cuya suma de distancias a los puntos fijos (3,1) y (-5,1) sea igual a 10, e indicar qué curva representa dicho lugar geométrico.

R.
La ecuación del lugar geométrico es:
$9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$, o

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

representa una elipse horizontal con centro en *C*(-1, 1)



29. Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias de radio 2 y centro en (1,2) y (3,3).

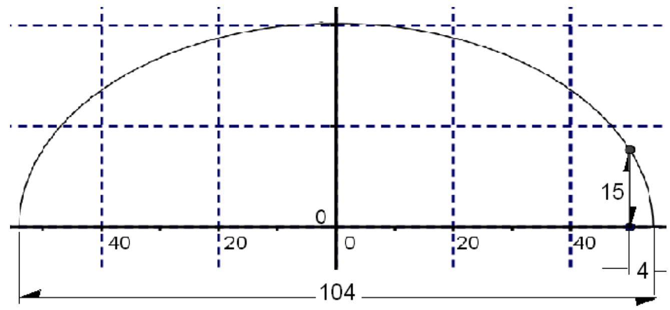
R.

$$\left(2+\sqrt{11/20}\ ,\ \frac{5}{2}-\sqrt{11/5}\right) \quad \text{y} \quad \left(2-\sqrt{11/20}\ ,\ \frac{5}{2}+\sqrt{11/5}\right)$$

30. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A*(-4, -3) y *B*(5,10) y su centro está sobre la recta de ecuación $3x + y - 5 = 0$

R. $x^2 + y^2 - x - 7y - 50 = 0$

31. Un arco de forma semielíptica abarca un claro de 104 m. Si la altura del arco es de 15 metros a una distancia de 4m medida desde un extremo, ¿cuál es su altura máxima?



R. Altura máxima del arco 39 metros.

32. Para ensayar nuevos dispositivos de seguridad, dos autos de prueba se acercan siguiendo las trayectorias descritas por las rectas $2x - 3y = 0$ y $x + y = 5$. Se prevé que debido a la velocidad a que se aproximan, las partículas resultantes del impacto se desplazarán a 360 *km/hr* del sitio del choque y alcanzarán su máximo alejamiento en línea recta después de ½ segundo.

a) ¿Cuál es el radio en que se esparcen estas partículas? (pendiente)
b) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que encierra la zona afectada por el impacto?

R.

a) El radio en que se esparcen estas partículas es de 3 Km.
b) La ecuación de la circunferencia que encierra la zona afectada por el impacto es: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

33. Determinar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, el lado recto es uno de los diámetros de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 75 = 0$

R. La ecuación de la parábola es: $y^2 = 20x$

34. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, su trayectoria está dada por $S = 30t - 16t^2$ donde *t* es el tiempo en segundos y *S* es la altura sobre el piso. ¿En qué instante golpeará la pelota el piso?

R. La pelota golpeará el piso a los $\frac{15}{8}$ seg.

35. Determinar las ecuaciones de las parábolas en su forma ordinaria con base en los siguientes elementos:

a) *V* (2, 0), *F* (2, 2)
b) *V* (2, 3), *F* (6, 3)
c) Los extremos del lado recto son los puntos (3, 1), (3, 5) y abre a la izquierda.

R. a) $(x-2)^2 = 8y$ b) $(y-3)^2 = 16(x-2)$ c) $(y-3)^2 = -4(x-4)$

36. Encontrar las coordenadas del vértice, foco, y longitud del lado recto de las siguientes parábolas:

a) $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$
b) $x^2 - 12x + 16y + 60 = 0$

R. a) $V(4,4)$, $F\left(4,\frac{5}{2}\right)$, *LR = 6*

b) $V\left(6,-\frac{3}{2}\right)$, $F\left(6,-\frac{11}{2}\right)$, LR = 16

37. Hallar la ecuación de la parábola con eje vertical, que pasa por los puntos:

(4, 5), (-2, 11) y (-4, 21).

R. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

38. Por el punto *P* (0, -3) pasa una recta que es tangente a la curva cuya ecuación es $y = x^2$. Determinar las coordenadas del punto de tangencia.

R. $(\sqrt{3},3)$ o bien $(-\sqrt{3},3)$

VI. Problemas para Matemáticas IV

1. Consideremos dos variables numéricas *R* y *n*, relacionadas mediante la ecuación

$$R = 6n + \frac{12}{n}$$

Restrinjamos la asignación de valores de *n* a los números reales positivos.

R. a) Sí, hay dos: 12 y $\frac{1}{6}$; b) No existen; c) Sí existe: $12\sqrt{2}$; d) no existe

2. Las dimensiones de una caja son 1, 2 y 3 *dm* de ancho, largo y alto, respectivamente. Si se modifican las dimensiones aumentando cada lado de la caja en la misma cantidad y como consecuencia de esto el volumen es de 60 dm^3:

a. Escribir la ecuación que resuelve el problema.
b) ¿En cuánto se incrementa cada lado?

R. a) $x^3 + 6x^2 + 11x - 54 = 0$
b) Cada lado se aumenta 2 *dm* a cada dimensión.

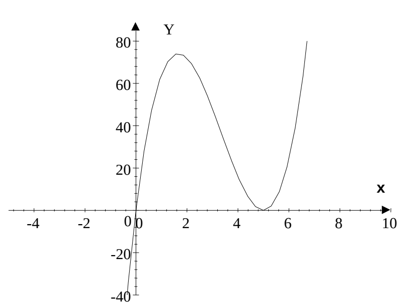
3. Se necesitan construir cajas de cartón sin tapa de diferentes capacidades. Para su construcción se utilizan láminas que tienen la forma de un cuadrado de10*cm*de lado.
Si de cada esquina se le cortan cuadrados de *x cm* de lado:

a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja?
b) Obtener una función *V*(*x*) que relacione a la caja con su volumen.
c) Realizar un bosquejo de su gráfica.
d) ¿Para qué valores de la variable *x* se obtiene un volumen máximo y para cuáles un mínimo?

R. a) Las dimensiones de la caja deben ser de alto *x*, $10 - 2x$ de largo y de ancho.

b) La función *V*(*x*) que relaciona a la caja con su volumen es:
$$V(x) = x(10-2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

c) Gráfica:



d) El valor máximo del volumen de la caja se observa que se aproxima a 74.05 para valores cercanos a *x* = 1.7.

4. Conocida la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 14x - 15$, obtener

a) El número máximo de sus raíces.
b) La función en forma factorizada.
c) Los ceros de la función.

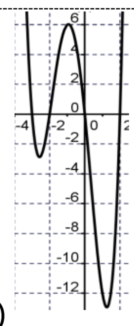
R.

a) El número máximo de sus raíces es 3
b) La función en forma factorizada es: $f(x) = (x+1)(x+3)(2x-5)$
c) Las intersecciones con los ejes cartesianos son: (-3,0), (-1,0), (5/2,0) y (0,-15).

5. Sea la función polinomial $P(x)= x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x$, obtener:

a) Los ceros de la función.
b) El bosquejo de su gráfica.
c) Su Dominio.

R. a) $x = -3, -2, 0, 2$ b)



c) Dominio: $\mathbb{R}$

6. Encontrar los valores de A y $B \in \mathbb{R}$; de la función polinomial $g(x) = x^4 - Ax^3 - 3x^2 + Bx + 4$, si g (-1) = 0 y x-2 es un factor de $g(x)$.

R. $A = 2, \quad B = 4$, la función polinomial es: $g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

7. Obtenga las raíces de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0$
b) $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 + x = 0$

R.

a) $x_1 = 3, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = -\frac{1}{3}, \quad x_4 = \frac{2}{3}$

b) $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_5 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

8. Construir alguna ecuación que tiene por raíces

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = \frac{1}{2} \quad x_5 = 3+i \quad x_6 = 3-i$

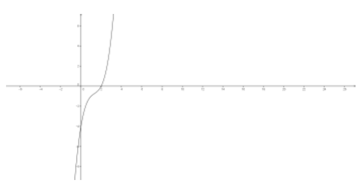
R.

$$x^2(x-3)(x-\frac{1}{2})(x-3-i)(x-3+i) = 0$$

$$2x^6 - 19x^5 + 65x^4 - 88x^3 + 30x^2 = 0$$

9. Grafica la función que tiene como raíces $x_1 = 2 \quad x_2 = 1+i \quad x_3 = 1-i$

R $y = (x-2)(x-1-i)(x-1+i) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$



10. Dada la función obtener sus raíces $f(x) = (x^2-4)(x^2+1)(2x^2-3x-9)$

R

$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 1 = 0$	$2x^2 - 3x - 9 = 0$
$x^2 = 4$	$x^2 = -1$	$(x-3)(2x+3) = 0$
$x = \pm 2$	$x = \pm i$	$x = 3 \quad x = \frac{-3}{2}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = i \quad x_4 = -i \quad x_5 = 3 \quad x_6 = \frac{-3}{2}$

11. Se desea doblar un alambre para formar un rectángulo que encierre un área de 6 metros cuadrados. Si se representa por *L* a la longitud del alambre y por x a la longitud de uno de los lados del rectángulo formado, demostrar que:

a) *L* es una variable que depende de x

b) La dependencia entre *L* y x puede expresarse mediante la función

$$L(x) = 2x + \frac{12}{x}$$

c) No hay un máximo valor de *L.*

d) No es posible formar el rectángulo deseado con un alambre de 8 metros de longitud.

R.

a) Si y representa la longitud del otro lado del rectángulo, entonces esta longitud será: $xy = 6 \Longrightarrow y = \frac{6}{x}$. Por otro lado, la longitud del cuadrado se obtiene como: $L(x, y) = 2x + 2y$, como $y = \frac{6}{x}$, *L* es una variable que depende de *x*:

$L(x) = 2x + 2\left(\frac{6}{x}\right)$

b) La dependencia entre *L* y *x* puede expresarse mediante la función

$L(x) = 2x + \frac{12}{x}$, porque: $y = \frac{L(x) - 2x}{2}$; $A(x) = x\left(\frac{L - 2x}{2}\right) = 6$

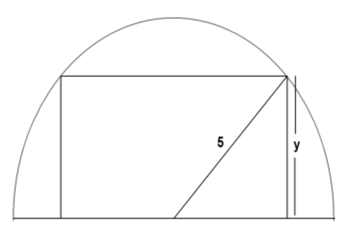
Por lo que: $L(x) = \frac{12 + 2x^2}{x}$ y $L(x) = 2x + \frac{12}{x}$

c) *L* no tiene máximo porque cuando x tiende a infinito la función crece como $2x$

d) No es posible formar el rectángulo deseado con un alambre de 8 metros de longitud, porque la función no está definida para 8.

12. En un semicírculo cuyo diámetro tiene 10 centímetros de longitud se pueden inscribir rectángulos de tal forma que uno de sus lados esté sobre el diámetro del semicírculo.

Si representamos por *A* al área del rectángulo y por *x* a la longitud del lado sobre el diámetro, demostrar que:



a) *A* es una variable que depende de *x.*

b) La dependencia entre *A* y *x* puede expresarse mediante la función:

$$A(x) = \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$$

c) Hay dos rectángulos cuya área es 24u^2.

d) La máxima área es 25 centímetros cuadrados.

R

a) Debido a que $A(x) = xy$, entonces: $y = \sqrt{25 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$; por lo que

$$A(x) = x\sqrt{25 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

b) *La dependencia entre A* y *x* puede expresarse como: $A(x) = \dfrac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$

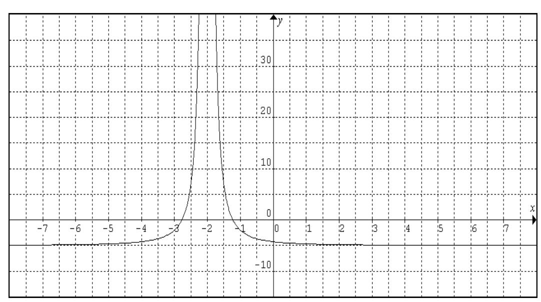
c) Hay dos rectángulos cuya área es 24 u^2, con medidas 8 y 3; 6 y 4.

d) La máxima área es de 25 centímetros cuadrados y se tiene cuando la longitud del lado sobre el diámetro es 7.

13. Realizar el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} - 5$ utilizando los desplazamientos horizontales y verticales, la compresión y/o alargamiento de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Indicar las ecuaciones de sus asíntotas. Encontrar los ceros, el dominio y el rango de la función.

R. La gráfica está desplazada 2 unidades a la izquierda y 5 hacia abajo y está alargada en el triple con respecto a $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Bosquejo de la gráfica de la función: $f(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} - 5$



Ecuaciones de sus asíntotas:

Asíntota horizontal y = -5

Asíntota vertical x = -2.

La función tiene ceros en $x = -2 + \dfrac{\sqrt{15}}{5} = -1.2254$ y en $x = -2 - \dfrac{\sqrt{15}}{5} = -2.7746$

Dominio **R** – {-2}, Rango ***y***> -5

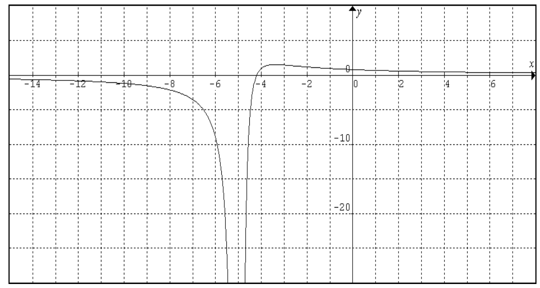
14. Realizar el bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{5x+21}{x^2+10x+25}$ Indicar las ecuaciones de sus asíntotas. Encontrar los ceros de la función y su dominio.

R. Tiene una única asíntota vertical en $x = -5$

Una asíntota horizontal en $y = 0$.

La función tiene un cero en $x = -\dfrac{21}{5} = -4.2$

El Dominio de la función **R** – {-5}

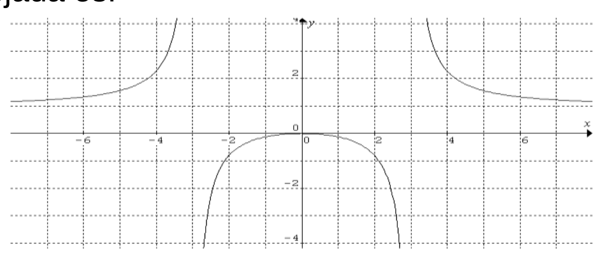


15. Dada la función $y = \dfrac{x^2}{x^2-9}$ hallar:

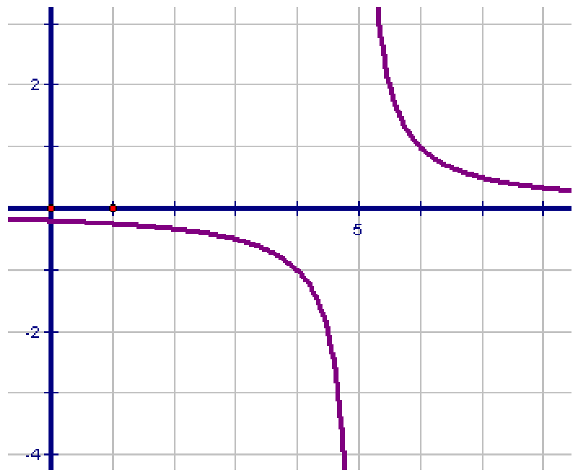
a) El dominio de la función.
b) El rango de la función.
c) Valores máximos locales.
d) Las ecuaciones de todas las asíntotas.
e) Bosquejar la gráfica.

R

a) Dominio: $x \in (-\infty, 3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$
b) Rango: $y \in \left(-\infty, -\frac{1}{9}\right] \cup (1, \infty)$
c) La función tiene un máximo local en el punto (0, 0) y es el único.
d) Asíntotas horizontales $\boldsymbol{y} = 1$, asíntotas verticales $\boldsymbol{x} = -3$ y $\boldsymbol{x} = 3$
e) La gráfica bosquejada es:



16. Escribir la expresión racional que define la función cuya gráfica es:



R. $f(x) = \dfrac{a}{x-5} \quad donde \quad a > 0$

17. El costo, en miles de pesos, por producir x toneladas de azúcar refinada en un ingenio azucarero, puede representarse con la función C(x) = 14400 + 6450x. Esta función considera un gasto fijo inicial por operación de maquinaria, equipo y herramienta, más gastos de administración, por $14,400 y un costo de $6,450 por producir cada tonelada de azúcar.

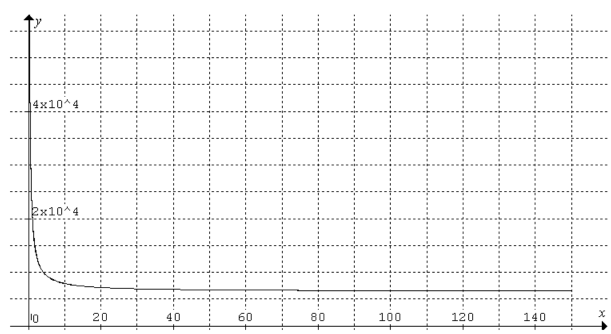
a) Expresar como función de x el costo promedio para producir una tonelada de azúcar.
b) Elabora un bosquejo de la gráfica del costo promedio.
c) Hallar el costo promedio por tonelada cuando el ingenio alcanza una producción de 70, 120 y 140 toneladas de azúcar.

R

a) $\overline{C}(x) = \dfrac{14400 + 6450x}{x}$

b) Gráfica de la función del costo promedio:

c) El costo promedio por tonelada cuando el ingenio alcanza una producción de 70 toneladas de azúcar es de $6,655.71, con 120 toneladas de azúcar es de $6,570 y con140 toneladas de azúcar es de $6,552.86.



18. En Los Cabos, B.C. el comportamiento de la ocupación hotelera de enero a octubre se puede modelar con la función $h(x)=\dfrac{70000}{2x^2-8x+10}$ (Considerar enero como el mes cero).

a) ¿Cuál fue la ocupación durante los meses de enero y febrero?
b) ¿En qué mes se obtuvo la máxima demanda de habitaciones y a cuánto ascendió?
c) ¿Cuáles son los meses en que se alcanza 10 000 habitaciones ocupadas?

R.

a) En enero se ocuparon 7,000 habitaciones y en febrero se ocuparon 17,500.
b) El mes en el que se obtuvo la máxima demanda de habitaciones corresponde al mes de marzo y ascendió a 35 000 habitaciones.
c) Los meses en que se alcanza 10,000 habitaciones ocupadas, es a mediados de enero y a mediados de abril.

19. El costo en millones de dólares, por remover p% de contaminantes que se descargan en un río es: $C(p)=\dfrac{255p}{100-p}$

a) Obtener el dominio de la función con las restricciones del problema.
b) Encontrar el costo de remover 40% de los contaminantes.
c) Hallar el costo de remover 75% de los contaminantes
d) De acuerdo a este modelo ¿Sería posible remover el 100% de los contaminantes?

R:

a) El dominio de la función $D=\{p\epsilon\mathbb{R}/\ p\geq 0\ y\ p<100\}$
b) El costo de remover 40% de los contaminantes es de 170 millones.
c) El costo de remover 75% de los contaminantes es de 765 millones.
d) No es posible remover el 100% de los contaminantes, porque la función está indefinida para el valor de p = 100%

20. Una línea aérea ofrece vuelos diarios entre dos ciudades. El costo mensual de estos es: $C(x)=\sqrt{2x-1}$; *C* se mide en millones de pesos y *x* en miles de pasajeros.

a) Determinar el dominio y el rango de la función.
b) Identificar cuál es el mínimo de pasajeros necesarios para que el modelo tenga sentido.

c) Si el costo total de los vuelos para un determinado mes es de 2.5 millones de pesos, ¿cuántos pasajeros viajaron ese mes?

R:

a) Dominio: $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x \geq \frac{1}{2}\right\}$; rango: $R = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 0\}$
b) El mínimo de pasajeros para que el modelo tenga sentido es de 500.
c) Los pasajeros que viajaron ese mes fueron $x = \frac{(2.5)^2 + 1}{2} =$ 31.25 mil.

21. La función $p(x) = 30 - \sqrt{.001x - 1}$ representa el precio por unidad de un determinado producto y ***x*** es el número de unidades demandadas.

a) ¿Cuál es el mínimo de unidades demandadas de acuerdo al modelo?
b) ¿Cuál es el mínimo precio posible por unidad?

R. a) El mínimo de unidades demandadas de acuerdo al modelo es de 1000.

b) El mínimo precio posible por unidad es de 30 pesos.

22. Sea la función $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ obtener las ecuaciones de las asíntotas (horizontal y vertical), y las coordenadas del punto donde no está definida y ceros de la función

R Asíntota horizontal $y = 2$

Asíntota vertical $x = -3$

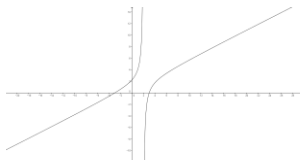
No está definida en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$

Cero $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

23. Graficar la función $f(x) = \frac{x^2 - 9}{2x - 4}$ y obtener las ecuaciones de las asíntotas.

R Asíntota oblicua $y = \frac{1}{2}x + 1$

Asíntota vertical x = 2



24. Obtener para cada una de las siguientes funciones: el dominio, el rango y graficar.

a) $f(x) = -\sqrt{64 - 4x^2}$

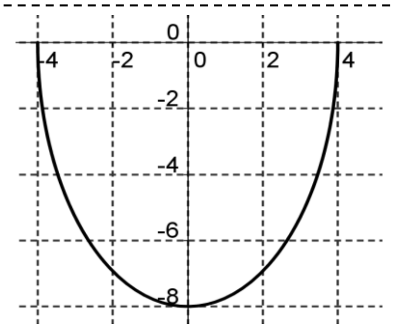
b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 21}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

R.

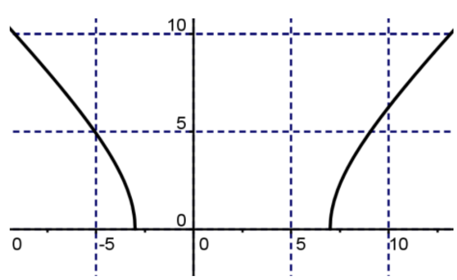
a) $D = \{x\varepsilon\Re \mid -4 \leq x \leq 4\}$

$R = \{y\varepsilon\Re \mid -8 \leq y \leq 0\}$



b) $D = [-\infty. -3] \cup [7, \infty]$

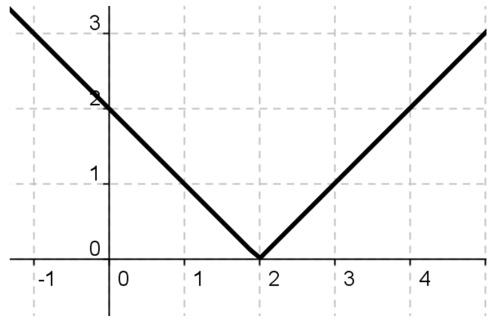
$R = \{y\varepsilon\Re \mid 0 \leq y < \infty\}$



c)

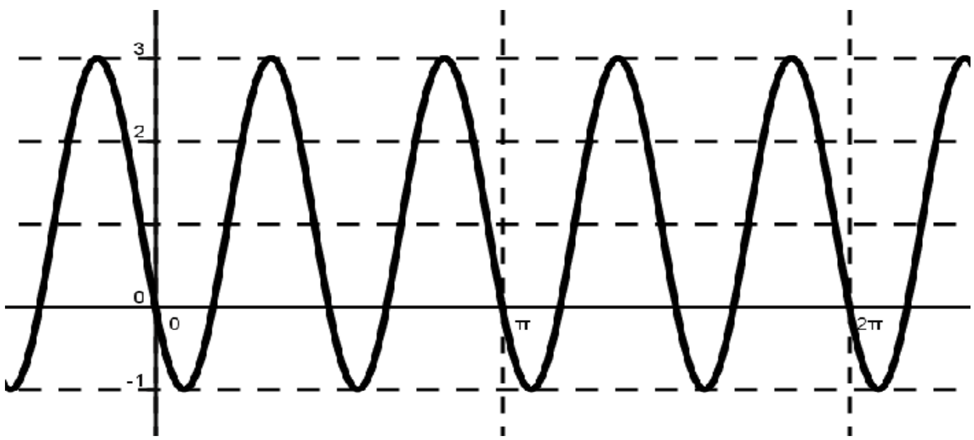
$D = \Re$

$R = \{y \varepsilon \Re \mid 0 \leq y\}$



25. Utilizar desplazamiento, alargamiento o compresión de la gráfica de la función $g(x) = senx$, para bosquejar la gráfica de la función $g(x) = -2sen\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

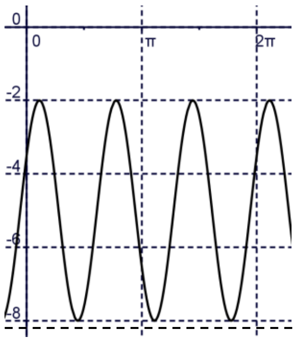
R. Gráfica de la función $g(x) = -2\,sen\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$



La amplitud es 2, el período es $\frac{1}{2}\pi$, el desplazamiento de fase es $\frac{1}{24}\pi$ a la izquierda y está trasladada una unidad hacia arriba.

26. Determinar el dominio y el rango, así como la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la función, $F(x) = 3sen\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 5$ y trazar su gráfica.

R. El Dominio es $\mathbb{R}$, el Rango -8 ≤ y ≤ -2; la amplitud es 3, el período es $\frac{2}{3}\pi$, el desplazamiento de fase es $\frac{1}{18}\pi$ a la izquierda y está trasladada cinco unidades hacia abajo.



27. Obtener el cero de la función

$R \quad (33.4349..., \ 0)$

28. La nota *La* que está arriba del *Do* central tiene una frecuencia de 440 *Hz*. Si la intensidad *I* del sonido a cierto punto, *t* segundos después de que se origina el sonido se describe mediante la ecuación, $I = 0.08 \ sen \ 880\pi t$, Calcular el mínimo valor positivo de *t* de manera que $I = 0.05$.

R. $t = \text{sen}^{-1}(5/8)/880\pi = 0.000244$ segundos

29. Suponiendo que la presión sanguínea de una persona oscila entre 120 y 70. Si el corazón late una vez cada segundo, escribir una función seno que represente la presión sanguínea de esta persona

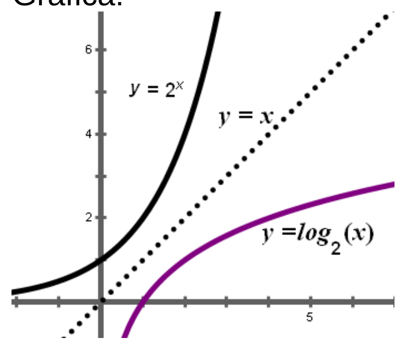
R. $P(t) = 25 + 95 \text{ sen } 2\pi t$

30. Obtener la función inversa de $y = 2^x$, y la gráfica de ambas funciones.

R.

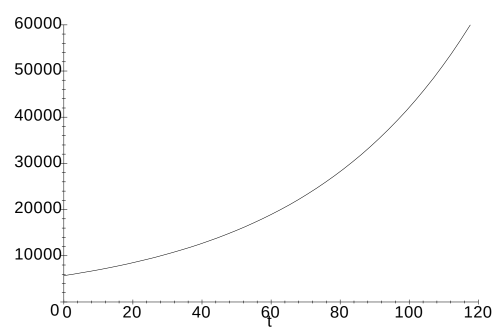
Función inversa $y = \log_2 x$

Gráfica:



31. Si n_0 es el tamaño inicial de la población mundial en el año *t* entonces n(t) está representada por $n(t)= n_0e^{rt}$ en donde *r* es la tasa de crecimiento relativo expresada como una función de la población. Si la población mundial en 1995 era de 5700 millones de habitantes y la tasa de crecimiento relativa estimada era del 2% anual ¿en qué año se alcanzan 57 000 millones de habitantes, si continúa creciendo al mismo ritmo? (dar el año entero en que se cumpla) Bosquejar su gráfica.

R. Se alcanzan los 57 000 millones de habitantes en el año 2111.



32. Un cultivo se inicia con 10 000 bacterias y su número se duplica cada 40 minutos y el crecimiento de la población está determinado por $n(t) = n_0e^{rt}$

a) Obtener una función para determinar el número de bacterias en el tiempo *t*.
b) Determinar el número de bacterias después de una hora.
c) ¿Después de cuántos minutos habrá 50 000 bacterias?

R.

a. La función para determinar el número de bacterias en el tiempo t es: $n(t) = 10000\, e^{0.01733\, t}$

b) Después de una hora habrá 28286 bacterias

c) Después de 92.87 minutos habrán 50 000 bacterias.

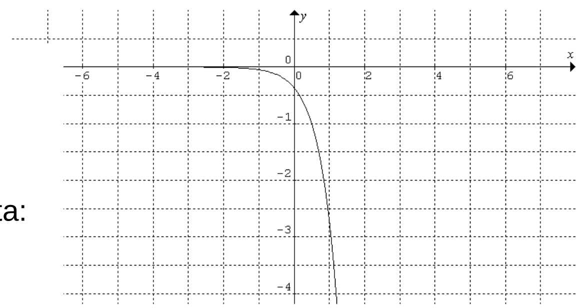
33. Utilizar desplazamiento, alargamiento o compresión de la gráfica de la función $f(x) = e^x$, para bosquejar la gráfica de la función $g(x) = -e^{2(x+1)-3}$. Dar su dominio y rango de la función, así como la ecuación de la asíntota.

R Dominio: $(-\infty, \infty)$,

rango: $(-\infty, 0)$,

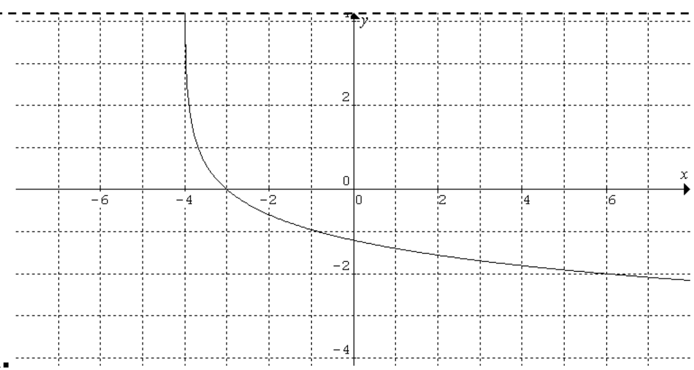
Ecuación de la asíntota:

$y = 0$



34. Utilizar desplazamiento, alargamiento o compresión de la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \log x}$, para bosquejar la gráfica de la función $g(x) = -2\log(x+4)$.

R.



35. Resolver la ecuación $9^{2-5x} = 3^{-1}$

R. $x = \dfrac{\log 3 + 2\log 9}{5\log 9} = 0.5$

36. Resuelve la ecuación $e^{-2x} - 4e^{-x} + 3 = 0$

R. $x = -\ln 3 = -1.098612289$ y $x = 0$

37. Resuelve la ecuación $\log(5x-1) - \log(x-3) = 2$

R x = 3.14

38. Resuelve la ecuación $\ln e^{5x-3} = 12$

R x = 3

39. En cierto lugar se encontró un fósil conteniendo 74% del Carbono 14 que se encuentra en una muestra de Carbono actual de la misma masa. Si sabemos que el decaimiento radiactivo está dado por $N(t) = N_0 e^{-kt}$ y para el carbono 14, *k* = 0.001216. ¿Cuál es la edad de la muestra?

R. El fósil tendrá aproximadamente 248 años de antigüedad.

40. Una sustancia radiactiva decae exponencialmente con una vida media de 350 años. Determina el valor de *k* en la expresión $N(t) = N_0 e^{-kt}$, siendo *N* la cantidad presente de la sustancia después de *t* años y N_0la sustancia inicial.

R. $k = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-350} = 0.0019804$

41. Una persona pide un préstamo de $35,000 a un interés compuesto anual de 13.5% y lo pagará en cuatro años, liquidándolo al final. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

R. La cantidad de dinero a pagar será $f(t) = 35{,}000(1 + 0.135)^4 \approx \$58{,}083$

42. Si el ruido que produce dolor en el oído es de 10^{14} veces I_0. La intensidad *M* del sonido, medida en decibeles (dB), está dada por $M = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, en donde *I* es la potencia del sonido e I_0 es la potencia mínima que puede percibir el oído humano. ¿Cuál será su intensidad en decibeles?

R. La intensidad del ruido que produce dolor en el oído es de 140 dB.

43. El Yodo radiactivo se usa regularmente como trazador para realizar estudios de la glándula tiroides. Si la sustancia decrece de acuerdo a $A(t) = A_0(0.5)^{0.125t}$, siendo A_0 la dosis inicial y *t* el tiempo en días, ¿cuánto tiempo tardará para que la cantidad de Yodo sea sólo la mitad de la dosis suministrada? y ¿cuánto tiempo tardará para que sólo reste una tercera parte?

R. En 8 días sólo restará la mitad de la dosis administrada y en aproximadamente 13 días sólo restará la tercera parte de la cantidad suministrada de yodo

44. Cierta sustancia radiactiva tiene vida media de 8 días, se sabe que $N(t) = N_0 e^{-kt}$, siendo *N* la cantidad presente de la sustancia después de *t* años y N_0 la sustancia inicial. ¿Qué fracción de la cantidad inicial quedará después de 35 días?

R. $N(35) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{8}(35)} = N_0(0.048194)$, restará el 4.8194% de la sustancia original.

Bibliografía

- BARNETT, Raymond, et al., Álgebra, Mc. Graw – Hill Interamericana, México, 2000.
- FILLOY, E. Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1997.
- FULLER, Tarwater, Geometría Analítica, Adisson Wesley Iberoamericana, México, 1988.
- GOBRAN, Alfonso. Álgebra Elemental. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1990.
- GÓMEZ, Guillermo, et al., Matemáticas III, Trillas, México, 2008.
- GUZMÁN, Herrera Abelardo, Cien problemas de Geometría Analítica, Publicaciones Cultural, México, 1987.
- KINDLE, Joseph H., Geometría Analítica, Ed. McGraw-Hill, 1991.
- LARSON, Ronald y HOSTETLER, Robert. Álgebra. Publicaciones Cultural, México, 1996.
- LEHMAN, Geometría Analítica, Limusa, México, 1982.
- LEITHOLD, Louis. Álgebra y Trigonometría: con Geometría Analítica. Harla, México, 1994.
- MILLER, Charles. et al. Matemáticas: Razonamiento y Aplicaciones. Addison Wesley Longman, 1999.
- MORALES, Heriberto, et al., Matemáticas IV, Trillas, México, 2000.
- POLYA, G. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Trillas, México, 1965.
- ROSS, M. Middlemiss, John L. Marks, James R. Smart, Geometría Analítica, Ed. McGraw-Hill, 1979.
- SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Iberoamérica, México, 1997.
- SMITH, Stanley et al. Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Addison Wesley Longman, México, 1998.
- SULLIVAN, Michael. Precálculo. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.
- SWOKOWSKI, Earl y COLE, Jeffery. Álgebra y Trigonometría. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1996.
- TORRES C, Geometría Analítica, Santillana, México, 1998.