



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.**

**COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES**

**SECRETARÍA ACADÉMICA**

**GUÍA DE ESTUDIO**

**PARA PRESENTAR EL EXAMEN DE CONOCIMIENTOS Y  
HABILIDADES DISCIPLINARIAS PARA LA CONTRATACIÓN  
TEMPORAL DE PROFESORES DE ASIGNATURA INTERINOS  
DE**

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I Y II**

**PROMOCIÓN XLII**

**JUNIO 2021**

- Índice

	Página
<b>Introducción</b>	3
 <b>Cálculo Diferencial e Integral I</b>	
<b>Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite</b>	4
<b>Unidad 2. La Derivada: estudio de la variación y el cambio</b>	12
<b>Unidad 3. Derivación de funciones algebraicas</b>	14
<b>Unidad 4. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización</b>	16
 <b>Cálculo Diferencial e Integral II</b>	
<b>Unidad 1. Derivada de Funciones Trascendentes.</b>	23
<b>Unidad 2. La Integral Definida</b>	26
<b>Unidad 3. La Integral como una Antiderivada</b>	27
<b>Unidad 4. Modelos y Predicción</b>	31
 <b>Bibliografía</b>	 34

## INTRODUCCIÓN

En esta guía se presentan diversos problemas de Cálculo Diferencial e Integral, algunos de ellos resueltos. En las soluciones se muestran estrategias para modelarlos y resolverlos. Algunos son sólo ejercicios, en los cuales se desarrollan algoritmos para llegar a su solución. También se presenta un listado de problemas no resueltos para que se ejercite y compruebe su solución.

### OBJETIVOS

El objetivo de esta guía es mostrar una forma de resolver un problema, la manera de presentarlo, redactarlo de una manera sencilla, lógica y proporcionarle algunas ideas para enfrentar los problemas que contiene el examen.

### MODO DE USO DE LA GUÍA

Estudie los temas ligados a los problemas que se proporcionan y resuelva los problemas de esta guía apoyándose en la bibliografía.

### ACERCA DEL EXAMEN

El examen de conocimientos, fase uno del proceso del Examen Filtro, estará integrado por problemas similares a los presentados en esta guía y, para acreditarlo se deberá responder correctamente por lo menos el 60% de ellos. La calificación mínima requerida es seis.

### ASPECTOS PRINCIPALES QUE SE TOMARÁN EN CUENTA PARA SU EVALUACIÓN

#### a) CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Definición de conceptos.
- Representación de conceptos matemáticos usando diagramas, símbolos, etc.
- Reconocer, transitar y emplear diversas representaciones (tabular, gráfica, analítica o verbal) de un concepto.
- Utilizar diversas interpretaciones de un concepto.
- Reconocer y aplicar propiedades de un concepto.

#### b) CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

##### Resolución de problemas

- Desarrollo y aplicación de estrategias para la resolución de problemas de Cálculo.
- Construir modelos matemáticos, identificando patrones de comportamiento y generalizando dichos comportamientos.

##### Razonamiento

- Elaborar y comprobar conjeturas.
- Construcción y validación de argumentos.
- Utilizar los razonamientos inductivo y deductivo.

##### Comunicación o lenguaje

- Expresar en forma escrita los conceptos matemáticos y la relación entre ellos.
- Utilizar el lenguaje simbólico del Cálculo en la resolución de problemas.

# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

## Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

1. Una rana está en un extremo de una tabla con un metro de longitud, salta primero a la mitad de la longitud de la tabla, luego salta a la mitad del tramo que tiene adelante y continúa saltando cada vez la mitad del tramo faltante generando con la longitud de sus saltos una sucesión. Suponiendo que la rana pudiera dar una infinidad de saltos determine:

- a) la distancia que ha saltado hasta el salto  $n = 5$ ;
- b) el límite del salto cuando  $n$  tiende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ );
- c) el límite de la distancia total cuando  $n$  tiende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ ).

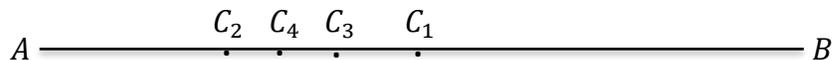
Respuestas: a)  $\frac{31}{32}$       b) 0      c) 1

2. Una pelota se suelta desde una altura de un metro del suelo. En cada rebote alcanza  $\frac{3}{4}$  de la altura anterior (no se considera la fricción con el aire y con el suelo y el tiempo de contacto de la pelota con el suelo se desprecia) ¿Cuál es la distancia vertical total que recorre la pelota?

Respuesta: 7 metros

3. El punto  $C_1$  divide al segmento  $AB$  que tiene una longitud de 18 centímetros en dos partes iguales, el punto  $C_2$  divide al segmento  $AC_1$  en dos partes iguales también; el punto  $C_3$  divide, a su vez, al segmento  $C_2C_1$  en dos partes iguales, el  $C_4$  hace lo propio con  $C_2C_3$ , y así sucesivamente. Determine el límite del punto  $C_n$  cuando  $n$  crece indefinidamente (tiende a infinito).

Respuesta: Observemos en la figura



las igualdades siguientes

$$AC_1 = \frac{1}{2}AB, \quad C_1C_2 = \frac{1}{4}AB, \quad C_2C_3 = \frac{1}{8}AB, \quad C_3C_4 = \frac{1}{16}AB$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, observemos que el punto  $C_2$  se encuentra a la izquierda de  $C_1$ , el punto  $C_3$  se encuentra a la derecha de  $C_2$ , el punto  $C_4$  se encuentra a la izquierda de  $C_3$ , es decir, los puntos se van alternando de posición con respecto al anterior.

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(18)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18)$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18)$$

$$C_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18)$$

$$C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \left(\frac{1}{32}\right)(18)$$

⋮

$$C_n = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \cdots + (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n (18)$$

es decir:

$$C_n = (18) \left[ \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

Dentro del corchete se tiene una suma geométrica

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = \frac{1}{3}$$

Como

$$C_n = (18) \left[ \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

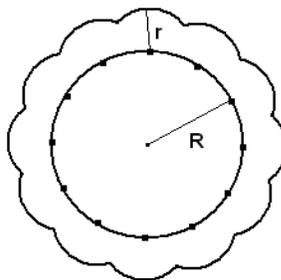
Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 18S = 18 \left(\frac{1}{3}\right) = 6$$

por lo tanto, la posición final del punto es de 6 unidades a partir del punto A.

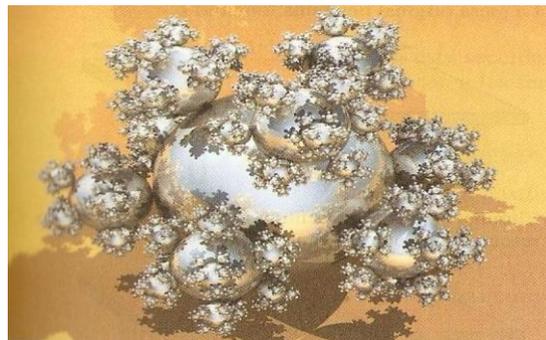
4. Obtenga  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  si  $a_1 = \sqrt{6}$  y  $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$

5. Una circunferencia cuyo radio es  $R$  está dividida por  $n$  puntos en partes iguales. Cada uno de los puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia de radio  $r$ , hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos. Calcule el límite de la longitud del perímetro exterior cuando  $n$  crece infinitamente.



6.

**Copo esférico.** Un copo esférico (mostrado en la figura de la derecha) es un fractal generado por computadora creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. A la esfera grande se unen nueve esferas de radio  $\frac{1}{3}$ . A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio  $\frac{1}{9}$ . Este proceso es infinitamente continuo. Demuestre que el copo esférico tiene una superficie de área no finita.



Respuesta: Denotemos por  $A$  el Área Superficial así que:

$$A = 4\pi(1^2) + 9 \left( 4\pi \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) + 9^2 \left( 4\pi \left( \frac{1}{9} \right)^2 \right) + \dots = 4(\pi + \pi + \pi + \dots) = \infty$$

7. Para los procesos infinitos siguientes encuentre una función que los represente y determine (si es posible) su límite respectivo.

a)  $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$

b)  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$

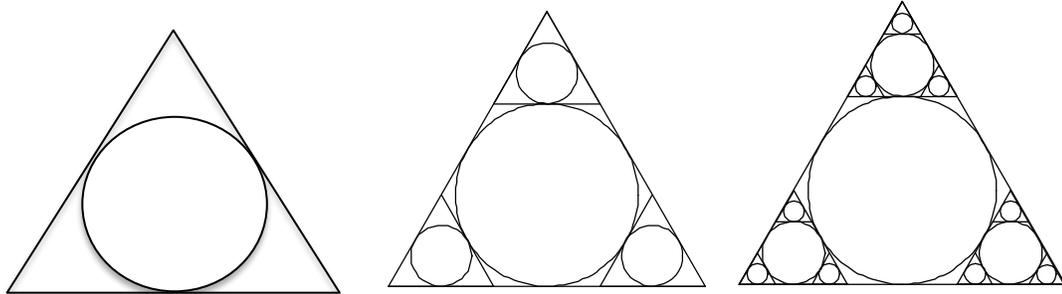
c)  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

8. Si  $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ , ¿Por qué no existe  $h(0)$ ? Demuestre que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe y obténgalo.

Apoye ambas respuestas gráficamente.

9. En un triángulo equilátero de lado 1 se inscribe la circunferencia de mayor área; con las tangentes a dicha circunferencia y paralelas a los lados del triángulo equilátero original, se forman tres nuevos triángulos equiláteros; en cada triángulo equilátero se vuelven a inscribir

las circunferencias de mayor área, se vuelven a trazar las tangentes a cada circunferencia inscrita y paralelas a los lados del triángulo equilátero original, formándose en cada triángulo equilátero tres nuevos triángulos equiláteros; y así sucesivamente, como se muestra en la figura siguiente (se muestran los primeros tres pasos). Calcule la suma de las áreas de los círculos inscritos.



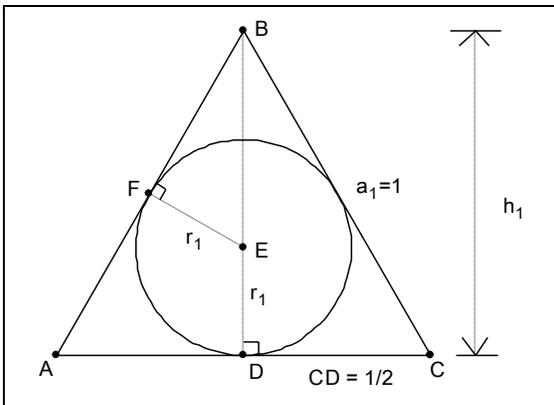
Paso 1

Paso 2

Paso 3

**Respuesta: 1era. Iteración**

Se calcula el área del primer círculo inscrito de radio  $r_1$ :



En el triángulo equilátero  $\triangle ABC$ , la perpendicular  $BD$  divide a  $AC$  en su punto medio (probarlo), se aplica teorema de Pitágoras en  $\triangle BCD$  para calcular  $h_1$ :

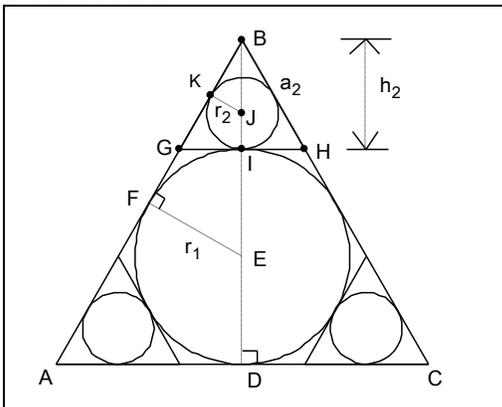
$$h_1 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ahora se calcula  $r_1$ , notando que los triángulos  $BCD$  y  $BEF$  son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos  $CBD$  y  $EBF$  son de  $30^\circ$  (probarlo), así que

$BE:EF :: BC:BD$ , luego

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_1}{r_1} = 2, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - r_1 = 2r_1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 3r_1, \quad r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

**2ª. Iteración**



En el triángulo equilátero superior  $\triangle BGH$  (es equilátero por tener los ángulos con vértice en  $G$  y  $H$  iguales a  $60^\circ$  pues ambos se forman entre paralelas  $GH$  y  $AC$  y transversales  $AB$  y  $BC$  y son correspondientes a los ángulos con vértice en  $A$  y  $C$  respectivamente y estos miden  $60^\circ$ ), la altura  $h_2$  se calcula mediante:

$$h_2 = h_1 - 2r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

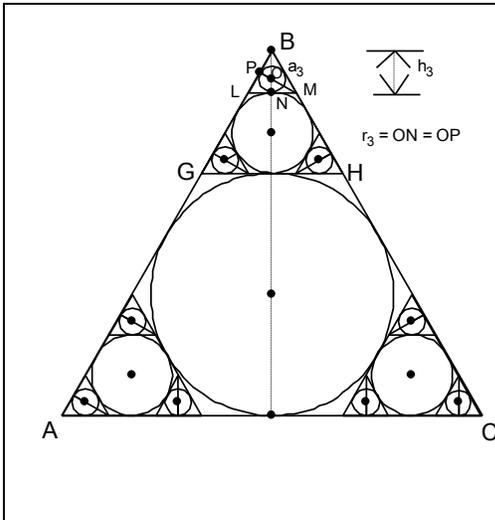
	<p>Como <math>\frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}</math>, el <math>\triangle BGH</math> se redujo a la tercera parte del <math>\triangle ABC</math>, o sea, sus lados miden <math>\frac{1}{3} \div 3</math>, luego <math>a_2 = 1/3</math>.</p>
--	--

Ahora se calcula  $r_2$ , notando que los triángulos  $BIH$  y  $BKJ$  son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos  $HBI$  y  $KBJ$  son de  $30^\circ$  (probarlo), así que

$BJ:KJ :: BH:IH$ , luego como  $I$  es punto medio del segmento  $GH$ ,  $IH = \frac{(\frac{1}{3})}{2} = \frac{1}{6}$ , así

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - r_2}{r_2} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}, \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_2}{r_2} = 2, \quad \frac{\sqrt{3}}{6} - r_2 = 2r_2, \quad \frac{\sqrt{3}}{6} = 3r_2, \quad r_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

### 3ª. Iteración



En el triángulo equilátero superior  $\triangle BLM$  (es equilátero por tener los ángulos con vértice en  $L$  y  $M$  iguales a  $60^\circ$  pues ambos se forman entre paralelas  $LM$  y  $AC$  y transversales  $AB$  y  $BC$  y son correspondientes a los ángulos con vértice en  $A$  y  $C$  respectivamente, y estos miden  $60^\circ$ ), la altura  $h_3$  se calcula mediante:

$$h_3 = h_2 - 2r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18} \quad \text{Como}$$

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{18}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}, \text{ el } \triangle BLM \text{ se redujo a la tercera}$$

parte del  $\triangle BGH$ , o sea, sus lados miden  $\frac{1}{3} \div 3$ , luego

$$a_3 = \frac{1}{9}.$$

Ahora se calcula  $r_3$ , notando que los triángulos  $BNM$  y  $BPO$  son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos  $MBN$  y  $OBP$  son de  $30^\circ$  (probarlo), así que

$BO:PO :: BM:NM$ , luego como  $N$  es punto medio del segmento  $LM$ ,  $NM = \frac{\frac{1}{9}}{2} = \frac{1}{18}$ , así

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{18} - r_3}{r_3} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{18}}, \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{18} - r_3}{r_3} = 2, \quad \frac{\sqrt{3}}{18} - r_3 = 2r_3, \quad \frac{\sqrt{3}}{18} = 3r_3, \quad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{54}.$$

Con las iteraciones anteriores ya se puede expresar la suma  $S$  de las áreas de los círculos inscritos:

$$\begin{aligned} S &= \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 3 \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2 + 9 \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{54}\right)^2 + \dots = \pi \left(\frac{3}{6^2} + 3 \cdot \frac{3}{6^2 \cdot 3^2} + 9 \cdot \frac{3}{6^2 \cdot 9^2} + \dots\right) \\ &= \frac{3\pi}{6^2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{3\pi}{6^2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right] = \frac{3\pi}{6^2} T, \end{aligned}$$

en donde la suma

$$T = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right],$$

es una serie geométrica de razón  $\frac{1}{3}$ , que se calcula en la forma

$$\begin{aligned} T_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ + \\ -\frac{1}{3} \cdot T_n &= -\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \dots - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

---


$$\frac{2}{3}T_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \dots - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

De donde

$$T_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2},$$

o sea

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \right] = \frac{3}{2}.$$

Así pues

$$S = \frac{3\pi}{6^2} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{72}$$

10. Encuentre el valor de la serie siguiente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Respuesta:

Observemos que la expresión

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

se puede descomponer en sumas parciales de la manera siguiente

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Vamos a obtener una fórmula para la  $n$ -ésima suma parcial, para esto vamos a ir escribiendo los sumandos en escalera y sumando estos “telescópicamente”.

**Valor de  $k$**       **Sumando  $k$  – ésimo**

1	<del><math>1 - \frac{1}{2}</math></del>
2	<del><math>\frac{1}{2} - \frac{1}{3}</math></del>
3	<del><math>\frac{1}{3} - \frac{1}{4}</math></del>
4	<del><math>\frac{1}{4} - \frac{1}{5}</math></del>
⋮	⋮
$n - 1$	<del><math>\frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n}</math></del>
$n$	<del><math>\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}</math></del>
<b>Total</b>	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/> $1 - \frac{1}{n + 1}$

Es decir,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

de aquí se obtiene

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

11. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{8^{n-1}}$  ¿es convergente? ¿Cuál es su suma?

12. Determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  si se tiene que:

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}, \quad n > 1$$

13. Calcule el valor de los límites siguientes

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \right]$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} \right] = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x} - x \right]$$

14. Un cuerpo al moverse con una velocidad  $v$  tiene una masa relativa  $m$  dada por la expresión siguiente,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Donde  $m_0$  es la masa en reposo y  $c$  es la velocidad de la luz.

Calcule:

$$\lim_{v \rightarrow 0} m = \lim_{v \rightarrow 0} \left[ \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \right]$$

Respuesta:  $m_0$

15. Calcule los límites siguientes

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q} \quad b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x-3}-1}{\sqrt[4]{x-3}-1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 5} \left[ \frac{x-1}{x^2-4x-5} - \frac{2}{3x-15} \right] \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2+x-1}{2x+5} \right]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4} \right] \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{16x^2+bx-c} - \sqrt{16x^2-bx+c} \right)$$

16. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

use las propiedades de los límites para calcular cada límite.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^2 \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{f(x)} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[f(x)]^3-x^3}{f(x)+x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3f(x)-2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{[f(x)]^2+x^4} \quad f) \lim_{x \rightarrow 2} \left[ x^2 f(x) - \frac{6}{f(x)} \right]$$

17. Suponga que la función  $f(x)$  satisface la inecuación

$$\frac{2}{1+x^2} \leq f(x) \leq 2+x^2$$

Para toda  $x \neq 0$ .

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e ilústrela gráficamente.

## Unidad 2. La Derivada: estudio de la variación y el cambio

18. Sea  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , compruebe que  $f'(0)$  no existe.

Solución:

Puesto que

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

usando límites laterales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \infty \quad y \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

Por lo tanto, el límite en cero no existe, en consecuencia, la derivada en cero tampoco.

19. Sea  $f(x) = |x - a|$ , pruebe que  $f'(a)$  no existe, ¿Por qué dicha función no tiene recta tangente en  $a$ ?

20. Sea  $n$  un entero mayor o igual a 1. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

¿Qué representa este límite?

Respuesta:  $na^{n-1}$

21. Mediante la definición de la derivada de una función, derive:  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $x \neq 0$ .

Respuesta:  $f'(x) = -3x^{-4}$

22. Considere la afirmación siguiente: *Si la derivada de una función es cero en todo su dominio entonces la función es constante.* ¿Es cierta la afirmación anterior? Justifique su respuesta.

23. Suponga las afirmaciones siguientes

*Si  $f$  es una función continua en su dominio entonces es diferenciable.*

*Si  $f$  es una función diferenciable en su dominio entonces la función es continua.*

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas? Justifique su respuesta.

24. La ecuación de movimiento de una partícula está dada por  $s(t) = 4t^3 - 2t + 1$ , donde  $s$  está en metros y  $t$  en segundos, calcule  $v(2)$ .

Respuesta: 46 m/s.

25. Elabore un registro tabular que exprese el máximo número de regiones formadas por un número dado de cuerdas en un círculo. Deduzca una función que exprese el máximo número de regiones de un círculo en términos del número de cuerdas del círculo.

Respuesta:  $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ .

26. Demuestre que no existe una recta que pase por el punto (1,2) que sea tangente a la curva  $y = 4x^2$ .

27. El área de la superficie de una esfera aumenta a razón de: 1 cm<sup>2</sup>/s. ¿A qué razón aumenta el volumen cuando éste es de 36 cm<sup>3</sup>?

28. El punto que se apoya en el suelo de una escalera de 5 metros, recargada en una pared, se desplaza de modo que  $\frac{dx}{dt} = 1 \frac{m}{s}$  (constante). ¿Es constante  $\frac{dy}{dx}$  (del punto que se apoya en la pared)? Argumente.

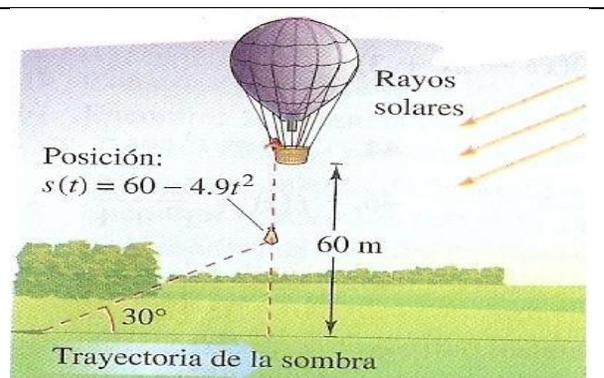
29. ¿Existe un recipiente en que, al aumentar el volumen del líquido,  $\frac{dV}{dt}$  (la variación instantánea del volumen del líquido) disminuya? Argumente.

30. Se lanza una piedra a un charco generándose ondas circulares concéntricas. Determine la tasa de variación de la superficie afectada cuando su radio es de 7 cm.

31. Sea  $g$  una función diferenciable tal que  $g(x + h) - g(x) = 2xh + h^2 - 2h$  y  $g(0) = 2$ , determine  $g(x)$ .

32.

**Sombra en movimiento.** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (ver figura a la derecha). Encontrar la razón de cambio instantánea del ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. (Sugerencia: La posición del costal está dada por  $s(t) = 60 - 4.9t^2$ .)



Solución.

$$s(t) = 60 - 4.9t^2$$

$$s'(t) = -9.8t$$

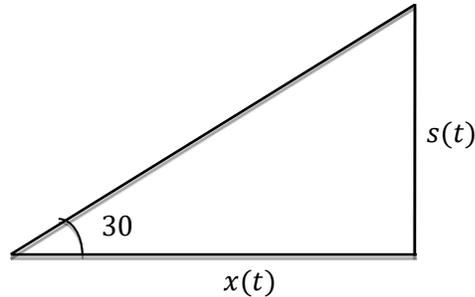
$$s(t) = 60 - 4.9t^2 = 35$$

$$4.9t^2 = 25 \Rightarrow t = \frac{5}{\sqrt{4.9}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s(t)}{x(t)} \Rightarrow x(t) = \sqrt{3}s(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \frac{ds}{dt} = \sqrt{3}(-9.8) \left( \frac{5}{\sqrt{4.9}} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} \sim -38.34 \frac{m}{seg}$$



### Unidad 3. Derivación de funciones algebraicas

33. Usando la definición de derivada, calcule  $f'(a)$ , si  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solución:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt[3]{x}) - (\sqrt[3]{a})}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x - a}$$

Factorizando la expresión

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}) \left( x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}$$

34. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \frac{\sqrt{x}(2-x^2)}{x}$  en  $x = 4$ .

Respuesta:  $y + 7 = -\frac{25}{8}(x - 4)$ .

35. Sea  $f(x)$  una función par. Pruebe que  $f'(x) = -f'(-x)$ . Además, trace un bosquejo de la gráfica de la derivada.

36. Sea  $f(x)$  una función impar. Pruebe que  $f'(x) = f'(-x)$ . Además, realizar un bosquejo de la gráfica de la derivada.

37. Encuentre la ecuación de la recta tangente dada por la función  $f(x) = x^2$  y que pase por el punto (3, 4)

38. Encuentre una fórmula para la derivada enésima de la función  $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

Respuesta:

$$y^n(x) = \begin{cases} n! x^{-(n+1)} & \text{si } n \text{ es par} \\ -n! x^{-(n+1)} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

39. Suponga que  $f^{(n)}(a)$  y  $g^{(n)}(a)$  existen, es decir las derivadas de orden  $n$  existen. Encuentre una fórmula para

$$(f \cdot g)^{(n)}(a)$$

40. Encuentre una función polinómica  $f$  de grado  $n$  tal que  $f'(x) = 0$  para precisamente  $n-1$  números  $x$ .

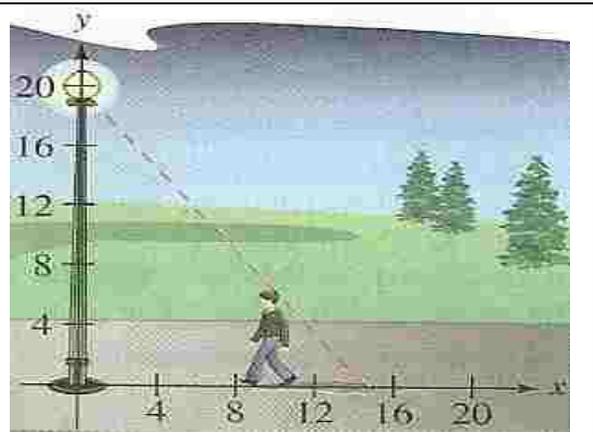
41. ¿Por qué  $f(x) = \sqrt{x}$  no es derivable en 0?

42. El número  $a$  recibe el nombre de raíz doble de la función polinómica, si  $f(x) = (x-a)^2 g(x)$  para alguna función polinómica  $g(x)$ . Pruebe que  $a$  es raíz doble de  $f(x)$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $f$  y  $f'$  a la vez.

43.

**Longitud de una sombra.** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo, camina hacia la luz que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura sobre el suelo (ver la siguiente figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

- ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
- ¿a qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?

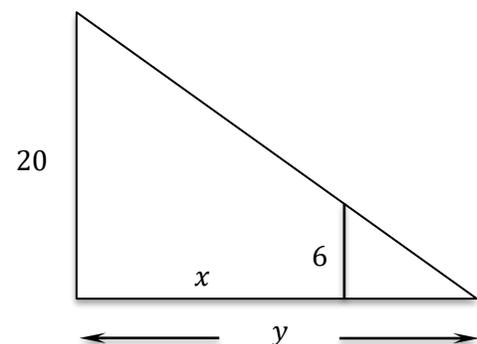


Solución:

- Con base en la figura de la derecha donde se representan los datos e incógnitas principales:

mediante la semejanza de triángulos obtenemos las relaciones siguientes:

$$\frac{20}{6} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow 20y - 20x = 6y$$



Por lo que:  $14y = 20x \Rightarrow y = \frac{10}{7}x$

Se sabe que:

$$\frac{dx}{dt} = -5 \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

por lo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10}{7} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{10}{7} (-5) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}} = -\frac{50}{7} \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

b)

$$\frac{d(y-x)}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = -\frac{50}{7} \frac{\text{pies}}{\text{segundo}} - (-5) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}} = \left(-\frac{50}{7} + 5\right) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}} = -\frac{15}{7} \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

#### Unidad 4. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización

44. Para la función  $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ , determine:

- los puntos críticos.
- los intervalos sobre los cuales  $f$  es creciente o decreciente.
- los valores máximos o mínimos locales de  $f$ .
- los intervalos donde la función  $f$  es cóncava o  $f$  es convexa.
- los puntos de inflexión.
- su gráfica.

Respuestas:

a)  $x = 0$  y  $x = -1$ .

b)

Intervalo	Signo de $f'$	Forma de la gráfica
$(-\infty, -1)$	-	Decreciente
$(-1, 0)$	+	Creciente
$(0, \infty)$	+	Creciente

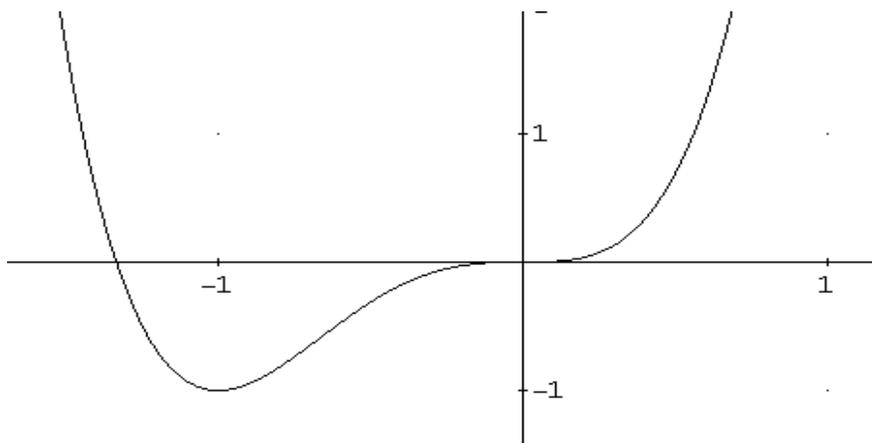
c) Mínimo local en  $x = -1$

d)

Intervalo	Signo de $f''$	Forma de la gráfica
$(-\infty, -\frac{2}{3})$	+	Convexa
$(-\frac{2}{3}, 0)$	-	Cóncava
$(0, \infty)$	+	Convexa

e) Puntos de inflexión:  $x = -\frac{2}{3}$  y  $x = 0$ .

f)



45. Para las funciones dadas determine:

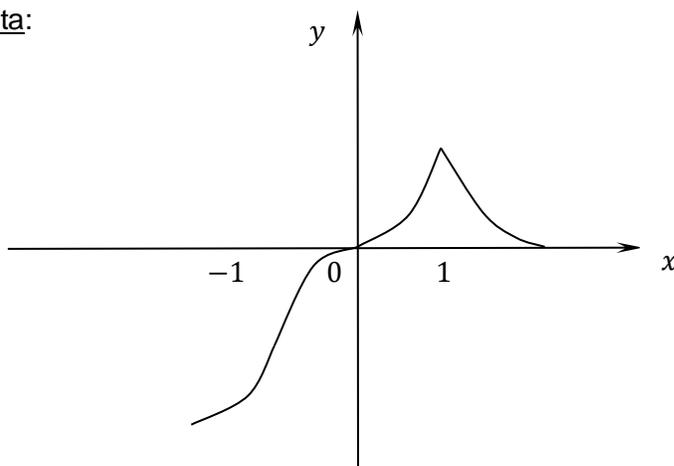
$$g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \text{ y } f(x) = 2x - 8 + 3\sqrt{x^2 - 8x + 16},$$

- los puntos críticos
- los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente
- los puntos máximos o mínimos locales de la función
- los intervalos donde la función es cóncava o convexa.
- los puntos de inflexión
- su gráfica.

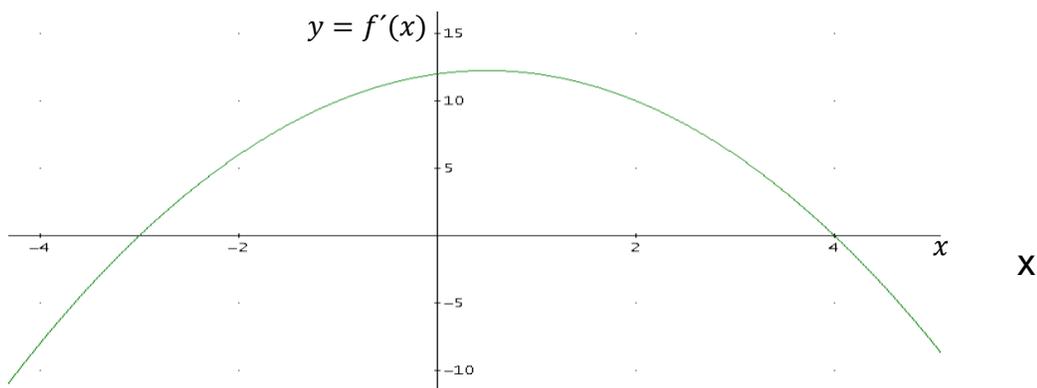
46. Dibuje la gráfica de una función con las propiedades siguientes:

- $f(0) = 0$ .
- $f'(x) > 0$  para  $x < -1$  y  $-1 < x < 1$ ,
- $f'(x) < 0$  para  $x > 1$ ,
- $f''(x) > 0$  para  $x < -1, 0 < x < 1$  y  $x > 1$ ,
- $f''(x) < 0$  para  $-1 < x < 0$ .
- $f'(1)$  no existe

Respuesta:



46. Analice la gráfica de la función  $f'$  dada y traza una posible gráfica de  $f(x)$



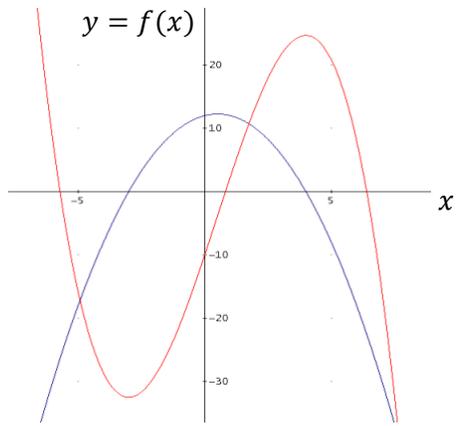
**Solución:**

Primero, observe que para  $x < -3$ , la gráfica de  $f'(x)$  está abajo del eje  $x$ , luego  $f'(x) < 0$  y la gráfica de  $f(x)$  es decreciente. La gráfica de  $f'(x)$  es creciente para  $x < -3$ , lo cual significa que  $f''(x) > 0$  y la gráfica de  $f(x)$  es convexa. De la misma manera, se pueden analizar en los intervalos  $(-3, 4)$  y  $(4, \infty)$ ; los resultados se resumen en la siguiente tabla.

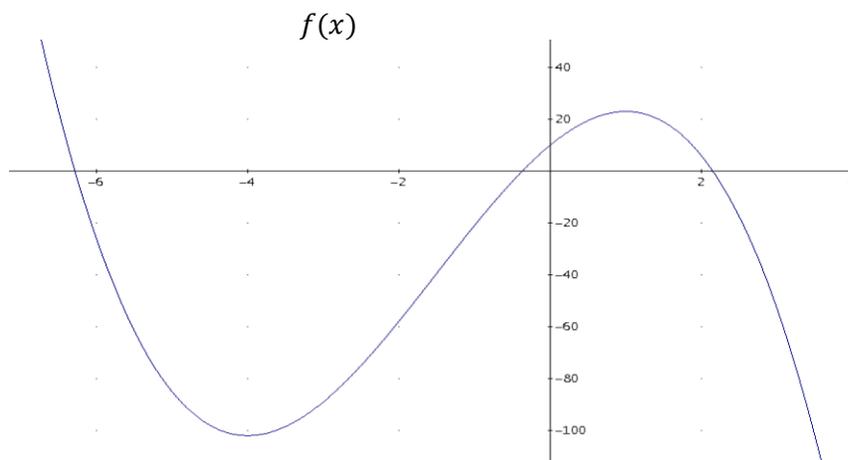
$x$	Características de $y = f'(x)$	Características de $y = f(x)$
$x < -3$	Negativa, creciente.	Decreciente, convexa.
$x = -3$	Intersección con el eje $x$ .	Tangente horizontal.
$-3 < x < 0.5$	Positiva, creciente.	Creciente, convexa
$x = 0.5$	Tangente horizontal.	Posible punto de inflexión.
$0.5 < x < 4$	Positiva, decreciente.	Creciente, cóncava.
$x = 4$	Intersección con el eje $x$ .	Tangente horizontal
$x > 4$	Negativa, decreciente.	Decreciente, cóncava.

Como la concavidad cambia en  $x = 0.5$  (de arriba hacia abajo), allí se presenta un punto de inflexión, pero no hay ninguna tangente horizontal, en cambio en  $x = -3$  y  $x = 4$  no cambia la concavidad. La gráfica de  $f(x)$  es descendente a la izquierda de  $x = -3$  y ascendente a la derecha, luego debe haber un mínimo relativo en  $x = -3$ , de manera análoga en  $x = 4$  debe haber un máximo relativo.

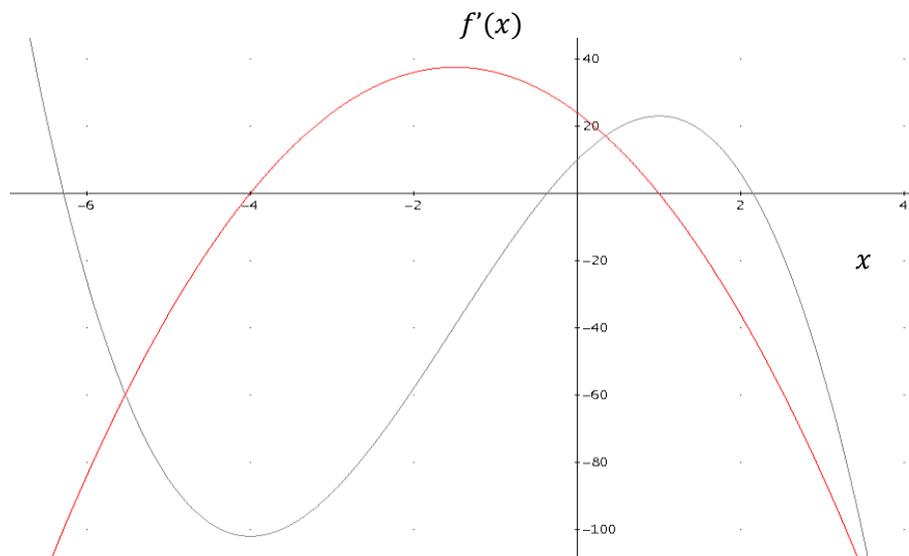
A continuación, se muestran las gráficas de  $f'(x)$  y una posible función  $f(x)$  que tiene todas las características requeridas. Observe que debido a que no se dan los valores de  $f(-3)$ ,  $f(0.5)$  y  $f(4)$ , muchas otras gráficas cumplirán los requisitos.



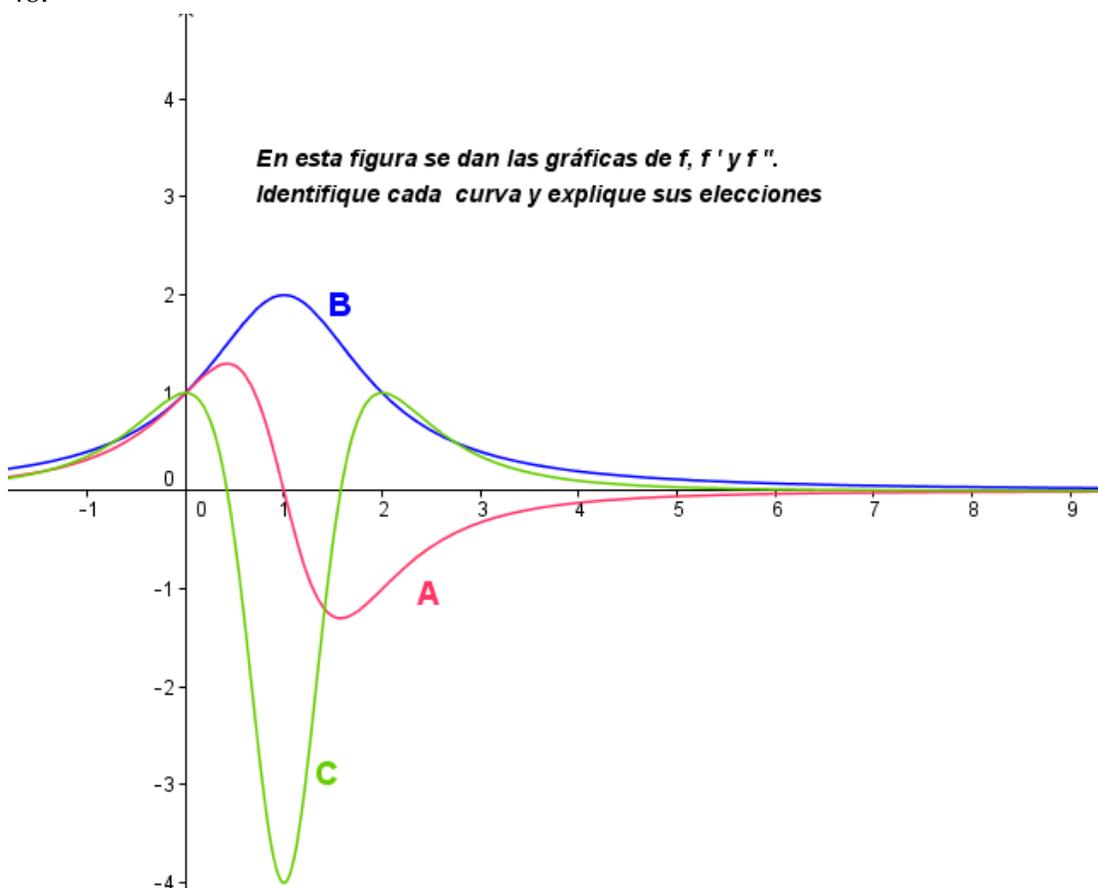
47. A partir de la gráfica de la función  $f$ , esboce la gráfica de  $f'$ .



Respuesta:



48.



49. Trace la gráfica de las siguientes funciones. Determine sus intersecciones con los ejes; sus máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión y cualquier otro elemento que le permita obtener dicha gráfica.

a)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 1)^2$

c)  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

50. Construya un ejemplo de funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  para las cuales  $f''(1) = g''(1) = h''(1) = 0$  y además se cumpla que:

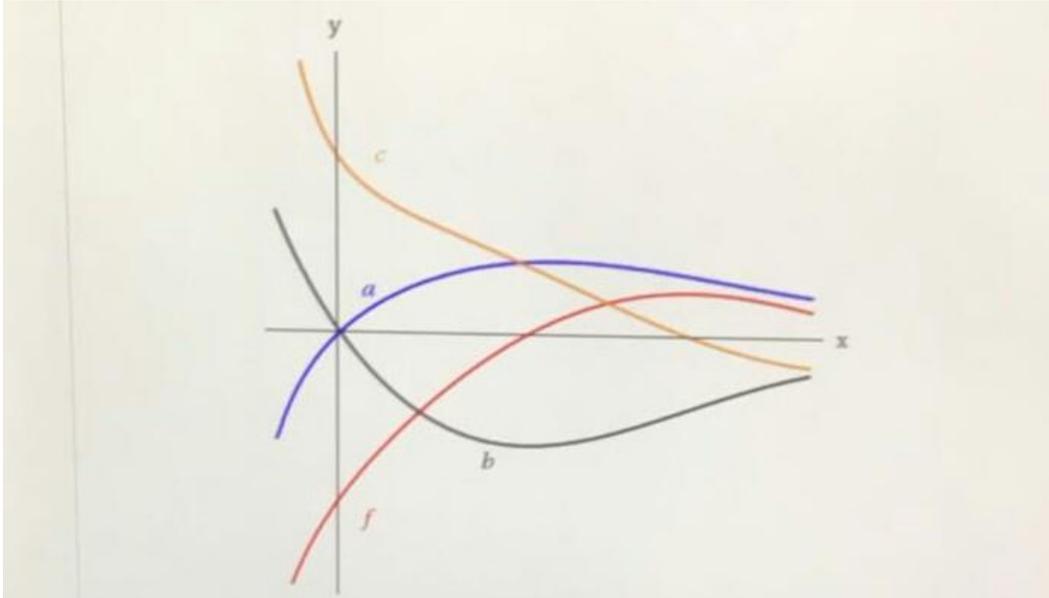
En  $x_0 = 1$ ,  $f(x)$  tiene un mínimo relativo.

En  $x_0 = 1$ ,  $g(x)$  tiene un máximo relativo.

En  $x_0 = 1$ ,  $h(x)$  tiene un punto de inflexión.

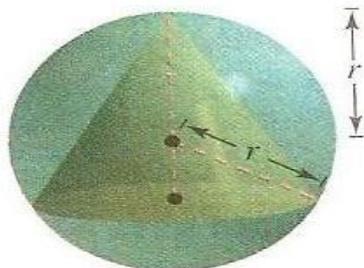
51. Calcule las dimensiones del cilindro recto de menor superficie que tenga un volumen de un litro ( $1000 \text{ cm}^3$ ).

52. A continuación, se muestra la gráfica de una función  $f(x)$  y las curvas  $a, b$  y  $c$ . Explique cuál de las curvas es la gráfica de una antiderivada de  $f(x)$

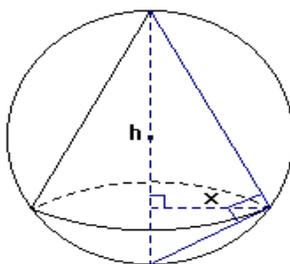


53. Pruebe que la suma de un número y su recíproco es por lo menos dos.
54. Suponga que tiene un polinomio  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  con puntos singulares en  $-1, 1, 2, 3$  y  $f''(-1) = 0, f''(1) > 0, f''(2) < 0, f''(3) = 0$ . Trace la gráfica de  $f$  con todo el detalle posible a partir de esta información.
55. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad  $\beta$  y según un ángulo  $\alpha$  de modo que su componente vertical es  $\beta \sin \alpha$  y la componente horizontal es  $\beta \cos \alpha$ . Su distancia  $s(t)$  sobre el nivel del suelo obedece a la ley  $s(t) = -4.9t^2 + (\beta \sin \alpha)t$  mientras que su velocidad horizontal permanece constante  $\beta \cos \alpha$ .
- Pruebe que la trayectoria de la bala es una parábola.
  - Encuentre el ángulo  $\alpha$  que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.
56. Encuentre el número mínimo  $M$  tal que para cada valor de  $x$  que satisface la desigualdad  $0 \leq x \leq 2$  se tenga  $|2x^2 - x^3| \leq M$
57. Obtenga el número máximo  $B$  tal que para cada  $x > 0$ , se tenga  $\frac{1}{x} + 4x \geq B$
58. Localice el punto en la parábola  $y^2 = 2x$  que está más próximo al punto  $(1, 4)$ .
59. Calcule el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio  $r$ .
60. Un cono de papel para beber agua debe contener  $10 \text{ cm}^3$  de líquido. Encuentre la altura y el radio del cono que requerirá la menor cantidad de papel.

61. **Volumen máximo.** Encuentre el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio  $r$ .



Solución. Considerando la figura siguiente que se relaciona con los datos e incógnita que se mencionan, se tiene:



Por semejanza de triángulos se sabe que:

$$\frac{2r - h}{x} = \frac{x}{h} \Rightarrow x^2 = h(2r - h)$$

El volumen del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi h(2r - h)h = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h) = \frac{2\pi r}{3}h^2 - \frac{\pi}{3}h^3$$

derivando:

$$V'(h) = \frac{4\pi r}{3}h - \pi h^2 = h\left(\frac{4\pi r}{3} - \pi h\right)$$

Igualamos a cero:

$$h\left(\frac{4\pi r}{3} - \pi h\right) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ o } \frac{4\pi r}{3} - \pi h = 0$$

Como  $h \neq 0$ , se tiene que

$$h = \frac{4r}{3}$$

Volvamos a derivar

$$V''(h) = \frac{4\pi r}{3} - 2\pi h$$

evaluemos en esta segunda derivada el punto crítico encontrado

$$V''\left(\frac{4\pi r}{3}\right) = \frac{4\pi r}{3} - 2\pi\left(\frac{4r}{3}\right) = -\frac{4\pi r}{3} < 0$$

por el criterio de la segunda derivada,  $V$  tiene un máximo en  $h = \frac{4r}{3}$   
Ahora, sustituimos este valor en  $x$ .

$$x^2 = h(2r - h) = \frac{4r}{3}\left(2r - \frac{4r}{3}\right) = \frac{8r^2}{9} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$$

el volumen máximo es:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8r^2}{9}\right)\left(\frac{4r}{3}\right) = \frac{32\pi}{81}r^2 \text{ unidades cúbicas.}$$

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Unidad 1. Derivada de Funciones Trascendentes.

1. A partir de la gráfica de la función seno, esbozar la gráfica de su derivada.
2. A partir de la gráfica de la función coseno, esbozar la gráfica de su derivada.
3. Determine el valor de los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{sen}(bx) \cot(ax)}{\text{sen}(ax)}$$

Respuesta a) 1 b) 0

Argumente la respuesta.

4. Encuentre la derivada de las funciones:  $\text{sen}(x)$  y  $\cos(x)$  a partir de la definición.
5. A partir de la derivada de las funciones seno y coseno, obtener la fórmula para la derivada de la función tangente  $\tan(x)$ .

Solución:

Sabemos que:

$$\frac{d\text{sen}(x)}{dx} = \cos(x) \quad \text{y} \quad \frac{d\cos(x)}{dx} = -\text{sen}(x)$$

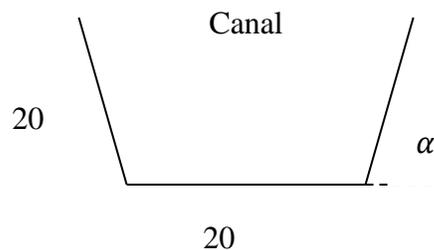
Utilizando la identidad por cociente de la función tangente y la regla del cociente, se obtiene

$$\frac{d\tan(x)}{dx} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \text{sen}(x)(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

es decir,

$$\frac{d\tan(x)}{dx} = \sec^2(x).$$

6. Utilice  $\frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x)$  y el teorema de la función inversa para la derivada de una función para obtener  $\frac{d}{dx} \text{arcsen}(x)$  en el intervalo  $[-1,1]$ .
7. El extremo de una biela que se mueve verticalmente en un motor de combustión interna es:  $x(t) = 3\text{sen}(t) + 4\cos(t)$ . Demuestre que la aceleración y la posición son iguales en magnitud y opuestas en signo.
8. De una tira de metal de 60 cm. de ancho se quiere formar un canal de sección transversal un trapecio isósceles. ¿Para qué ángulo  $\alpha$  el área de la sección es máxima?



9. Dada la gráfica de la función exponencial  $f(x)=e^x$ , esboce la gráfica de su derivada
10. Dada la gráfica de la función logaritmo natural  $g(x)=\ln(x)$ , esboce la gráfica de su derivada.
11. Calcule los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$$

12. Un cable telegráfico submarino consta de un alma de cobre, con una envoltura de material no conductor. Si  $x$  representa la razón del radio del alma al espesor de la envoltura, y se sabe que la velocidad  $v$  de transmisión varía como  $v = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ . Demuestre que la mayor velocidad se alcanza cuando  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

13. Obtenga los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{9x} - e^{3x}}{x} \qquad b) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{4(10)^n - 3(10)^{2n}}{3(10)^{n-1} + 2(10)^{2n-1}}$$

14. Encuentre la derivada de la función  $f(x)=\ln(x)$  a partir de la definición.

15. Si  $f(x) = \log_e(\cos x)$  calcule  $f'(x)$ .

16. Derive la función:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x}}$$

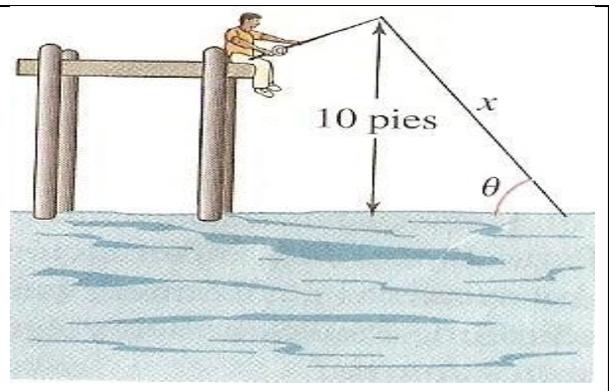
Respuesta:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2 - 4}$$

17. Obtenga los puntos en donde las pendientes de las funciones  $f(x) = 4^x$  y  $g(x) = 2^x$  son iguales.

18.

**Angulo de elevación.** El pescador de la figura siguiente recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua. ¿A qué ritmo cambia el ángulo  $\theta$  entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?



Solución:

De la figura se tiene

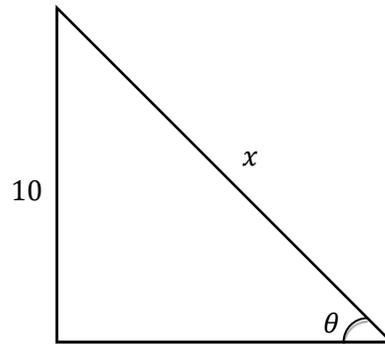
$$\text{sen}(\theta) = \frac{10}{x}$$

sabemos que:

$$\frac{dx}{dt} = -1 \frac{\text{pie}}{\text{segundo}}$$

derivamos la primera relación

$$\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{x^2} \frac{dx}{dt}$$



De esta manera

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{10}{x^2} (\sec(\theta)) \frac{dx}{dt} = -\frac{10}{25^2} \left( \frac{25}{\sqrt{25^2 - 10^2}} \right) (-1) \\ &= \frac{10}{25} \left( \frac{1}{\sqrt{625 - 100}} \right) = \frac{2}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{525}} \right) = \frac{2}{5} \left( \frac{1}{5\sqrt{21}} \right) = \frac{2}{25\sqrt{21}} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\sqrt{21}}{525} \sim 0.017 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

## Unidad 2. La Integral Definida

19. Calcule el área de la región bajo la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ , para  $0 \leq x \leq 2$  arriba del eje  $x$ , mediante rectángulos debajo de la curva.

20. Dada  $A(x) = \int_a^x (6-t)dt$ , determine  $A'(x)$  de las dos maneras siguientes:

- Usando una interpretación geométrica
- Usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

21. Si  $f$  es una función diferenciable, con  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 6$  y  $\int_1^2 xf'(x)dx = 5$  Calcular  
Determine

$$\int_1^2 f(x)dx$$

22. Suponga que  $f$  es una función continua en los reales, demuestre que:

- Si  $f$  es una función par, entonces  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$
- Si  $f$  es una función impar entonces  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .
- $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$ .
- $\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ .
- Demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

23. Calcule las integrales siguientes:

a)  $\int_{-1}^2 (x^3 - x)dx$

b)  $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

c)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

24. Suponga que la velocidad de un objeto en metros sobre segundo ( $\frac{m}{s}$ ) está dada por

$v(t) = 10 + 8t - t^2$ . Calcule la distancia recorrida por el objeto durante los primeros 5 segundos.

25. Sobre la luna la aceleración de la gravedad es  $g = \frac{-1.6m}{s^2}$ . En la luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie 20 segundos después. Calcular: ¿Desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

26. Encuentre el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones  $f(x) = 5x$  y  $g(x) = x^3 - 4x$ .

Solución:

Las gráficas de estas funciones se intersecan cuando:

$$x^3 - 4x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 3$$

Puesto que tenemos dos regiones, el área total está dada por

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 [(x^3 - 4x) - 5x] dx + \int_0^3 [5x - (x^3 - 4x)] dx &= \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \int_0^3 (9x - x^3) dx \\ &= \left( -\frac{(-3)^4}{4} - \frac{9(-3)^2}{2} \right) + \left( \frac{9}{2} 3^2 - \frac{3^4}{4} \right) \\ &= -\left( \frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) + \left( \frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) \\ &= \frac{81}{2} u^2 \end{aligned}$$

27. Determine el área de la región acotada por las curvas  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  e  $y = x^2 - 4x$ , en el intervalo  $[0, 4]$

Respuesta:  $\frac{71}{6} u^2$

28. Calcule las integrales

$$a) \int_0^1 x \ln(x+1) dx \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{\sqrt{2 \sec(x)}} dx$$

Respuestas: a)  $\frac{1}{4}$     b)  $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

29. Calcule el área de la región comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  cuando  $x \in [0, 2\pi]$ .

### Unidad 3. La Integral como una Antiderivada

30. Encuentre las funciones  $F$  que satisfagan las condiciones dadas para cada caso.

a)  $f'(x) = 8x^2, f(0) = 1.$

b)  $f'(x) = \sqrt{x}, f(1) = 2.$

c)  $f'(x) = 14x^{-4/3}, f(16) = -60.$

d)  $f'(x) = x^2 \sqrt{x}, f(4) = 0.$

31. Calcule la integral indefinida  $\int x\sqrt{x+1} dx$ .

Respuesta:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

32. Calcule la integral indefinida  $\int \frac{x+1}{x-1} dx$ .

Respuesta:

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln|x-1| + c$$

33. Calcule las integrales siguientes, sin usar tablas de integración:

$$\int \sec(x) dx, \quad \int \csc(x) dx$$

34. Mediante el método de integración por partes, calcule las integrales siguientes:

a)  $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$

b)  $\int e^x \cos(x) dx$

c)  $\int x(x-1)^8 dx$

Respuestas:

a)  $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + c$

b)  $\int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + c$

c)  $\int x(x-1)^8 dx = \frac{x(x-1)^8}{9} - \frac{(x-1)^{10}}{90} + c$

35. Calcule  $\int x^2 \cos(x) dx$  por el método tabular

Solución:

Esta integral la podemos calcular usando el método de integración por partes, pero utilizaremos el denominado **método tabular**. El método tabular que presentaremos aquí hace que las integraciones por partes sean bastante sencillas, en especial en problemas en los que se tienen que aplicar varias veces la integración por partes. Este método funciona bien en integrales de la forma

$$\int x^n \operatorname{sen}(ax) dx, \quad \int x^n \cos(ax) dx \quad \int x^n e^{ax} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea  $u = x^2$  y  $dv = \cos(x) dx$ . Luego, se construye una tabla de tres columnas como la siguiente:

Signos alternados	$u$ y sus derivadas	$v'$ y sus primitivas
+	$x^2$	$\cos(x)$
-	$2x$	$\text{sen}(x)$
+	$2$	$-\cos(x)$
-	$0$	$-\text{sen}(x)$

Derivar hasta obtener una derivada nula

La solución se obtiene sumando los productos: (signo alternado) ( $u$  y sus derivadas) ( $v'$  y sus primitivas de las entradas diagonales), es decir,

$$\int x^2 \cos(x) dx = (+)x^2 \text{sen}(x) + (-1)2x(-\cos(x)) + (+)2(-\text{sen}(x)) + c$$

$$= x^2 \text{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \text{sen}(x) + c$$

Explique por qué funciona el método tabular.

36. Mediante el método tabular, calcule las integrales siguientes:

a)  $\int x^2 e^x dx$       b)  $\int x^3 \text{sen}(x) dx$

Respuestas:

a)  $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

b)  $\int x^3 \text{sen}(x) dx = -x^3 \cos(x) + 3x^2 \text{sen}(x) + 6x \cos(x) - 6 \text{sen}(x) + c$

37. Calcule las integrales siguientes

a)  $\int (|x - 1| + |2x + 1|) dx$       b)  $\int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx$       c)  $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

38. Resuelva las integrales siguientes:

a)  $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$       b)  $\int \sqrt{x} \log(x) dx$       c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$       d)  $\int \frac{\text{arctg}(x)}{1 + x^2}$

e)  $\int \text{arctg}(\sqrt{x}) dx$       f)  $\int x^2 \text{arctg}(x) dx$

39. Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int x e^{-x^2} dx \quad b) \int \frac{x+1}{x} dx \quad c) \int \frac{x}{3x^2+2} dx \quad d) \int x^2 \sqrt{x^3-14} dx \quad e) \int_0^6 \frac{x dx}{x+3}$$

40. **Crecimiento de árboles.** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente,  $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$  donde  $t$  es el tiempo en años y  $h$  es la altura en centímetros. Las plantas del vivero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ( $t = 0$ ).

- Determine la altura después de  $t$  años.
- ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

Solución:

$$a) h(t) = \int (1.5t + 5) dt = 0.75t^2 + 5t + c$$

Como  $h(0) = 12$ , se tiene

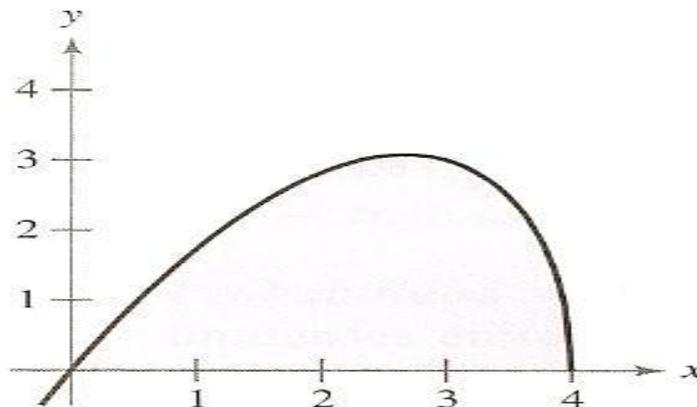
$$12 = h(0) = 0.75(0)^2 + 5(0) + c$$

sustituyendo en la función  $h$ ,

$$h(t) = 0.75t^2 + 5t + 12$$

$$b) h(6) = 0.75(6)^2 + 5(6) + 12 = 690 \text{ cm.}$$

41. Encuentre el área  $A$  de la región limitada por el eje  $x$  y la gráfica de la función  $y = x\sqrt{4-x}$  la cual se muestra en la figura siguiente.



Solución:

Sabemos que el área de la región está dada por la integral, esta se muestra enseguida y la resolveremos mediante integración por cambio de variables.

$$A = \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx$$

Hagamos el cambio

$$u = \sqrt{4-x} \Rightarrow u^2 = 4-x \text{ y } 2udu = -dx, \text{ también } x = 4-u^2$$

Aplicando el cambio de variable a la integral, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx = \int_2^0 (4-u^2)u(-2udu) du = 2 \int_2^0 u^2(u^2-4)du \\ &= 2 \int_2^0 (u^4 - 4u^2) du = 2 \left[ \frac{u^5}{5} - 4 \left( \frac{u^3}{3} \right) \right]_2^0 = -2 \left( \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) = -64 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ &= -64 \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

## Unidad 4. Modelos y Predicción

42. La población en un país está creciendo en forma directamente proporcional a su población en ese momento. Si en 2007 su población era de 101 millones y en 2008 es de 104 millones. Calcule su población para el año 2024.

Solución: Denotemos por  $y$  a la población y por  $t$  al tiempo en años, Como la rapidez de crecimiento es directamente proporcional a la población se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.  
Separando variables

$$\frac{dy}{y} = k dt$$

Integrando ambos lados

$$\int \frac{dy}{y} = \ln(y) = \int k dt = kt + c$$

en donde  $y$  es mayor que cero (tamaño de la población en el tiempo  $t$ )  
Despejamos a la población.

$$y = e^{kt+c} = e^c e^{kt} = y_0 e^{kt}$$

donde  $y_0 = e^c$ , llamada población inicial

Como en el 2007 se tienen 101 millones, se tiene que para el tiempo  $t = 0$

$$101 = y(0) = y_0 e^0 = y_0$$

Para el año 2008, consideramos  $t = 1$ , se tiene

$$104 = y(1) = 101 e^{k(1)} = 101 e^k$$

despejamos  $k$

$$e^k = \frac{104}{101} \sim 1.02970297 \Rightarrow k \sim 0.03$$

Para 2024 habrán transcurrido 17 años, es decir  $t = 17$ , la población será aproximadamente de

$$y(17) = 101e^{0.03(17)} = 168.19 \text{ millones}$$

43. Un cultivo de bacterias comienza con  $n_0 = 1000$  y al cabo de 2 horas la población aumenta hasta 2500. Suponiendo que el cultivo crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Calcule el tamaño de la población a las 6 horas.

Respuesta: 15625 bacterias.

44. La vida media del radio  $^{226}_{88}\text{Ra}$  es de 1590 años. Esto quiere decir que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente y que en 1590 años se desintegra la mitad de cualquier cantidad dada.

- a) Si se tiene una muestra de 100 miligramos de  $(^{226}_{88}\text{Ra})$ , ¿cuántos miligramos se tendrán después de 1000 años?  
b) ¿Cuánto tiempo se requiere para tener una masa de 30 miligramos?

Respuestas:

a) 65 miligramos

b) 2762 años

45. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2y$$

Respuesta:  $y = Ae^{\frac{x^3}{3}}$ , donde  $A$  es una constante.

46. Un cuerpo, a una temperatura desconocida, se coloca en una habitación en la cual la temperatura es de  $18^\circ$  (constante). Si después de 15 minutos la temperatura es de  $8^\circ$  y después de 25 minutos de  $12^\circ$ . Determinar la temperatura inicial del cuerpo.

47. Una esfera maciza de metal se funde con una velocidad inversamente proporcional a su radio. Si su volumen se reduce 5% en 20 minutos. ¿En qué tiempo se derretirá la esfera?

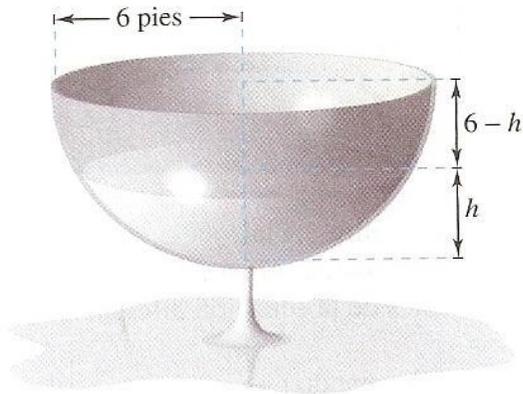
48. Se necesita una fuerza de 500 lb para comprimir un resorte de su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 9 pulgadas. Determine el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud de 8 pulgadas.

49. Encuentre la función  $y$  si:

$$a) \frac{dy}{dx} = x(2x + y)^2 - 2 \quad b) \frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x^2}$$

50. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la

abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es:  $A(h) \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$ , donde  $h$  es la altura del agua en el tanque,  $k$  es el área de la abertura de la parte inferior del tanque,  $A(h)$  es el área de la sección transversal a la altura  $h$  y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad: ( $g \approx 32 \frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ ). Un tanque semiesférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



Solución:

Consideremos los valores conocidos

$$k = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi, \quad g = 32, \quad x^2 + (y - 6)^2 = 36$$

de la ecuación de la circunferencia se obtiene  $x^2 = -y^2 + 12y$  por lo que el área  $A$  de la sección transversal es  $A(h) = (12h - h^2)\pi$  mediante la forma de la ecuación de Torricelli

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh} \Rightarrow (12h - h^2)\pi \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{144} \pi \sqrt{64h}$$

Reduciendo y separando variables

$$(216h - 18h^2)h^{-\frac{1}{2}} dh = -dt \Rightarrow \left(216h^{\frac{1}{2}} - 18h^{\frac{3}{2}}\right) dh = dt$$

integrando

$$\int \left(-216h^{\frac{1}{2}} + 18h^{\frac{3}{2}}\right) dh = \int dt \Rightarrow -216 \left(\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + 18 \left(\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) = t + c$$

Simplificando en la última ecuación

$$\frac{h^{\frac{3}{2}}}{5} (36h - 720) = t + c$$

Cuando  $h = 6, t = 0 \therefore \frac{6\sqrt{6}}{5} (216 - 720) = c \therefore c = \frac{6\sqrt{6}}{5} (-504) \therefore c \approx 1481.45$

El tanque está completamente vacío cuando  $h = 0$ .

Así, el tiempo es

$$t = 1481.45 \approx 24'41'' \text{ segundos}$$

## BIBLIOGRAFÍA

- Ayres, F. **Cálculo diferencial e integral**. Mc Graw-Hill. México, 1995.
- Bittinger, M. **Cálculo para Ciencias Económico-administrativas**. Addison Wesley. Séptima edición. Colombia, 2002.
- Cruse A. B. y Granver M. **Lectures on freshman calculus**. Addison-Wesley Publishing Company. U S A. 1971.
- Granville, W. A. **Cálculo diferencial e integral**. Limusa. México, 1981.
- Hughes-Hallett, Deborah et al. **Cálculo**, Continental, SA. México, 1997
- Larson, Roland et. al. **Cálculo con Geometría Analítica**, McGraw-Hill, España, Sexta edición, 1999.
- Leithold, L. **El Cálculo con geometría analítica**. Harla. Segunda edición. México, 1972.
- McAloon, K y Tromba, A. **Cálculo en una variable**. Publicaciones Cultural. Primera edición. México, 1975.
- Pinzón, E. A. **Cálculo I. Diferencial. Teoría y 476 problemas resueltos**. Harla. México, 1973.
- Purcell, et. al. **Cálculo**. Prentice Hall. Octava edición.
- Soler, N. y Aranda. **Fundamentos de Cálculo**. ECOE ediciones. Segunda edición. México, 2003.
- Spivak, M. **Cálculo infinitesimal**. Reverté. México, 1992.
- Stewart, J. **Cálculo**. Grupo editorial Iberoamérica. México, 1994.
- Stewart, J. **Cálculo. Conceptos y contextos**. International Thomson Editores. México, 1999.
- Zill, G. D. **Cálculo con geometría analítica**. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1997.