UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

SECRETARÍA ACADÉMICA

GUÍA DE ESTUDIO

PARA PRESENTAR EL EXAMEN DE CONOCIMIENTOS DISCIPLINARIOS

DE

MATEMÁTICAS I A IV

PROMOCIÓN XLII

JUNIO 2021

ÍNDICE

I. Presentación

La presente guía es un documento para la preparación del Examen de Conocimientos y Habilidades Disciplinarias para la Docencia en las asignaturas de Matemáticas I a IV, cuyo propósito es orientar al profesor sobre las características del Examen de Conocimientos para la Contratación Temporal de Profesores, mejor conocido como Examen Filtro así como su evaluación.

En el examen el aspirante debe mostrar el conocimiento y manejo de los objetivos generales de los programas de las asignaturas de Matemáticas I a IV, y los aspectos relevantes como el enfoque y las estrategias que el sustentante ha desarrollado para lograr el perfil del egresado de cada asignatura.

Al ingresar a la planta docente del Colegio de Ciencias y Humanidades, aceptamos la vigencia del modelo educativo y sus principios como fundamentos de organización del Plan de Estudios, que junto con los actuales requerimientos de la enseñanza son elementos de las metas educativas.

En este contexto, cabe destacar la necesidad de proporcionar a los estudiantes una educación básica que vaya más allá del desarrollo de capacidades puramente cognitivas, considerando hábitos, valores personales y normas que impulsen su desarrollo personal y afectivo, así como sus relaciones interpersonales, al igual que su inserción social crítica y constructiva.

Lo cual nos lleva al conocimiento e interpretación de los objetivos generales del Colegio de Ciencias y Humanidades. **“aprender a aprender”, “aprender a hacer”, “aprender a ser”.**

De lo expuesto se desprende que el papel del profesor en el aprendizaje de los alumnos es fundamental, de ahí la importancia de tener profesores mejor preparados y que asuman la responsabilidad adquirida con la institución, con los alumnos y con ellos mismos.

El Área de Matemáticas tiene como finalidad principal que el alumno utilice el lenguaje simbólico en la construcción del proceso de su pensamiento; es decir, la matemática como una ciencia que organiza elementos de la realidad, deberá mostrarse a los alumnos que posee un doble valor: como ciencia y como herramienta. Como ciencia construye, organiza y sistematiza conocimientos. Como herramienta contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones.

En el actual Plan de Estudios se conserva la enseñanza de las matemáticas a lo largo de todo el ciclo del bachillerato, durante los cuatro primeros semestres, se da el aprendizaje de conocimientos básicos, en los semestres quinto y sexto, se da la introducción a especialidades.

Los programas actualizados se caracterizan por una concepción del aprendizaje que supone la participación activa del estudiante en la construcción de las ideas al aprender. Lo que implica entre otras cosas, que los conceptos, no podrán presentarse de manera formal y acabada ya que los cursos se consideran un primer acercamiento a la materia.

Los contenidos de los cuatro cursos básicos, se retoman y sirven de sustento para nuevos conocimientos y deberán ser revisados de manera no sistemática en el contexto en que se presenten, ampliándose de forma que consoliden el conocimiento. Los contenidos nuevos, deberán abordarse en un nivel medio de complejidad considerando que no existe experiencia previa de los estudiantes en su manejo.

En los programas se plantea iniciar a los alumnos a partir de la intuición, dando pie a la abstracción de los razonamientos y procedimientos de análisis, buscando destacar las ideas fundamentales y su manejo simbólico, para finalmente introducir el rigor, precisando ideas y sistematizando métodos hasta el nivel de algoritmos.

En cuanto al aprendizaje de los alumnos, el énfasis se hace en el desarrollo de significados, que permitan al estudiante una interpretación correcta de los conceptos. Ya que no sólo se gradúa la dificultad de los conceptos con que se trabaja, sino también las etapas de maduración, formalización y la manipulación de los algoritmos y procedimientos.

La guía tiene como base los programas vigentes de Matemáticas I a IV. En ella, se incluyen conocimientos de los diferentes ejes que conforman el plan de estudios del Área de Matemáticas: Álgebra, Geometría Euclidiana, Geometría Analítica, Trigonometría y Funciones.

Esta guía está elaborada para que el aspirante a profesor del Colegio, la resuelva considerando el enfoque pedagógico de la resolución de problemas como una fuente generadora de ideas conceptuales de la temática a abordar en los cursos; por ello, se espera que quienes presenten su examen de ingreso a la docencia, expresen, al resolver los ejercicios y problemas propuestos, elementos generalizadores y comunique claramente, en ambos lenguajes, español y matemático, las interpretaciones a los resultados correspondientes a las soluciones que encuentre.

II. Enfoque de la materia

A. Enfoque Disciplinario

La enseñanza de la matemática atiende los principios educativos del Colegio de Ciencias y Humanidades, para cumplirlos debe lograr habilidades del pensamiento que permitan a los estudiantes ser capaces de adquirir por sí mismos nuevos conocimientos, además analizar, interpretar y modificar el mundo que lo rodea.

Por lo que en el CCH se concibe a la matemática como una disciplina que:

Posee un carácter dual: de ciencia y herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías para la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.

Manifiesta una gran unidad. No obstante, la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas se vinculan complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.

Contiene un conjunto de simbologías propias, bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, algebraica), que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones y comportamientos; aspectos que contribuyen a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones.

Esta concepción tiene como consecuencia desechar la enseñanza de la matemática como un conjunto de conocimientos acabados y organizados según la estructura formal y tomar la posición de desarrollar en el alumno habilidades intelectuales que caracterizan la construcción de la misma.

B. Enfoque Didáctico.

La columna vertebral de la metodología didáctica es la resolución de problemas, que consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas para despertar el interés de los alumnos, y los inviten a reflexionar. La resolución de problemas promueve el trabajo grupal, el diálogo entre alumnos, entre el maestro y los alumnos y apoya la construcción de un vínculo entre iguales para fomentar el trabajo en equipo, la solidaridad entre compañeros y la aceptación de la corresponsabilidad en el proceso educativo, favoreciendo el desarrollo de habilidades del pensamiento que permitan al alumno el aprender a aprender y el aprender a hacer.

Considerar la resolución de problemas como metodología didáctica no consiste simplemente en enfatizar esta actividad para dar “sentido” a una serie de conceptos y métodos que son previamente expuestos por el profesor, sino que éstos deben surgir, en el alumno, como necesidad en la etapa de comprensión de situaciones problemáticas o como generalización de la resolución y la solución de éstas.

Dado los tiempos institucionales, no se desecha la exposición de conceptos y métodos por parte del profesor, siempre y cuando la necesidad de su estudio surja en la etapa de comprensión de una situación problemática y éste plantee actividades que garanticen la comprensión de los mismos. Esta actividad creará los recursos básicos necesarios que en situaciones “nuevas” permitan el “descubrimiento”, por generalización, de conceptos y métodos durante la reflexión sobre el procedimiento de solución y la solución de las mismas.

Por lo general, uno no puede suponer que los alumnos sean capaces de resolver problemas, muchos de ellos abordan esta actividad en forma caótica y con descuido, por lo que el resolver problemas aparte de ser una metodología didáctica, debe ser contemplado como objeto de aprendizaje. Así el profesor debe proporcionar ayudas para que sus alumnos transiten en forma organizada y creativa en el proceso de resolución de problemas. Estas ayudas son contempladas por autores como Polya y Schoenfeld como estrategias heurísticas.

Polya considera que en la actividad de resolución de problemas el profesor debe inducir a los estudiantes a transitar por las siguientes etapas:

a) **Comprensión del problema.**
Mediante preguntas como: ¿cuáles son los datos?, ¿cuáles son las incógnitas?, ¿qué condiciones se deben satisfacer entre datos e incógnitas?, ¿es posible que estas condiciones se puedan satisfacer?

b) **Trazar un plan.**
Mediante preguntas y sugerencias como: ¿puede reducir el presente problema a uno que sabe resolver?; recurra a las definiciones para plantear el problema en términos más operativos; considere la condición en partes y observe la forma en qué varía el elemento que se desea encontrar conforme a cada una de las partes y vea si esto le es útil para resolver el problema; trace un diagrama que ilustre las relaciones entre datos e incógnita y vea si esto le ayuda en la resolución del problema; considere casos particulares y vea si estos siguen un patrón; considere un problema análogo. Por ejemplo, en geometría: reduciendo dimensiones; trace líneas auxiliares; considere casos extremos y vea cómo ajustar a las condiciones originales; ¿conoce algún resultado o método que le pueda ser útil en el presente problema?; considere qué datos son necesarios para encontrar lo buscado y vea si estos aparecen en el planteamiento del problema, si no, repita el procedimiento para el dato o datos no presentes, hasta que arribe a datos presentes en el problema.

c) **Ejecución del plan.**
Sugiriendo el monitoreo del procedimiento escogido: justificando cada uno de los pasos, valorando el avance logrado a fin de seguir o cambiar de plan.

d) **Retrospección.**
Con sugerencias como: reflexione sobre lo realizado y piense si el método o la solución puede aplicarse en nuevos problemas; intente inventar otros problemas donde el procedimiento de solución sea el mismo; intente pensar en una situación práctica donde el problema pueda aplicarse; piense cómo el problema puede generalizarse.

Esta forma de proceder debe ser inducida primeramente con el planteamiento de estas sugerencias y preguntas por parte del profesor, hasta que el alumno lo haga de manera independiente.

C. Contribución del Área de Matemáticas al perfil del egresado

El Área de Matemáticas, como uno de los pilares principales en la formación de los estudiantes, contribuye al perfil del egresado al formar a un alumno que esté preparado para:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Generar conocimientos a través de la resolución de problemas.
- Utilizar su conocimiento matemático en la resolución de problemas en contextos que lo requieran.
- Utilizar diversas formas de razonamiento que le permita en el análisis de eventos, tomar decisiones y ser consciente de la incertidumbre o certidumbre de los resultados de éstas.
- Elaborar conjeturas, construir argumentos de forma oral y escrita para validar o refutar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales, diversas formas de representación matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica y algebraica) para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Utilizar las nuevas tecnologías para la búsqueda de información relevante y su sistematización.
- Utilizar las tecnologías digitales para favorecer la adquisición de conocimientos.
- Adquirir el hábito de la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.
- Valorar las aportaciones de las matemáticas en todos los campos del saber.
- Exponer y aplicar sus conocimientos matemáticos con seguridad en sí mismo.

D. Descripción de la estructura general del examen

- ✓ El examen estará integrado por problemas similares a los que se presentan en la guía, tomando como base la idea de la metodología de resolución de problemas. Es importante que, al resolver los problemas, utilice únicamente álgebra, geometría o trigonometría, material comprendido en las asignaturas de Matemáticas I a IV.
- ✓ Se sugiere que el aspirante resuelva la guía para que se familiarice con el tipo de problemas que se le pueden presentar; lo que le permitirá ajustarse al tiempo destinado para la realización del mismo.
- ✓ Se dispondrá de tres horas para realizar el examen.
- ✓ El examen contendrá problemas que evaluarán conocimientos y otros que evaluarán la habilidad disciplinaria
- ✓ Es importante que en la solución de cada uno de los problemas se presente el procedimiento que se siguió para resolverlo.
- ✓ Se permite el uso de calculadora científica.
- ✓ Deberá contestar correctamente por lo menos el 60% de los problemas, la calificación mínima requerida para acreditarlo es de seis (6).

III. Problemas para Matemáticas I

1. Si solo contamos con un ejemplar de cada una de las siguientes pesas, $\frac{1}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg 1 kg, 2 kg, 5 kg, ¿Cuántos distintos pesos positivos podemos formar?

R. 31 posibilidades

2. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. ¿Qué fracción del pastel original quedó después de cortar tres veces?

R. La fracción del pastel original que quedó es: $\frac{8}{27}$

3. El precio de cierta mercancía cambió durante cuatro períodos consecutivos, tomando siempre como referencia, el precio de dicha mercancía en el periodo inmediato anterior, como se indica:

Primer período	creció el 25 %.
Segundo período	creció el 25 %.
Tercer período	decreció el 25 %.
Cuarto período	decreció el 25 %.

Indique cuál es el porcentaje que corresponde al cambio neto registrado respecto al precio original.

R. Decreció 12 % aproximadamente

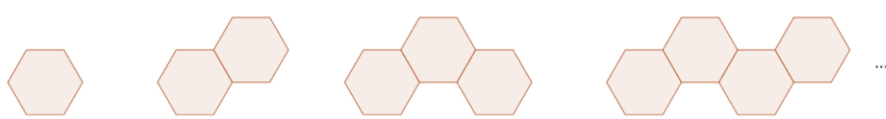
4. Para cada entero positivo n, se define como S_n a la suma de los primeros diez múltiplos positivos de n. Por ejemplo, $S_3 = 3 + 6 + 9 + \ldots + 30 = 165$. Cuál es el valor de $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{10} =$

R. 3050

5. En una fiesta, la cantidad de personas que bailan es el 25% de la cantidad de personas que no bailan. ¿Qué porcentaje del total de personas en la fiesta no bailan?

R. 80%

6. Con palillos se han construido las siguientes figuras de manera que solo comparten un lado con cualquiera de los hexágonos que se construyeron anteriormente



¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura con 20 hexágonos?
¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura de n hexágonos?

R. Se necesitan 101 palillos para formar 20 hexágonos.
Para n hexágonos F(n)= 5n+1

7. Considere el número n = 4 489 613 5a8 donde a es un dígito. La cantidad máxima de opciones para las cuales n es múltiplo de 132 es:

R. a = 6, La cantidad máxima de opciones es 1.

8. Se tienen 120 chocolates amargos, 100 chocolates de enjambre de nuez y 140 chocolates blancos. Se quieren armar canastitas con la misma cantidad de chocolates de cada sabor y sin que sobre alguno, ¿Cuántos chocolates deberá contener cada canastita? ¿Cuántas canastitas deberán llenarse?

R. 20 canastitas con 5 chocolates de enjambre, 6 chocolates amargos y 7 blancos

9. Un radiador de automóvil está lleno con una solución de agua y anticongelante, mismas que se representan en porcentaje y se considera el depósito lleno del radiador. Ahora bien, si de ese total, el 40% es anticongelante, ¿Qué cantidad de solución en proporción, debe retirarse del radiador para que, al ser reemplazado por anticongelante puro, la solución en el radiador tenga 60% de anticongelante?

R. Una tercera parte del volumen.

10. Una persona vende pasteles en cinco etapas
   a) Vende la mitad de sus pasteles, más medio pastel.
   b) Vende la tercera parte de los restantes, más el tercio de un pastel.
   c) Vende la cuarta parte de los restantes, más la cuarta parte de un pastel.
   d) Vende la quinta parte de los restantes más la quinta parte de un pastel.
   e) Por último, vende 11 pasteles.

   ¿Cuántos pasteles tenía inicialmente?

R. Inicialmente tenía 59 pasteles

11. Salí de mi casa en automóvil a las 8:00 de la mañana. Un automóvil que va al doble de mi velocidad sale también de mi casa, me alcanza exactamente a la mitad del camino y llega 1:30*h* antes que yo a nuestro lugar de destino. ¿A qué hora salió el otro automóvil?

R. El otro automóvil salió a las 9:30 hrs

12. Una alfombra mágica reduce su longitud y su ancho a la mitad cuando se cumple un deseo a su dueño. En qué razón se reduce el área de la alfombra respecto a la original después de tres deseos.

R. 1/64

13. ¿Cuántas parejas de números (b, c) permiten que las ecuaciones $3x + by + c = 0$ y $cx - 2y + 12 = 0$ tengan las mismas raíces?

R. 2 parejas

14. *K* y *M* son dos números reales, tales que *K* es menor que *M*.*P* y *Q* son dos números reales entre *K* y *M* tales que: La distancia de *P* a *M* es las dos terceras partes de la distancia de *K* a *P*. La distancia de *Q* a *M* es la mitad de la distancia de *K* a *Q*. Determinar los valores de *K* y *M* si se sabe que *P* es cinco séptimos y que *Q* es tres cuartos.

R. $K = \dfrac{11}{28}, \quad M = \dfrac{13}{14}$

15. Un vendedor de libros usados, en un buen día vendió toda su mercancía. Su primer cliente se llevó la mitad más uno de los libros en existencia. El segundo compró la mitad de los restantes más uno. También el tercer cliente se llevó la mitad de los restantes más uno. El cuarto y último, compró la mitad de los restantes y uno más. Así terminó con todos los libros. ¿Cuántos libros tenía al principio?

R. 30 libros

16. Pablo y Rodrigo son hermanos. Deciden caminar dando Rodrigo una ventaja a Pablo de 40 metros antes de salir a alcanzarlo. Rodrigo da pasos de 90cm y Pablo de 75 cm. ¿Después de cuántos pasos logra alcanzarlo?

R. 267 pasos

17. En la fonda de Lupita se preparan 15 litros de café con leche con 20 % de café negro y el resto de leche. ¿Cuántos litros hay que extraer y remplazar con café negro para que la olla de 15 litros quede con una proporción de 60% leche y 40 de café?

R. 3.75 litros

18. ¿Cuánto vale **m** si $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)=1$

R. m = n + 1

19. Hallar la ecuación de la recta que dará la relación entre la temperatura en grados Centígrados, **C**, y grados Fahrenheit, **F**. Se sabe que el agua se congela a 0° grados Centígrados (32 grados Fahrenheit) y hierve a 100 grados Centígrados (212 grados Fahrenheit).

R. *F = 1.8 C + 32*

20. En Tokio se ha observado el fenómeno de la isla urbana de calor. La temperatura media era de 13.5 ºC en 1915, y a partir de entonces ha aumentado 0.032º por año.

a) Suponiendo que la temperatura T, en ºC, está linealmente relacionada con el tiempo t, en años, y que T = 0 corresponde a 1915, exprese T en función de t.
b) Infiera la temperatura del año 2050.

R. *a) T = 13.5 + 0.032 t, b) T = 17.82º*

21. Según el INEGI la esperanza de vida en México en el año 2000 se ubicó en 76.4 años para las mujeres y 70.9 para los hombres. En 2016 cambio a 77.8 y 72.6 años respectivamente. Ajustar un modelo lineal para cada caso y estimar la esperanza de vida en 2030.

R. $E(t) = 76.4 + .0875t$ $E(30) = 79.025$ *años* para las mujeres
$E(t) = 70.9 + .1062t$ $E(30) = 74.08$ *años* para los hombres

22. Bajo ciertas condiciones, el tiempo de exposición, que se necesita para hacer una ampliación del negativo de una fotografía, varía directamente con el área ***A*** de la ampliación. Si tarda 12 segundos hacer una ampliación de 3.75 x 5 dm, ¿cuánto tiempo tomará hacer una ampliación de 15 x 20 dm?

R. 192 segundos

23. En el año 2014 se compró un objeto antiguo en $59,000, en el año 2020, fue valuado en $95,000. Considerando que el valor que aumenta anualmente es constante determinar: a) El modelo matemático que represente su valor en función del tiempo. b) ¿En qué año su valor será de $500,000?

R. a) Modelo matemático, Y = 6,000t + 59,000
b) Año en que su valor será de $500,000, 73.5 años

24. Una mezcla de 200 litros está compuesta por las sustancias *A, B* y *C*. Si la suma de las cantidades de litros que tiene la mezcla de las sustancias *A* y *B* es el triple de la cantidad de litros que tiene *C*, y la sustancia *B* conforma el 35 % de la mezcla, ¿cuántos litros de cada sustancia tiene la mezcla?

R. Tiene 80 litros de la sustancia A, 70 litros de la B y 50 litros de la C.

25. Un número de tres dígitos es 35 veces la suma de sus dígitos. La suma del dígito de las unidades con el de las decenas, es dos veces el dígito de las centenas. Cinco veces la suma del dígito de las centenas con el de las decenas, es cuatro veces el dígito de las unidades. Considerando que ninguno de los dígitos es cero. Encuentra el número.

R. El número de tres dígitos es 315.

26. Un grupo de 20 personas, hombres y mujeres, comieron en un restaurante. Cada uno de los hombres gastó la misma cantidad y entre todos ellos pagaron $960 y cada una de las mujeres gastó la misma cantidad y entre todas pagaron $960. Si cada hombre gasto $40 pesos más que cada mujer. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había en el restaurante?

R. 8 hombres y 12 mujeres

27. Un niño tiene cierta cantidad de dinero. Si comprara 10 lápices le quedarían 10 pesos, si comprara 4 cuadernos le quedarían 20 pesos. Si comprara 3 cuadernos y cuatro lápices le quedarían 10 pesos ¿Cuánto dinero tiene?

R. 60 pesos

28. Si un lado **a** de un rectángulo se disminuye en 5 unidades, y el lado **b** se aumenta en 10 unidades el área no se altera. También el área no se altera si se aumenta **a** en 4 unidades y se disminuye **b** en 5 unidades. ¿Cuánto miden los lados **a** y **b** del rectángulo?

R. El lado a = 20 y el lado b = 30.

29. Antonio y Beto pueden hacer un trabajo en 4 días, Antonio y Carlos pueden hacerlo en 3 días, pero, Beto y Carlos en 6 días. Determinar el tiempo que requiere cada uno de ellos para realizar el trabajo individualmente.

R. Antonio realiza el trabajo en 4.8 días
Beto realiza el trabajo en 24 días
Carlos realiza el trabajo en 8 días

30. Sin hacer uso de calculadora, determinar el resultado de las siguientes sumas:

a) $0.1 + 0.2 + 0.3 + \ldots + 14.5 =$
b) $12.1 + 12.5 + 12.9 + \ldots + 115.3 =$
c) $0.4 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \ldots =$

R. a) 1058.5, b) 16498.3, c) 4/9

31. Considera una recta numérica, sobre la cual se ubica el segmento AB. Si el punto A está en -5/3 y el punto B está en 11/4, calcula la ubicación de los puntos C y D, de tal forma que dividan al segmento AB en tres partes iguales.

R. C está en -7/36
D está en 23/18

32. Considera un triángulo de lados 14, 20 y 28 cm respectivamente, y tres circunferencias cuyos respectivos centros están en cada uno de los vértices del triángulo. Si las tres circunferencias son tangentes entre sí, dos a dos, y los puntos de tangencia se ubican sobre los lados del triángulo, calcula el valor de sus respectivos radios.

R. Los radios de las circunferencias son 3, 11 y 17 cm.

IV. Problemas para Matemáticas II

1. Dos campesinas llevaron en total 100 huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero ambas recibieron el mismo dinero por la venta. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 cruceros. La segunda contesto: y si yo hubiera vendido los huevos que tenías, tú habrías sacado de ellos $6\frac{2}{3}$ cruceros. ¿Cuántos huevos llevo cada una?

R. Una lleva 40 huevos y la otra 60

2. "Un comerciante rehúsa vender en $15000 un cierto número de pacas de algodón. Dos meses más tarde, cuando el precio ha subido $5 por paca, las vende en $15190. Si en el curso de los dos meses se destruyeron dos pacas, encuéntrese el precio por paca de la primera oferta y el número original de ellas.

R. 100 pacas a $150 cada una

3. Cuando un gramófono para discos CD de una marca común se vende a $300 dólares, una tienda vende 15 por semana. Sin embargo, al reducir $10 el precio, las ventas aumentan en 2 por semana. ¿Qué precio de venta hará que las entradas semanales sean de $7000?

R. Se deben vender 35 gramófonos a $200

4. Se quiere fabricar un tambor cilíndrico cerrado para aceite con una altura de 4 pies de tal modo que la superficie total sea de 10π pies. Calcular el diámetro del tambor.

R. El diámetro del tambor mide 2 pies.

5. Un herrero necesita cortar una varilla de 20 cm para hacer un marco rectangular que encierre $\boldsymbol{24cm^2}$ de superficie sin que falte o sobre material, Determinar las medidas del marco.

R. Las dimensiones del marco son: Ancho = 6 cm y Largo = 4 cm.

6. Se desean construir dos figuras, un rectángulo de tal forma que su ancho sea de x+1 cm. el largo de 2x+1 cm. y un triángulo isósceles donde su base sea x+5 cm y su altura de 2x cm. ¿Cuánto debe valer x, para que las áreas de las dos figuras sean iguales?

R. *x = 1*

7. La iluminación (E) de un objeto depende tanto de su intensidad (I) de la fuente de luz como de la distancia (d) entre el objeto y la fuente de luz. La iluminación producida por la fuente de luz sobre un objeto varía en razón inversa al cuadrado de la distancia entre ellos.

   Hallar un punto C igualmente iluminado por dos luces A y B que están separadas 20 metros y cuyas intensidades son 20 y 7 bujías, respectivamente.

   R. Distancia de A a C es 12.56 metros y de C a B es 7.44 metros

8. Las trayectorias de los animales saltadores son normalmente parabólicas. La figura muestra un salto de rana en un plano de coordenadas. La longitud del salto es 9 pies y la altura máxima sobre el piso es de 3 pies. Encontrar la función standard para la trayectoria de la rana.

   R. $y = -\frac{3}{20.25}(x-4.5)^2+3$

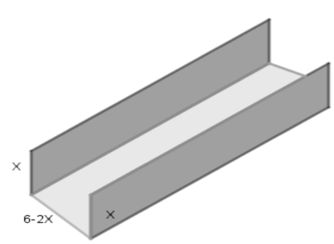
9. Una agencia de viajes ofrece un crucero por varias islas del Caribe durante tres días y dos noches. Para un grupo de 12 personas el costo por persona es de \$8000. Por cada persona extra en el grupo de 12 personas, el costo se reduce en \$200. ¿Qué tamaño de grupo da los máximos ingresos a la agencia de viajes?

   R. El grupo debe de ser de 26 personas pagando cada una \$5200

10. Escribe la ecuación de la parábola.
    - La parábola tiene un valor máximo en (2, 5) y pasa por el punto (1,2).
    - La parábola tiene un valor mínimo en (-2,-6) y pasa por el punto (1,0).

    R. $y_1 = -3(x-2)^2+5$, $y_1 = \frac{2}{3}(x+2)^2-6$

11. Se desea hacer un canalón con una lámina larga, rectangular metálica, de 6 metros de ancho. Se doblan dos orillas hacia arriba para que queden perpendiculares al fondo. ¿Cuántos metros deben quedar hacia arriba para que el canalón tenga capacidad máxima?



R. $y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$, La altura del canalón para obtener la capacidad máxima debe ser de 1.5 metros.

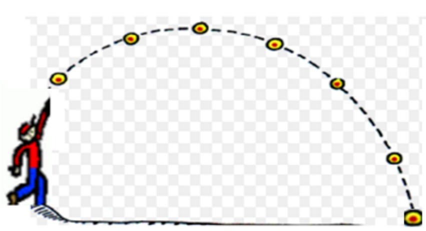
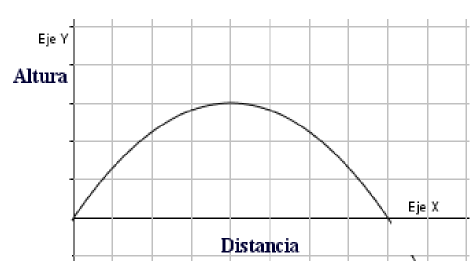
12. Dados los segmentos $\overline{AB}$ = 4, $\overline{AC}$ = 7 y $\overline{AD}$ = 9, construir con regla y compás un cuarto segmento de longitud x tal que satisfaga la proporción $\frac{4}{7} = \frac{9}{x}$ y determinar el valor de x. Redacta los pasos que se requieren en la construcción.

R. $x = \frac{63}{4}$

13. En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo comprendido entre los lados iguales es perpendicular al lado opuesto a ese vértice.
Demuestra utilizando congruencia y especifica que criterio utilizaste.

14. Desde la base, un jugador de béisbol lanza una pelota que sigue una trayectoria parabólica. La pelota alcanzó una altura máxima de 9 unidades y cayó al suelo a una distancia de la base de 12 unidades. Determinar la función que representa la trayectoria de la pelota y la distancia en que se encuentra la base cuando la pelota alcanza una altura de 3 metros.

R. La función que representa la trayectoria de la pelota es Y= - $\frac{1}{4}$ (x-6)^2 +9. Alcanza una altura de 3 metros a las distancias de $6 \pm 2\sqrt{6}$

Imagen del jugador de béisbol.	Representación en el plano cartesiano de la trayectoria de la pelota.
	

15. La altura que alcanza un patinador de skate al saltar se representa por $f(t) = -t^2 + 10t$, con t en segundos, que mide el tiempo que dura el salto.
    a) Calcular la altura que alcanza el patinador después de 3 segundos de haber comenzado el salto.
    b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
    c) ¿En cuánto tiempo alcanza la altura máxima?
    d) ¿Cuánto tiempo estuvo sin tocar el piso o la rampa?
    e) ¿Qué indica en el problema que el valor del parámetro c sea nulo? En el tiempo cero la altura es cero.

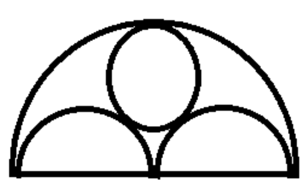
R.

a) La altura después de 3 segundos es de 21 metros.
b) Altura máxima que alcanza 25m.
c) En tiempo 5 segundos.
d) Estuvo sin tocar el piso o la rampa 10 segundos.
e) Para que el valor del parámetro c sea nulo, el tiempo y la altura deben ser de cero.

16. El ∆ABC ∼ ∆A'B'C', Si los lados del triángulo ABC son 4, 6 y 7. Si el perímetro de ∆ A'B'C' es de 51 unidades, determinar:
    a) La razón de semejanza entre ellos.
    b) La longitud de los lados de ∆ A'B'C'.

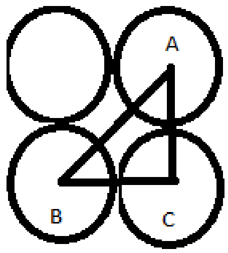
R. La razón de semejanza es $\frac{51}{17}$. Los lados de ∆A'B'C' son 12, 18 y 21 unidades.

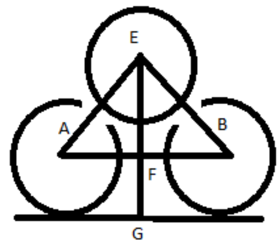
17. Dos semicírculos de radio 6 están inscritos en un semicírculo de radio 12. Un círculo de radio r es tangente a los tres semicírculos. ¿Cuánto vale r?



R. *r = 4*

18. Cuatro pelotas de Voleibol se colocan en el piso formando un cuadrado con las cuatro. Una quinta pelota se coloca sobre las otras 4 de tal forma que toca a todas ellas. Si el diámetro de una pelota es de 64 cm, ¿A qué distancia del suelo, se encuentra el centro de la quinta pelota?





R. EG= $32\sqrt{2}$ +32= 32(1+$\sqrt{2}$)

19. Sean ABCD un rectángulo con AB $<$ BC, M, N, los puntos medios de los lados CD y DA respectivamente. Si el ángulo BNM es recto y AB = 6 cm, ¿cuánto mide BC?

R. BC = $6\sqrt{2}$

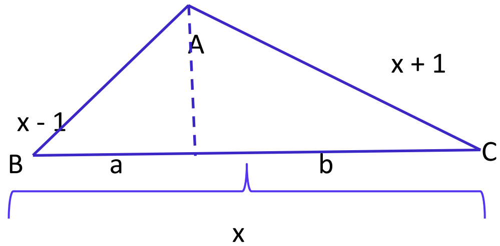
20. En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es dos unidades más que el lado BC y BC mide 5 ¿cuánto mide AB y CA?

R. AB = 4, CA = $\frac{10}{3}$

21. A partir de un cuadrado se forma un octágono regular cortando un triángulo isósceles en cada esquina. Si cada lado del cuadrado mide 20 cm ¿cuánto mide cada lado del octágono?

R. $20(\sqrt{2} - 1$

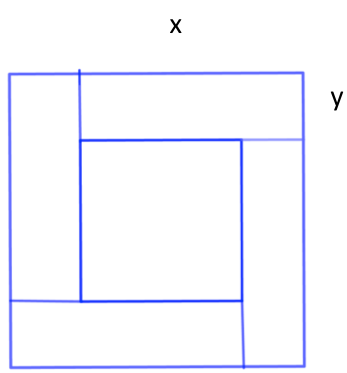
22. En la figura demostrar que b – a = – 4



23. ¿Cuál es el área de un rombo de lado 13 cm tal que la suma de las diagonales es 34?

R. 120 cm^2

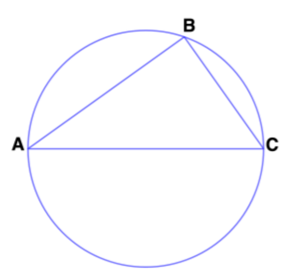
24. Dividir un cuadrado de área 180 u^2 en cuatro rectángulos congruentes y un cuadro al centro también de misma área que los rectángulos.



R. $y = 3\sqrt{5} \pm 3$

25. Demostrar los siguientes resultados:

- Sea B un punto de la circunferencia de diámetro AC. Demostrar que el ángulo ABC es recto.



- Encontrar la ley de cosenos para un triángulo obtusángulo.
- Demostrar que la altura que va del ángulo recto al lado opuesto en un triángulo rectángulo lo divide en triángulos semejantes respecto al original.

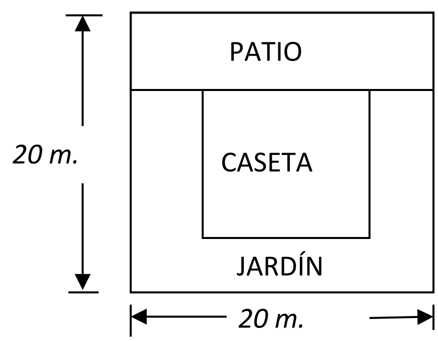
26. La gráfica de una parábola vertical corta al eje de las ordenadas en el punto $A\left(0, \frac{7}{2}\right)$ y al eje de las abscisas en los puntos $B(1,0)$ y $C(7,0)$. Determina la ecuación de la función cuadrática en su forma estándar y en su forma canónica.

R. $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4.5$

27. Una pistola de señales es disparada verticalmente, la altura de la señal está dada por $h = 51t - 0.85t^2$, en donde *h* es la altura de la señal, medida en metros, y *t* es el número de segundos que habrán transcurrido después del disparo. La luz de la señal aparece en el momento del disparo y la mantiene hasta que la señal regresa al suelo. Si la pistola es disparada verticalmente, la luz de la señal puede verse desde un puesto de observación solamente cuando su altura es de *425* metros o más.
¿A los cuántos segundos alcanza la señal su altura máxima?
¿Cuál será la altura máxima que alcanza?
¿Cuánto tiempo será visible la señal desde el puesto de observación?

R. a) 30 segundos; b) 765 metros; c) 40 segundos

28. En el centro de un terreno cuadrado cuyos lados miden 20 metros, se quiere construir una caseta cuadrada. Además de la caseta, una parte del terreno se destinará a un patio y la otra a jardín, con la distribución que se muestra en la figura.
Si en total se desean 224 m^2 de jardín, ¿cuáles serán las dimensiones del terreno que ocupará la caseta?



R. Las dimensiones del terreno que ocupará la caseta es de 4×4 *o* 6×6

29. Dadas dos rectas paralelas y un punto en el "*exterior*" de dichas rectas, trazar con regla y compás un triángulo rectángulo para el cual el punto es uno de sus vértices, la recta más cercana al punto es una altura y la otra recta es una mediatriz.

30. Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar una recta que pase por el punto y forme con la primera recta un ángulo de 30^0

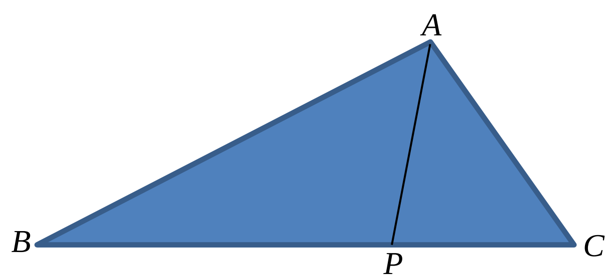
31. Trazar con regla y compás un triángulo cuyos ángulos sean de 90^0, 75^0 y 15^0, los lados de cualquier dimensión.

32. Dado un segmento $\overline{AB}$ trazar un triángulo cuyos ángulos tengan respectivamente 90^0, 60^0 y 30^0 para el cual dicho segmento sea el cateto que se opone al ángulo de 60^0.

33. El triángulo ABC es isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Por un punto cualquiera P de $\overline{BC}$ se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$, éstas cortan a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ en *R* y *S* respectivamente. Muestre que la suma de $\overline{PR}$ y $\overline{PS}$ es igual a la altura que pasa por C.

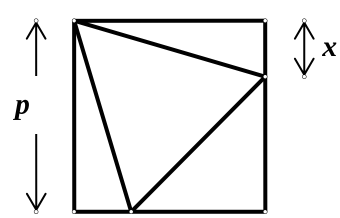
34. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 12 cm. Traza el segmento de menor longitud que parte del incentro y termina en cualquier lado del triángulo.

35. Sea *ABC* un triángulo cualquiera, y *AP* la bisectriz interior del ángulo *A*. Muestre que $\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$, es decir, que los segmentos determinados por la bisectriz interior de un ángulo sobre el lado opuesto, son proporcionales a los otros dos lados.



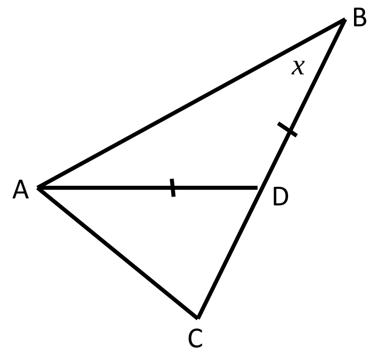
36. Sea *x* la distancia entre un vértice del cuadrado y el vértice del triángulo equilátero que se muestran en la figura; *p* es la magnitud del lado del cuadrado. Obtener el valor de *p* en términos de *x*

37.



R. $p = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)x$

38. En el triángulo $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ y $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Determina la medida del ángulo *x*.

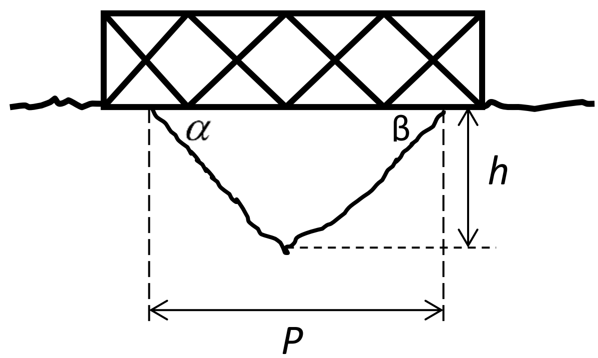


R. x = 36º

39. Se construye un puente para pasar sobre una barranca, como se muestra en la figura. Se han representado dos ángulos α *y* β, *h* representa la profundidad y *P* la distancia de una orilla a la otra de la barranca.

Demostrar que:

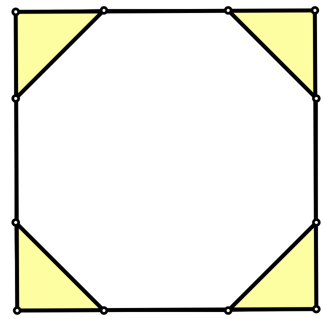
$$\frac{P}{h} = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$$



40.

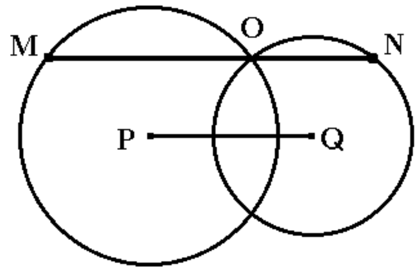
En un cuadrado de lado 3 se cortan triángulos rectángulos isósceles en cada una de sus cuatro esquinas, de tal manera que se forma un octágono regular al interior del cuadrado.

Demostrar que el área de este octágono se puede expresar como $18\sqrt{2}-18$



41.

Dos circunferencias secantes tienen por centros P y Q respectivamente. El segmento PQ mide 3 centímetros. Por uno de los puntos "O" donde se cortan las circunferencias, trazamos una recta paralela al segmento PQ. Sean M y N los puntos donde corta dicha recta a las circunferencias. ¿Cuánto mide MN

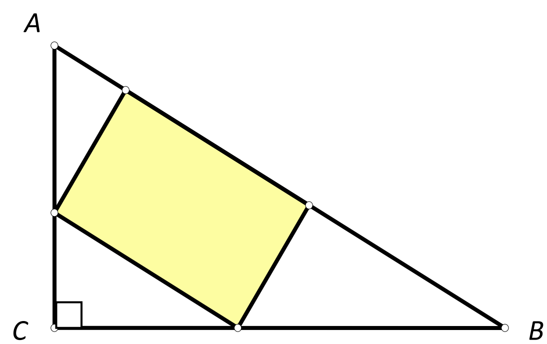


R. $\overline{MN} = 6$

42.

En la figura, $AC = 3,\ CB = 4$

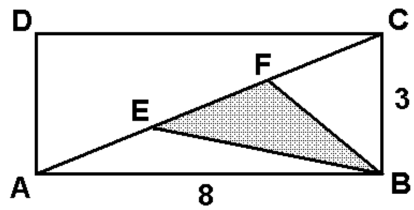
Determinar el área del rectángulo inscrito en el triángulo, si se sabe que su lado sobre la hipotenusa del triángulo mide 3 unidades.



R. El área del rectángulo inscrito en el triángulo es $\frac{72}{25}u^2$

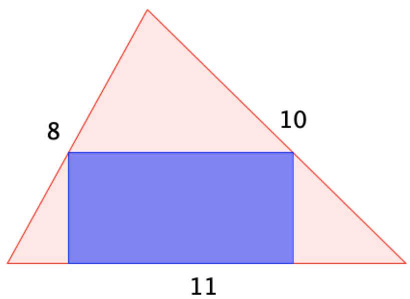
43.

La longitud del rectángulo ABCD es 8 u y su anchura 3 u. Dividimos la diagonal AC en tres partes iguales mediante los puntos E y F. ¿Cuánto vale el área del triángulo BEF?



R. 4 u^2

44. Utiliza geometría Euclidiana para calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área, que puede inscribirse en un triángulo de lados 8, 10 y 11 cm, considerando que uno de los lados del rectángulo se apoya sobre el lado de 11 cm, tal como se muestra en la figura de abajo.



R. La dimensiones aproximadas del rectángulo de mayor área son 5.5 cm de largo y 3.44 cm de ancho.

45. Demostrar el Teorema de Pitágoras haciendo uso del concepto de semejanza de triángulos.

46. Con un alambre que tiene 100 cm de longitud, se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero, para lo cual el alambre se cortará en dos partes no necesariamente iguales. Considerando que para formar cada figura no se hará ningún empalme, determinar cómo debe de cortarse el alambre de tal forma que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo sea un valor extremo. Hay que determinar si se trata de un área mínima o un área máxima.

R. Para el cuadrado se requieren aproximadamente 43.54 cm de alambre y el resto es para el triángulo. El valor extremo corresponde a un área mínima.

V. Problemas para Matemáticas III

1. En la figura aparece una semicircunferencia con centro *O*. Utiliza esta figura, asignando las medidas que creas convenientes para demostrar los siguientes incisos:

a) $sen^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

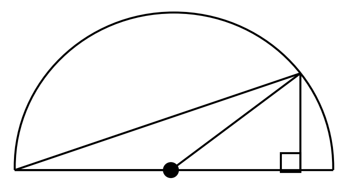
b) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha}$

c) $sen^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

d) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

e) $sen15° = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

f) $sen75° = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$



2. Sean *n* y *k* dos variables numéricas relacionadas mediante la ecuación

$$k = 42 - 2n(n+4)$$

Localicemos en un sistema de coordenadas cartesianas la gráfica formada por los puntos (*n*, *k*) que satisfagan la ecuación anterior. Llamemos *A* y *B* a los puntos donde la gráfica corta al eje horizontal; llamemos *D* al punto donde la gráfica corta al eje vertical y *C* al punto de la gráfica que tiene la misma ordenada que *D*; finalmente, llamemos *E* al punto de la gráfica cuya ordenada tenga el mayor valor posible.

Ahora consideremos el pentágono cuyos vértices son los puntos *A, B, C, D* y *E*.

Determinar el área y el perímetro de este pentágono.

R. Área = 290.76, perímetro = $6\sqrt{197} + 4\sqrt{17} + 10$

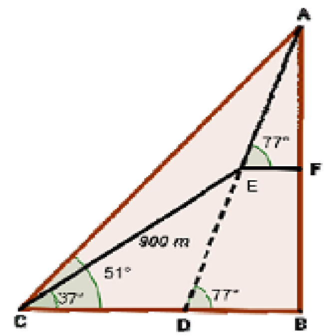
3. Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2, -1), (7, -1) y (7, 3). Encontrar el cuarto vértice y el área del Rectángulo.

R: (2, 3), Área = 20

4. Sean *A, B, C* y *D* las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero cuyos lados son las rectas de ecuaciones $5x - 4y + 14 = 0$, $4x + 3y - 26 = 0$, $3x - 2y - 11 = 0$ y $2x + 5y - 1 = 0$:
Calcular el área del cuadrilátero *ABCD.*

R. El área del cuadrilátero *ABCD* es de 25unidades cuadradas

5. Desde el punto C, el ángulo de elevación de la cima A de una peña es de 51° (ver figura). Después de subir 900 metros por la rampa CE, inclinada 37° con la horizontal, se llega al punto E desde el que la peña se ve bajo un ángulo de 77°. Con esos datos, se pide calcular la altura AB de la peña. Suponer que AB⊥CB.



R. La altura de la peña es de 1025.58 metros.

6. Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo son los puntos de (2, 5), (4, 2) y (1, 1). Encontrar las coordenadas de los tres vértices.

R. (-1,4), (5,6) y (3,-2)

7. Encontrar los ángulos interiores del triángulo con vértices:

$A(-2,1)$, $B(1,3)$ y $C(6,-7)$.

R. Los ángulos interiores del triángulo miden: $Tan^{-1}(5) =$ 78.69º, $Tan^{-1}(8) =$ 82.87º, $Tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) =$ 18.44º

8. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1,2)$ es siempre el doble de su distancia al eje *X*.

R. La ecuación del lugar geométrico es: $x^2 - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

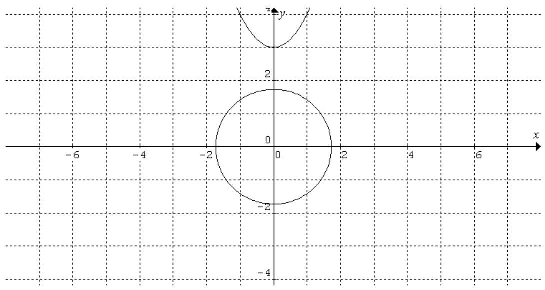
9. Encontrar la distancia entre las rectas paralelas: $2x - 5y = 4$ y $4x - 10y = 14$

R. La distancia entre las rectas paralelas es: $\frac{3\sqrt{29}}{29} = 0.5571$

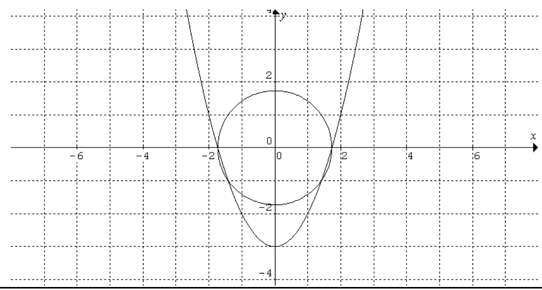
10. Graficar y resolver algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{array}{l} y = x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y = x^2 - 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} y = x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{array}$

R. a) No tiene solución

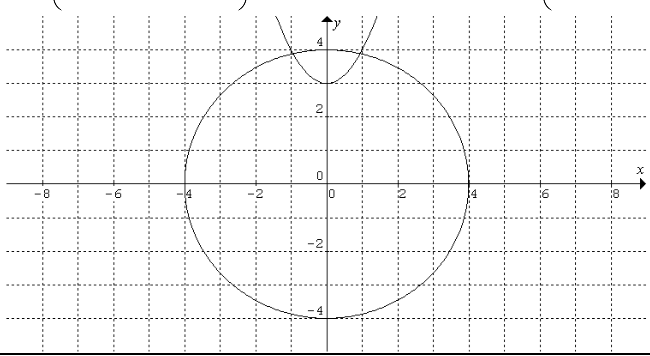


b) Tiene 4 soluciones $\left(\sqrt{2},-1\right)$, $\left(-\sqrt{2},-1\right)$, $\left(\sqrt{3},0\right)$, $\left(-\sqrt{3},0\right)$



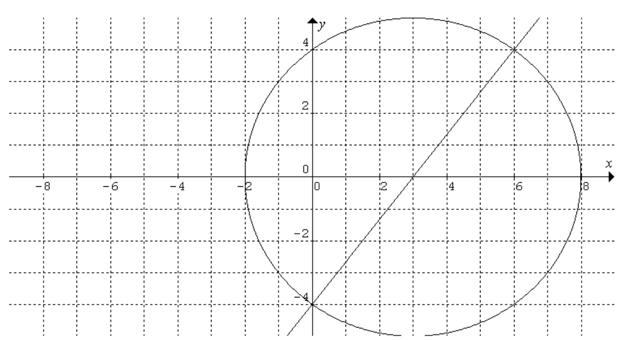
c) Tiene dos soluciones:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{77}-7}{2}}, \frac{\sqrt{77}-1}{2}\right) \approx (0.942062733, 3.887482194) \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{77}-7}{2}}, \frac{\sqrt{77}-1}{2}\right) \approx (-0.942062733, 3.887482194)$$



11. Encontrar las intersecciones de la recta cuya ecuación es *4x – 3y – 12 = 0 con la circunferencia de* ecuación $x^2 - 6x + y^2 - 16 = 0$. Graficar las ecuaciones.

R. Las intersecciones de la recta con la circunferencia están en: (0,-4) y (6,4)



12. El punto *P* (*x* ,4) es equidistante de los puntos *A* (5, -2) y *B* (3, 4). Encontrar el valor de *x*.

R. La abscisa es: $x = 13$

13. Determinar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos: *L* (9, 3), *M* (4, -2) y *N* (8, 6).

R. C(4,3), Radio=5

14. Se dan *G* (-5, 8), *K* (2, *a*) y *H* (*b*, 1). Determinar *a* y *b* de manera que *K* sea el punto medio de $\overline{GH}$.

R. Para que *K* sea el punto medio de $\overline{GH}$, $a = \frac{9}{2}$, $b = 9$

15. Los extremos de un segmento de recta son los puntos *A* (-4, 6) y *B* (5, -2). Encontrar las coordenadas de los puntos que trisecan el segmento.

R. $P_1 = \left(-1, \frac{10}{3}\right)$, $P_2 = \left(2, \frac{2}{3}\right)$

16. Encontrar la ecuación del lugar geométrico generado por un punto *P* que se mueve en el plano y que equidista del punto *F* (3, 0) y de la recta cuya ecuación es

$$x + 3 = 0$$

R. $y^2 = 12x$

17. Encuentra la medida del ángulo agudo que forman las rectas l_1 y l_2: donde l_1 pasa por los puntos $A(8,6)$ y $B(-2,1)$ y l_2 pasa por los puntos $C(4,6)$ y $D(2,-2)$.

R. $\phi = arc\ \tan\left(\frac{7}{6}\right)$

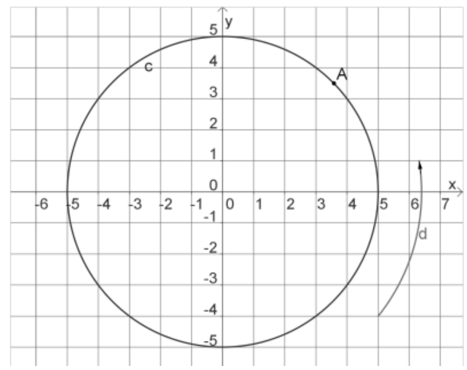
18. Una recta cuya ordenada en el origen es una unidad menor que su abscisa en el origen, forma un triángulo con los ejes coordenados, cuya área es 6 ¿Cuál es su ecuación?

R. La ecuación es: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ $ó$ $3x + 4y - 12 = 0$

9. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que al pasar por el punto (4, 3) cada una de ellas forma con los ejes del sistema de coordenadas un triángulo en el primer cuadrante cuya área es de 27 unidades cuadradas?

R. $3x+2y=18$, $3x+8y=36$

20. Un objeto se mueve en forma circular en un plano cartesiano como se muestra en la figura, sí el objeto se suelta cuando está en la posición (3, – 4), obtenga la ecuación de la curva que se obtiene al salir disparado en ese punto:



R. $-3x+4y+25=0$

21. En cada uno de los siguientes ejercicios realiza lo que se pide:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: (1,1) y (-3,3)
b) Demostrar que los puntos (-1,2); (3,0); (5,-1) y (-2,-7) pertenecen a la recta obtenida en el inciso anterior.
c) Demostrar que los puntos (-1,2); (3,0) y (5,-1) son colineales.

R.
a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos: (1, 1) (-3, 3) es $x+2y-3=0$
b) Los puntos que pertenecen a la recta son: (-1, 2), (3, 0), (5, -1) y no pertenece a la recta el punto (-2, -7).
c) Los puntos son colineales ya que todas las pendientes entre ellos son iguales.

22. Los lados de un triángulo están dados por las ecuaciones de las rectas siguientes.

$x - 2y + 1 = 0$; $3x - y - 13 = 0$; $2x + y - 13 = 0$. Obtener:

a) Los vértices del triángulo.
b) El área del triángulo.
c) Las ecuaciones de sus medianas.
d) Las ecuaciones de las mediatrices.
e) Las ecuaciones de las alturas.

R.

a) Los vértices del triángulo están en: $A(5,3)$, $B\left(\frac{26}{5},\frac{13}{5}\right)=B(5.2,\,2.6)$

$C\left(\frac{27}{5},\frac{16}{5}\right)=(5.4,3.2)$

b) El área del triángulo mide: $A=\frac{\sqrt{\frac{1}{25}}}{2}=0.1\text{u}^2$.

c) Las ecuaciones de las medianas son:

$5x-26=0,\ x+3y-14=0,\ 4x-3y-12=0$

d) Las ecuaciones de las mediatrices son:

$4x+2y-27=0,\ \ x+3y-14=0\ y\ \ 2x-4y+1=0$

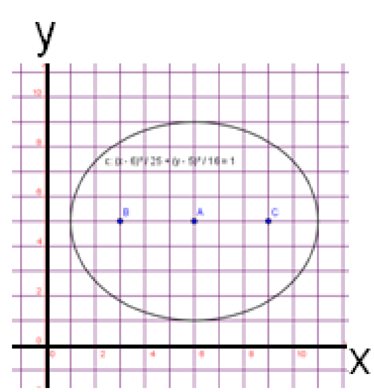
e) Las ecuaciones de las alturas son:

$2x+y-13=0,\ \ x+3y-14=0,\ \ x-2y+1=0$

23. Graficar y encontrar la ecuación de la elipse con centro *C* (6, 5), si la longitud del eje mayor es 10 *u*, y uno de sus focos se encuentra en *F* (3, 5).

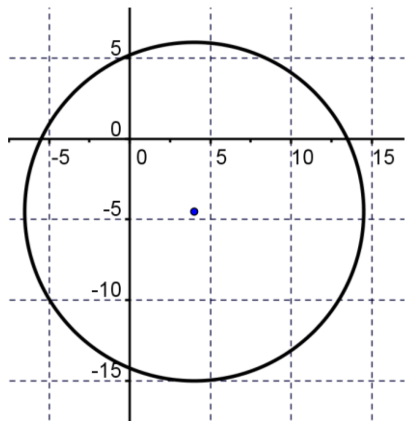
R. La ecuación de la elipse en forma general y ordinaria son:

$16x^2+25y^2-192x-250y+801=0 \qquad \frac{(x-6)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$



24. Escribir la ecuación de la circunferencia $2x^2+2y^2-16x+18y-148=0$ en la forma ordinaria, encontrar las coordenadas del centro, indicar cuánto mide el radio y graficar.

R.



Ecuación de la circunferencia:

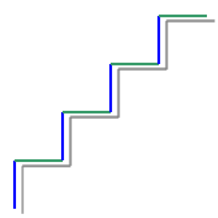
$$(x-4)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{441}{4}$$

Centro $C\left(4,-\frac{9}{2}\right)$, radio $r=\frac{21}{2}$

25. Sea la ecuación $x^2+y^2-6x+4y+k=0$. Determinar el conjunto de valores de *k* para que la ecuación represente: a) Una circunferencia, b) Un punto y c) Ninguna de las anteriores

R. a) $k<13$, b) k = 13, c) k > 13

26. Si se sabe que una escalera con ángulo de inclinación es de 52º y el ancho de cada escalon es de 15cm.¿Qué tan arriba está una persona si sube 5 escalones



R. 96 cm.

27. Obtener la ecuación de la circunferencia en su forma general, que pase por los puntos (2,1), (1,4) y (3,0).

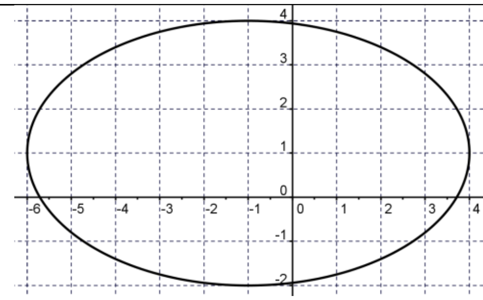
R. $x^2+y^2-12x-8y+27=0$

28. Hallar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a los puntos fijos (3,1) y (-5,1) sea igual a 10, e indicar qué curva representa dicho lugar geométrico.

R.
La ecuación del lugar geométrico es:
$9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$, o

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

representa una elipse horizontal con centro en $C(-1, 1)$



29. Encontrar los puntos de intersección de las circunferencias de radio 2 y centro en (1,2) y (3,3).

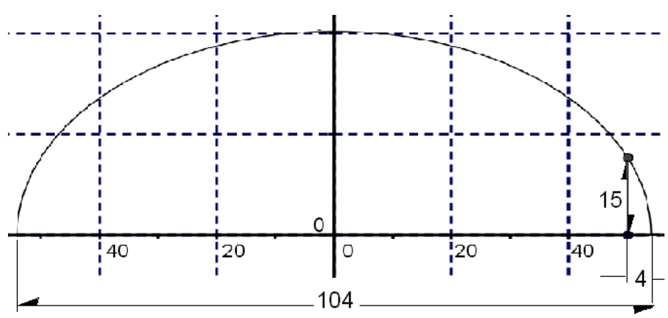
R.

$$\left(2+\sqrt{11/20}\,,\ \frac{5}{2}-\sqrt{11/5}\right) \quad \text{y} \quad \left(2-\sqrt{11/20}\,,\ \frac{5}{2}+\sqrt{11/5}\right)$$

30. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-4, -3)$ y $B(5,10)$ y su centro está sobre la recta de ecuación $3x + y - 5 = 0$

R. $x^2 + y^2 - x - 7y - 50 = 0$

31. Un arco de forma semielíptica abarca un claro de 104 m. Si la altura del arco es de 15 metros a una distancia de 4m medida desde un extremo, ¿cuál es su altura máxima?



R. Altura máxima del arco 39 metros.

32. Para ensayar nuevos dispositivos de seguridad, dos autos de prueba se acercan siguiendo las trayectorias descritas por las rectas $2x - 3y = 0$ y $x + y = 5$. Se prevé que debido a la velocidad a que se aproximan, las partículas resultantes del impacto se desplazarán a 360 *km/hr* del sitio del choque y alcanzarán su máximo alejamiento en línea recta después de ½ segundo.

a) ¿Cuál es el radio en que se esparcen estas partículas? (pendiente)
b) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que encierra la zona afectada por el impacto?

R.

a) El radio en que se esparcen estas partículas es de 3 Km.
b) La ecuación de la circunferencia que encierra la zona afectada por el impacto es: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

33. Determinar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, el lado recto es uno de los diámetros de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 75 = 0$

R. La ecuación de la parábola es: $y^2 = 20x$

34. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, su trayectoria está dada por $S = 30t - 16t^2$ donde *t* es el tiempo en segundos y *S* es la altura sobre el piso. ¿En qué instante golpeará la pelota el piso?

R. La pelota golpeará el piso a los $\frac{15}{8}$ seg.

35. Determinar las ecuaciones de las parábolas en su forma ordinaria con base en los siguientes elementos:

a) *V* (2, 0), *F* (2, 2)
b) *V* (2, 3), *F* (6, 3)
c) Los extremos del lado recto son los puntos (3, 1), (3, 5) y abre a la izquierda.

R. a) $(x-2)^2 = 8y$ b) $(y-3)^2 = 16(x-2)$
c) $(y-3)^2 = -4(x-4)$

36. Encontrar las coordenadas del vértice, foco, y longitud del lado recto de las siguientes parábolas:

a) $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$
b) $x^2 - 12x + 16y + 60 = 0$

R. a) $V(4,4)$, $F\left(4,\frac{5}{2}\right)$, *LR = 6*

b) $V\left(6,-\frac{3}{2}\right)$, $F\left(6,-\frac{11}{2}\right)$, LR = 16

37. Hallar la ecuación de la parábola con eje vertical, que pasa por los puntos: (4, 5), (-2, 11) y (-4, 21).

R. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

38. Por el punto *P* (0, -3) pasa una recta que es tangente a la curva cuya ecuación es $y = x^2$. Determinar las coordenadas del punto de tangencia.

R. $\left(\sqrt{3},3\right)$ o bien $\left(-\sqrt{3},3\right)$

VI. Problemas para Matemáticas IV

1.- En una caja, la longitud del ancho, largo y alto son 1, 2 y 3 dm respectivamente. Si estas tres longitudes se incrementan en la misma cantidad, el volumen de la nueva caja es de 60 dm^3.

a) Determina la ecuación en su forma desarrolla, que sirve para determinar en cuánto se incrementaron las longitudes de la caja.
b) Determina las dimensiones de la nueva caja.

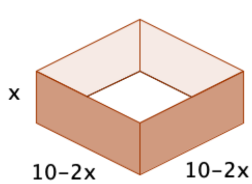
R.

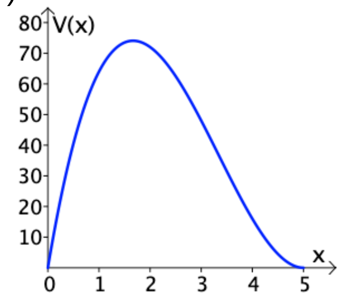
a) $x^3 + 6x^2 + 11x - 54 = 0$

b) Las dimensiones de la nueva caja son 3 dm de ancho, 4 dm de largo y 5 dm de alto.

2.- Se disponen de láminas de acero de calibre 14, las cuales tienen forma de cuadrado cuyo lado mide 10 cm. Con estas láminas se desea construir cajas de base cuadrada y sin tapa, para lo cual, en cada esquina de las láminas se cortarán cuadrados de igual tamaño. Si x representa la longitud del lado de los cuadrados que se recortarán:

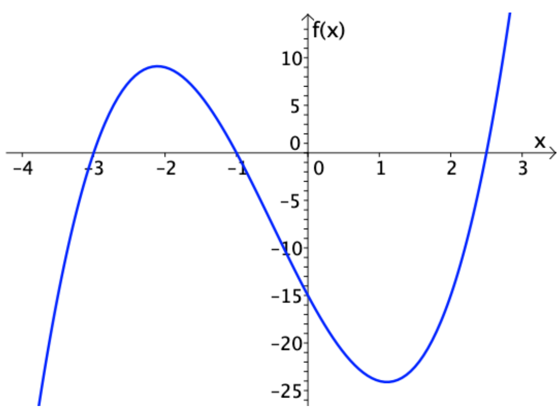
a) Elabora un dibujo que muestre las dimensiones de la caja en función de x.
b) Determina la función polinomial $V(x)$ en su forma desarrollada, que sirve para determinar el volumen de la caja en función de x.
c) Sin utilizar el concepto de derivada, determina de forma exacta, para qué valor de x se obtiene la caja de mayor volumen.
d) Considerando únicamente la función $V(x)$, determina su dominio y su rango.
e) Considerando la función $V(x)$ en el contexto del problema, determina el dominio y el rango de forma exacta.
f) Realiza el bosquejo de la gráfica de $V(x)$, únicamente para los valores que puede tomar x en el contexto del problema.

R. a)  	b) $v(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$	c) $x = \frac{5}{3}$

d)	e)	f)
$D_f = (-\infty, \infty)$ $R_f = (-\infty, \infty)$	$D_f = [0, 5]$ $R_f = [0, 2000/27]$	

3.- A partir de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 14x - 15$, obtener:

a) Los ceros de la función.
b) La función en su forma factorizada.
c) Bosquejo de su gráfica.
d) Dominio y rango.

R. a) $c_1 = \frac{5}{2}$, $c_2 = -1$, $c_3 = -3$	b) $f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x+1)(x+3)$
c) 	d) $D_f = (-\infty, \infty)$ $R_f = (-\infty, \infty)$

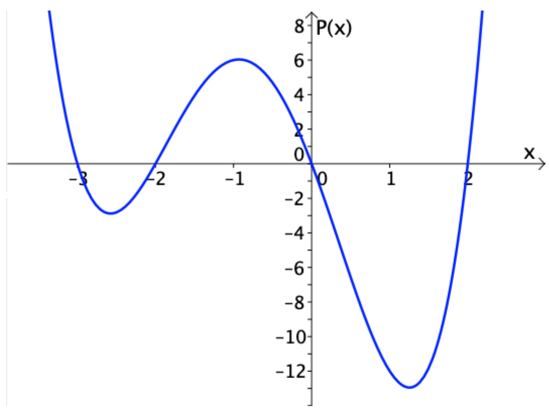
4.- A partir de la función polinomial $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x$, obtener:

a) Los ceros de la función.

b) La función en su forma factorizada.

c) Bosquejo de su gráfica.

d) Dominio y rango (este último de forma aproximada).

<table>
<tr><td>R.
a) $c_1 = 2$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$, $c_4 = -3$</td><td>b) $P(x) = (x-2)(x-0)(x+2)(x+3)$</td></tr>
<tr><td>c)

</td><td>d)
$D_f = (-\infty, \infty)$
$R_f = [-12.95, \infty)$
El rango es aproximado.</td></tr>
</table>

5.- Dada la función polinomial $g(x) = x^4 - Ax^3 - 3x^2 + Bx + 4$, calcular los valores de A y de B, si se sabe que $g(-1) = 0$ y que $x - 2$ es un factor de $g(x)$. Además, escribir a $g(x)$ en su forma factorizada.

R. El valor de A y B son: $A = 2$ y $B = 4$. La función en su forma factorizada es: $g(x) = (x+1)^2(x-2)^2$

6.- Determinar las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $9x^4 + 15x^3 - 143x^2 + 41x + 30 = 0$

b) $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 + x = 0$

R. a) $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = -\frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{2}{3}$ b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_5 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

7.- Determinar la función polinomial en su forma desarrollada, que tiene ceros en: $\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{3}$, 1, -2 y 5, con coeficiente principal igual a -6.

R. $f(x) = -6x^4 + 19x^3 + 92x^2 - 115x - 350$

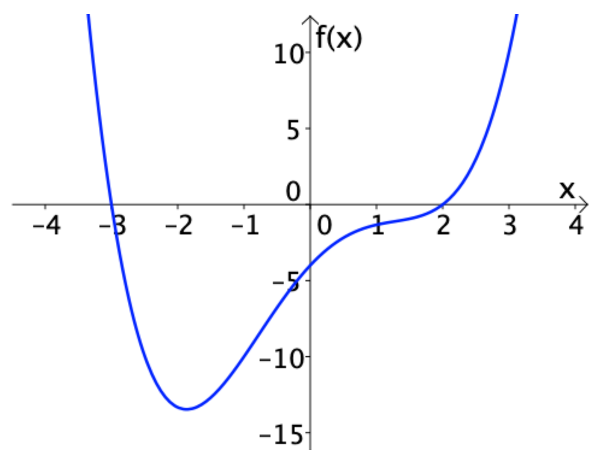
8.- Construir alguna ecuación en su forma desarrollada que tiene por raíces a: $\frac{1}{2}$, 0, $3+i$, 3, 0 y $3-i$.

R. Una posible ecuación es: $2x^6 - 19x^5 + 65x^4 - 88x^3 + 30x^2 = 0$

9.- Determina la función polinomial en su forma desarrollada y realiza su gráfica, si se sabe que tiene ceros en: 2, $1+i$, $1-i$, corta el eje de las abscisas en $x = -3$, y el eje de las ordenadas lo corta en $y = -4$.

R.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7x - 4$$

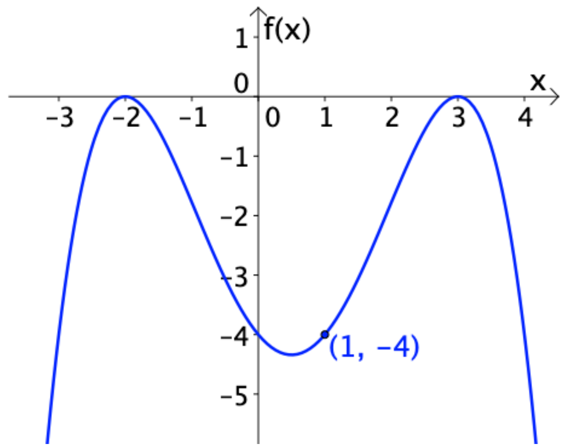


10.- Dada la función $f(x) = -2x^5 + 5x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 11x - 1$, determina $f(-2)$ por:

a) Sustitución.
b) Teorema del residuo con división sintética de polinomios.
c) Teorema del residuo con división larga de polinomios.

R. $f(-2) = \frac{355}{3}$, por cualquiera de los tres métodos.

11.- Determina la función polinomial en su forma desarrollada, si su gráfica es la que se muestra a continuación:



R. $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + \frac{11}{9}x^2 - \frac{4}{3}x - 4$

12.- A partir de la siguiente función: $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1)(2x^2 - 3x - 9)$, determinar las raíces de la ecuación que resulta al hacer $f(x) = 0$.

R. Las raíces son 2, -2, i, $-i$, 3 y $-3/2$.

13.- Se desea doblar un alambre para formar un rectángulo que encierre un área de 6 m^2. Si se representa con L a la longitud del alambre y con x a la longitud de uno de los lados del rectángulo formado:

a) Determinar la función que sirve para determinar la longitud del alambre L en función de x.

Sin hacer uso del concepto de derivada:

b) Considerando únicamente la función $L(x)$, determina en forma exacta su dominio y su rango.

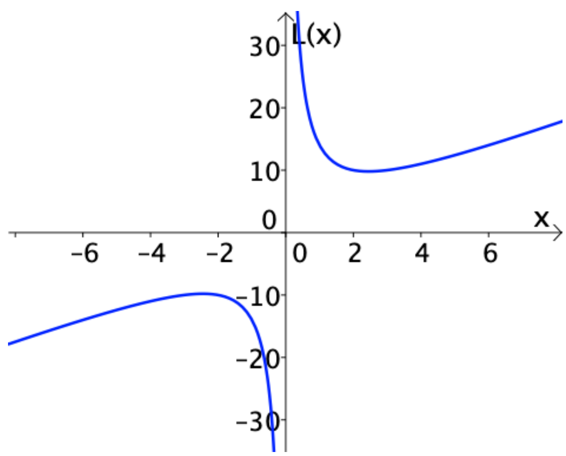
c) Considerando la función $L(x)$ en el contexto del problema, determina en forma exacta su dominio y su rango.

d) Determina de forma exacta, las dimensiones del rectángulo que utiliza la menor cantidad de alambre.

e) Realiza el bosquejo de la gráfica de $L(x)$.

R. a) $$L(x) = \frac{2x^2 + 12}{x}$$	b) $$D_f = (-\infty, \infty) - \{0\}$$ $$R_f = \left(-\infty, -4\sqrt{6}\right] U [4\sqrt{6}, \infty)$$
c) $$D_f = (0, \infty)$$ $$R_f = [4\sqrt{6}, \infty)$$	d) Es un cuadrado de lado igual a $\sqrt{6}$.

a)



14.- En una semicircunferencia cuyo diámetro tiene 10 centímetros de longitud, se pueden inscribir rectángulos de tal forma que uno de sus lados esté sobre el diámetro de la semicircunferencia. Si representamos con A al área del rectángulo y con x a la longitud del lado sobre el diámetro:

a) Determinar la función que sirve para determinar el área A del rectángulo en función de x.

b) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que tiene un área de 24 cm^2?

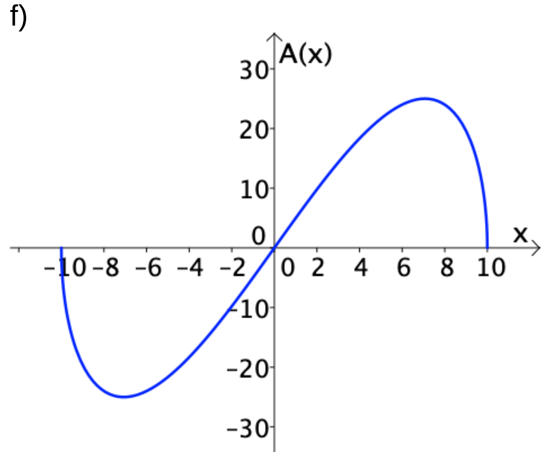
Sin hacer uso del concepto de derivada:

c) Considerando únicamente la función $A(x)$, determina en forma exacta su dominio y su rango.

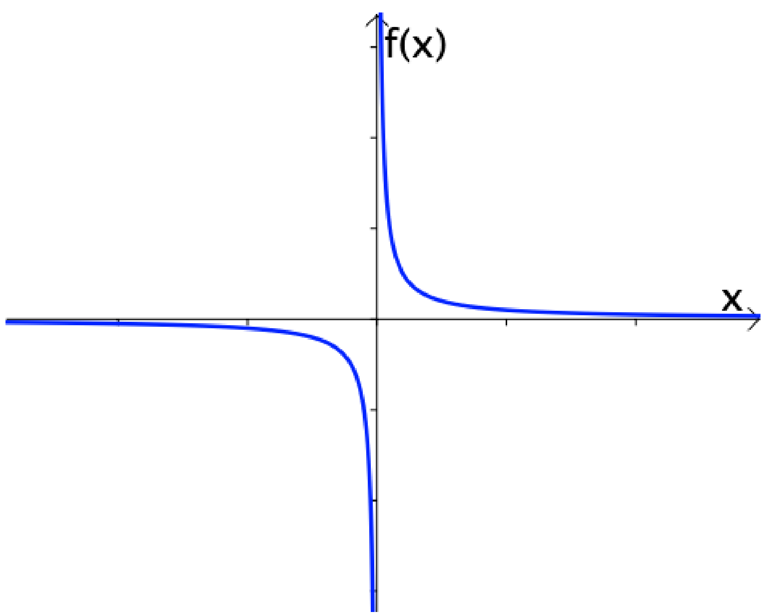
d) Considerando la función $A(x)$ en el contexto del problema, determina en forma exacta su dominio y su rango.

e) Determina de forma exacta, las dimensiones del rectángulo de mayor área.

f) Realiza un bosquejo de la gráfica de $A(x)$ en el contexto del problema.

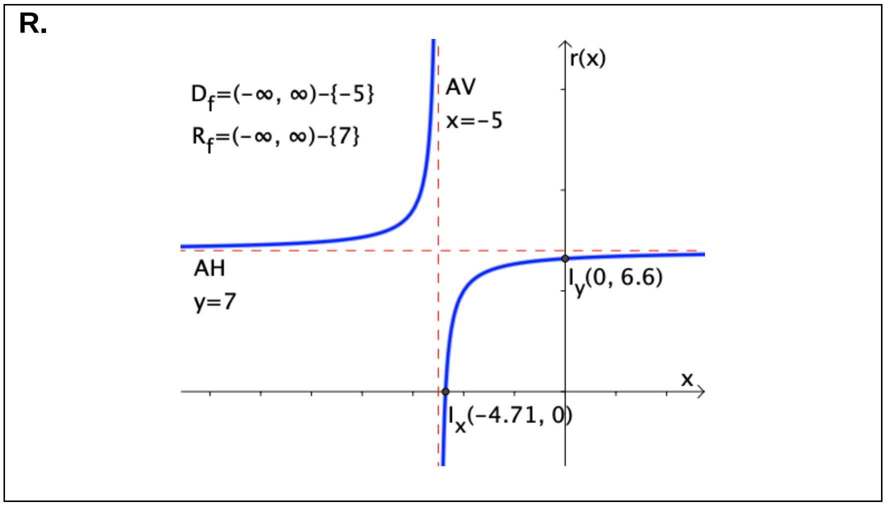
R. a) $$A(x) = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$$	b) Hay dos soluciones, puede ser un rectángulo de 8 por 3 cm, o uno de 6 por 4 cm.
c) $$D_f = [-10, 10]$$ $$R_f = [-25, 25]$$	d) $$D_f = [0, 10]$$ $$R_f = [0, 25]$$
e) Es un rectángulo de dimensiones: $5\sqrt{2}$ por $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.	f) 

15.- Considera la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que se muestra a continuación:



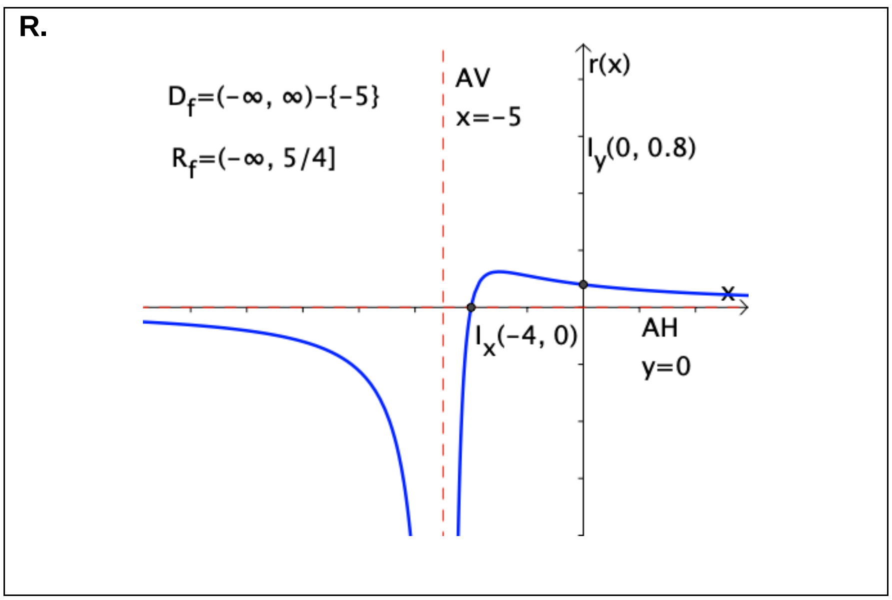
Utilizando los desplazamientos horizontal y vertical, la amplificación o compresión vertical, así como la inversión con respecto a la horizontal, realiza el bosquejo de la gráfica de la función $r(x) = \frac{7x+33}{x+5}$, indicando sus asíntotas con sus respectivas ecuaciones, intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados con sus respectivas coordenadas, así como el dominio y el rango.

R.



16.- Realizar el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{5x+20}{x^2+10x+25}$, indicando sus asíntotas con sus respectivas ecuaciones, intersecciones de la gráfica con los ejes coordenados con sus respectivas coordenadas, así como el dominio y el rango, este último de forma exacta y sin utilizar el concepto de derivada.

R.



17.- Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$, determinar:

a) El dominio de la función.
b) El rango de la función.
c) Las ecuaciones de todas las asíntotas.
d) El bosquejo de su gráfica.

R.

a)

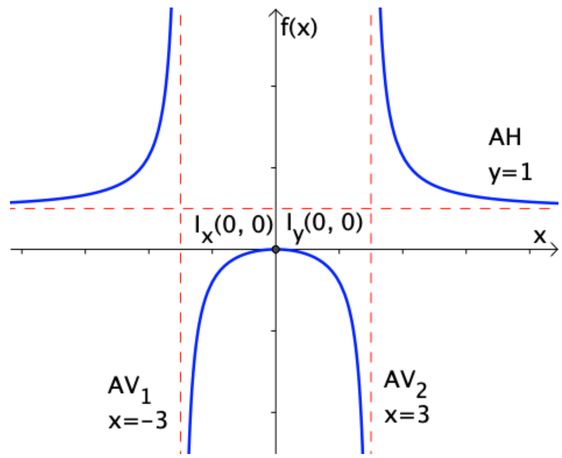
$$D_f = (-\infty, \infty) - \{-3, 3\}$$

b)

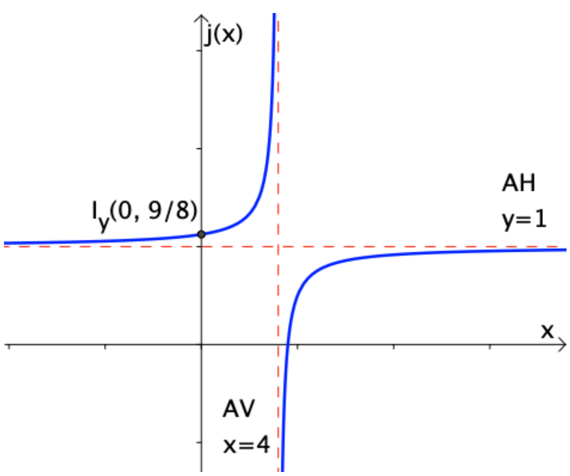
$$R_f = (-\infty, 0]U(1, \infty)$$

c)
Asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$.
Asíntota horizontal en $y = 1$.

d)



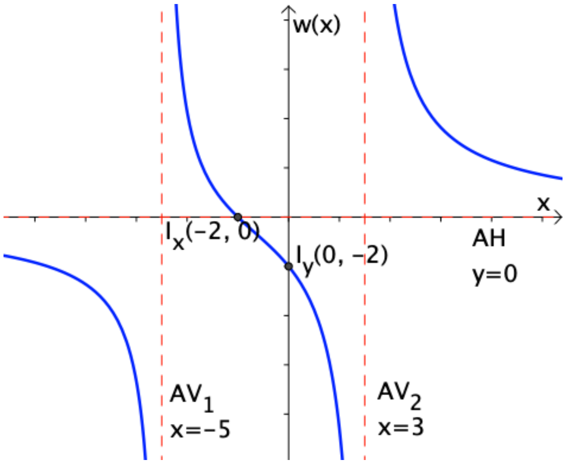
18.- ¿Cuál es la función racional cuya gráfica se muestra a continuación?



R.

$$j(x) = \frac{9-2x}{8-2x}$$

19.- ¿Cuál es la función racional cuya gráfica se muestra a continuación?

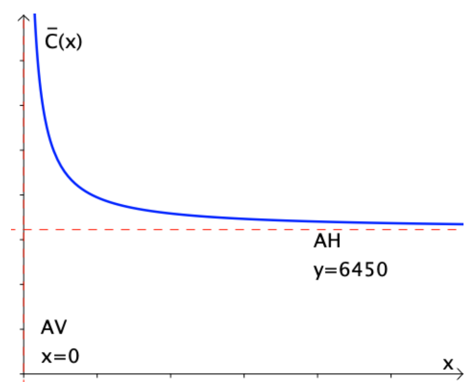


R.

$$w(x) = \frac{15x + 30}{x^2 + 2x - 15}$$

20.- El costo C, en miles de pesos, por producir x toneladas de azúcar refinada en un ingenio azucarero, puede representarse con la función $C(x) = 14400 + 6450x$. Esta función considera un gasto fijo inicial por operación de maquinaria, equipo y herramienta, más gastos de administración, por $14,400 y un costo de $6,450 por producir cada tonelada de azúcar.

a) Expresar como función de x el costo promedio $\overline{C}$ para producir una tonelada de azúcar.
b) Elabora un bosquejo de la gráfica del costo promedio.
c) Hallar el costo promedio por tonelada cuando el ingenio alcanza una producción de 70, 120 y 140 toneladas de azúcar.

<table>
<tr>
<td>R.
a)
$\overline{C}(x) = \frac{14400 + 6450x}{x}$</td>
<td></td>
<td>b)

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">c)
El costo promedio por producir 70 toneladas es de $6655.71.
El costo promedio por producir 120 toneladas es de $6570.
El costo promedio por producir 140 toneladas es de $6552.86.</td>
</tr>
</table>

21.- En Los Cabos, B.C. el comportamiento de la ocupación hotelera de enero a octubre se puede modelar con la función $h(x) = \frac{70000}{2x^2-8x+10}$, en donde $x = 0$ corresponde al mes de enero, $x = 1$ al mes de febrero y así sucesivamente hasta llegar al mes de diciembre.

a) ¿Cuál fue la ocupación durante los meses de enero y febrero?
b) ¿En qué mes se obtuvo la máxima demanda de habitaciones y cuántas fueron?
c) ¿Cuáles son los meses en que se ocupan más de 10 000 habitaciones?

R.
a) En enero se ocuparon 7000 habitaciones y en febrero se ocuparon 17500.

b) En el mes de marzo se presentó la mayor demanda con 35000 habitaciones ocupadas.

c) Sólo en los meses de febrero, marzo y abril se ocuparon más de 10000 habitaciones.

22.- El costo $C(p)$ en millones de dólares, por remover p% de contaminantes que se descargan en un río se puede estimar con la función: $C(p) = \frac{255p}{100-p}$.

a) Obtener el dominio de la función con las restricciones del problema.
b) Encontrar el costo de remover 40% de los contaminantes.
c) Hallar el costo de remover 75% de los contaminantes
d) De acuerdo a este modelo, ¿sería posible remover el 100% de los contaminantes?

R.
a) $D_c = [0, 100)$

b) El costo de remover el 40% de los contaminantes es de 170 millones de dólares.

c) El costo de remover el 75% de los contaminantes es de 765 millones de dólares

d) No, ya que la función no está definida para $p = 100$.

23.- Una línea aérea ofrece vuelos diarios entre dos ciudades. El costo mensual de estos vuelos es: $C(x)=\sqrt{2x-1}$, en donde C se mide en millones de pesos y x en miles de pasajeros.

a) Determinar el dominio y el rango de la función.

b) Identificar cuál es el mínimo de pasajeros necesarios para que el modelo tenga sentido.

c) Si el costo total de los vuelos para un determinado mes es de 2.5 millones de pesos, ¿cuántos pasajeros viajaron ese mes?

R. a) $D_c=[0.5,\infty)$ $\quad R_c=[0,\infty)$ b) El número mínimo de pasajeros para que el modelo tenga sentido en 500. c) En ese mes viajaron 3625 pasajeros.

24.- La función $p(x)=30-\sqrt{0.001x-1}$ representa el precio por unidad de un determinado producto, en donde x es el número de unidades demandadas.

a) ¿Cuál es el mínimo de unidades demandadas de acuerdo al modelo?

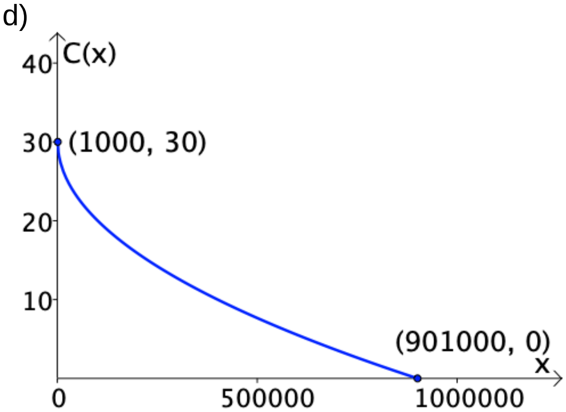
b) ¿Cuál es el máximo de unidades demandadas para que el modelo tenga sentido?

c) El contexto del problema, ¿cuál es el dominio y el rango?

d) Realiza el bosquejo de la gráfica en el contexto del problema.

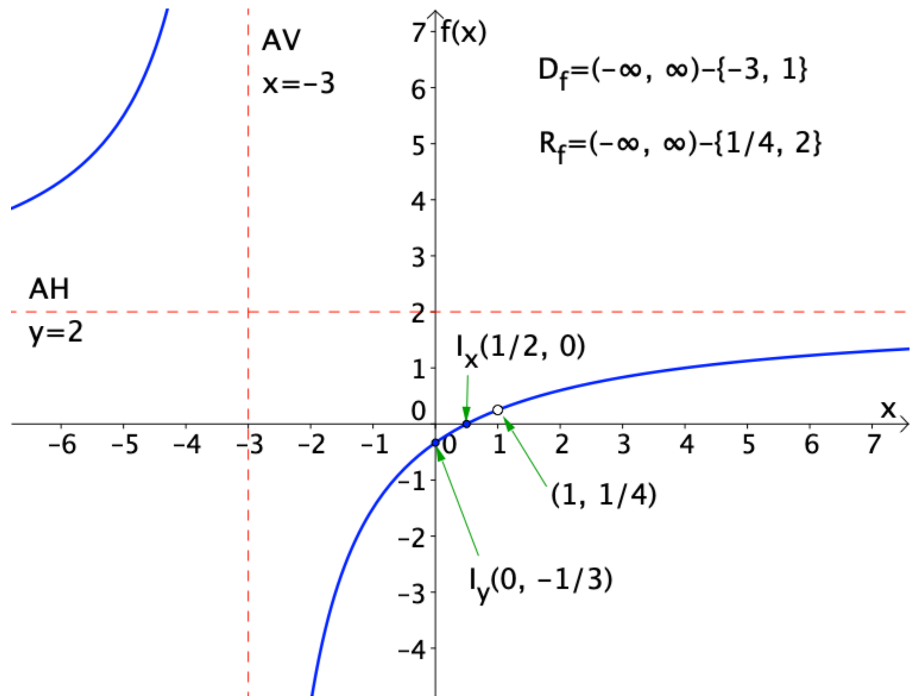
<table>
<tr><td>R.
a) El número mínimo de unidades es de 1000.</td><td>b) El número máximo de unidades es 901000.</td></tr>
<tr><td>c)

$D_c=[1000,901000]$

$R_c=[0,30]$</td><td>d)

</td></tr>
</table>

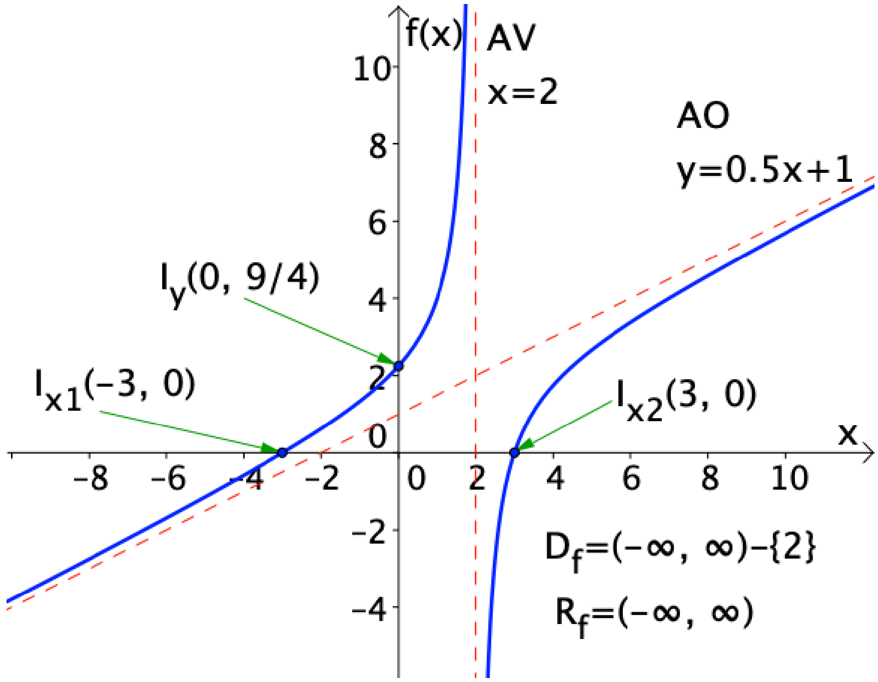
25.- Sea la función $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$, realizar el bosquejo se su gráfica, indicando las asíntotas con sus respectivas ecuaciones, intersección con los ejes coordenados con sus respectivas coordenadas, puntos de discontinuidad (huecos) con sus respectivas coordenadas, así como el dominio y rango.

R.



26.- Sea la función $f(x) = \frac{x^2-9}{2x-4}$, realizar el bosquejo se su gráfica, indicando las asíntotas con sus respectivas ecuaciones, intersección con los ejes coordenados con sus respectivas coordenadas, puntos de discontinuidad (huecos) con sus respectivas coordenadas, así como el dominio y rango.

R.



27.- Para cada una de las siguientes funciones, determinar el dominio, el rango y hacer un bosquejo de su gráfica.

a) $w(x) = -\sqrt{64 - 4x^2}$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 21}$

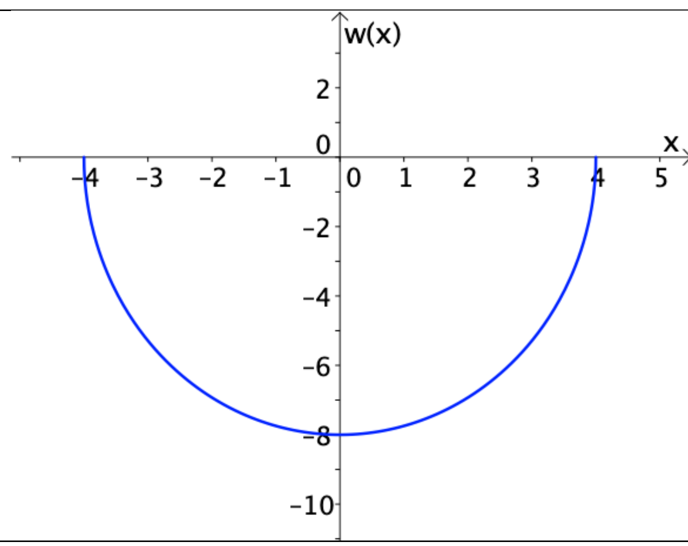
c) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

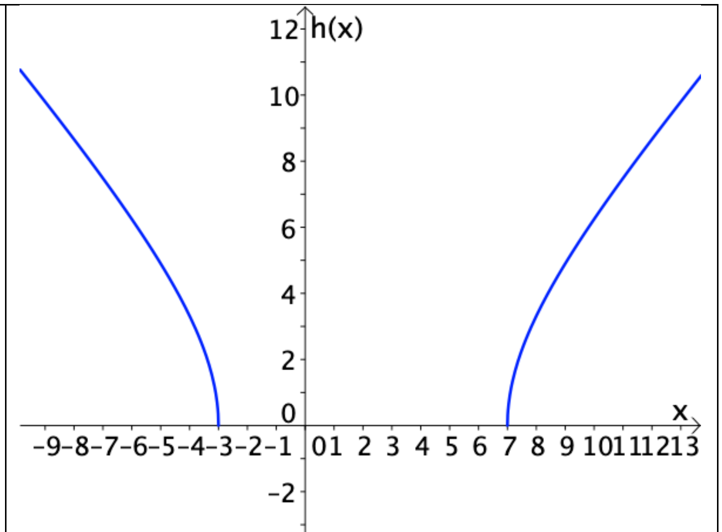
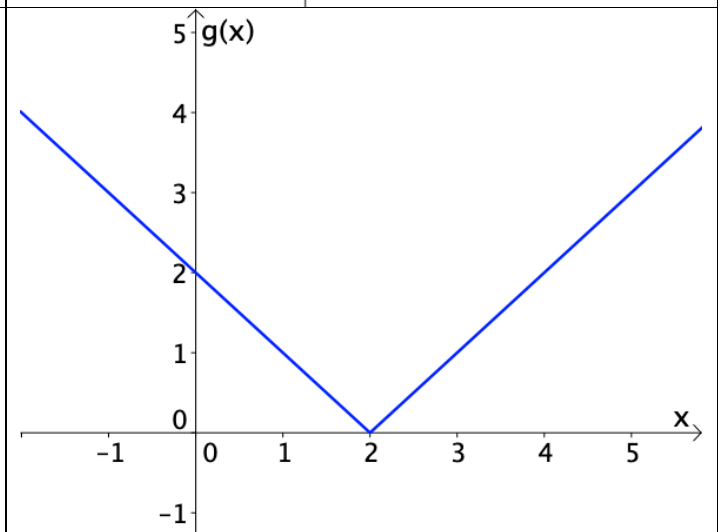
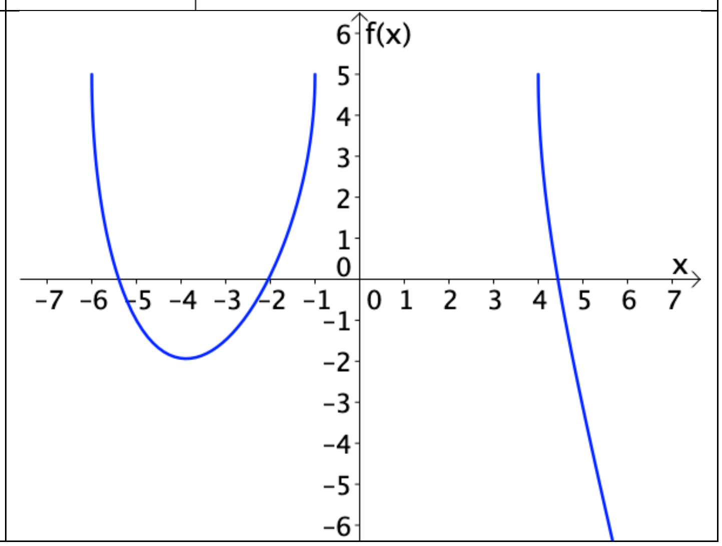
d) $f(x) = -\sqrt{x^3 + 3x^2 - 22x - 24} + 5$

R.

$D_w = [-4, 4]$

$R_c = [-8, 0]$



$D_h =$ $(-\infty, -3] U [7, \infty)$ $R_h = [0, \infty)$	
$D_g = (-\infty, \infty)$ $R_g = [0, \infty)$	
$D_f =$ $[-6, 1] U [4, \infty)$ $R_f = (-\infty, 5]$	

28. Obtener la función inversa de $y = 2^x$, y la gráfica de ambas funciones, así como el dominio y el rango.

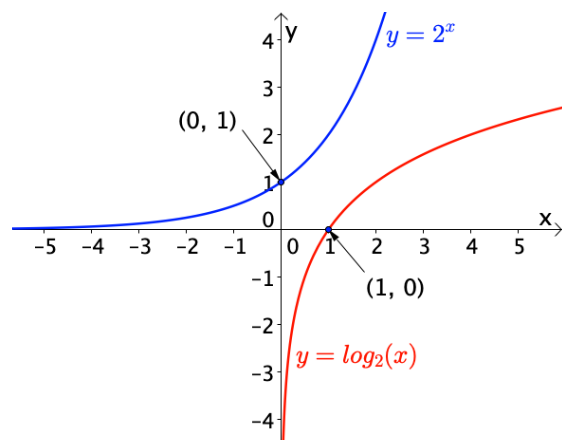
R.
La función inversa es $y = log_2(x)$

Para $y = 2^x$:

$D_f = (-\infty, \infty) \quad R_f = (0, \infty)$

Para $y = log_2(x)$:

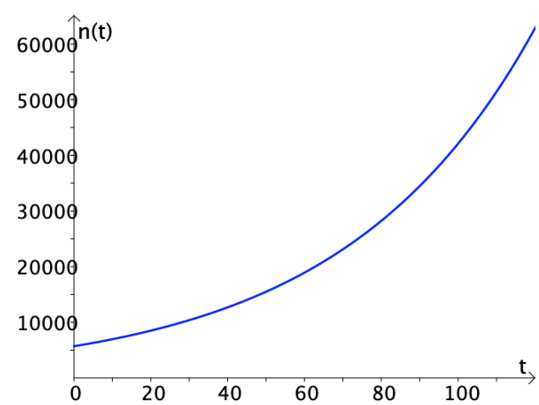
$D_f = (0, \infty) \quad R_f = (-\infty, \infty)$



29.- Si n_o es el tamaño inicial de la población mundial en el año t entonces la población $n(t)$ está representada por $n(t) = n_o e^{rt}$, en donde r es la tasa de crecimiento relativo expresada como una función de la población. Si la población mundial en 1995 era de 5700 millones de habitantes y la tasa de crecimiento relativa estimada era del 2% anual ¿en qué año se alcanzan 57 000 millones de habitantes, si continúa creciendo al mismo ritmo? (dar el año entero en que se cumpla) Bosquejar su gráfica.

R.

Se alcanzan los 57000 millones de habitantes en los años 2111.



30. Un cultivo se inicia con 10000 bacterias y su número se duplica cada 40 minutos y el crecimiento de la población está determinado por $n(t) = n_o e^{rt}$

a) Obtener una función para determinar el número de bacterias en el tiempo *t*.

b) Determinar el número de bacterias, transcurrida una hora.

c) ¿A los cuántos minutos habrá 50 000 bacterias?

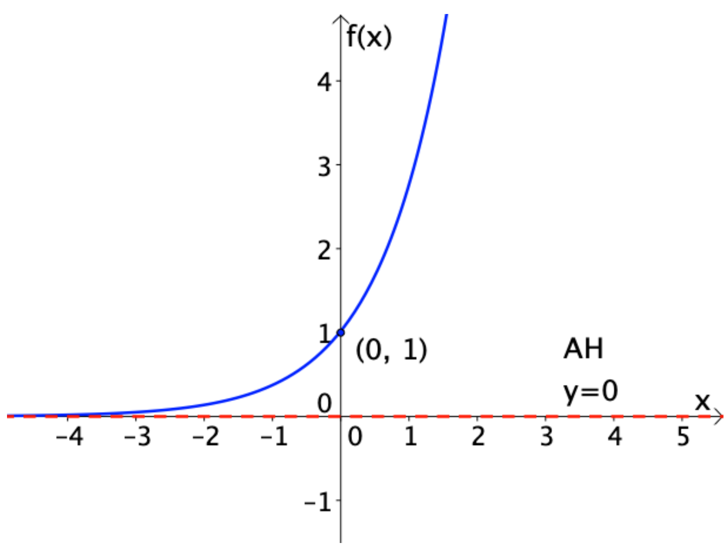
R.

a) $n(t) = 10000e^{(\ln(2)/40)t}$

b) En una hora habrá 28284 bacterias.

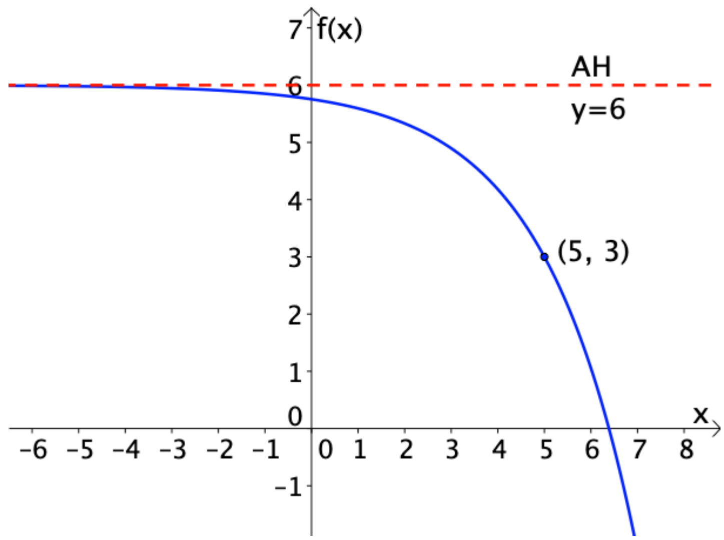
c) A los 92.88 minutos habrá 50000 bacterias.

31.-Considera la gráfica de la función $f(x) = e^x$, que se muestra abajo y, utilizando desplazamientos horizontales y verticales, así como amplificación o compresión ya sea horizontal o vertical, e inclusive inversión con respecto a la horizontal o vertical:

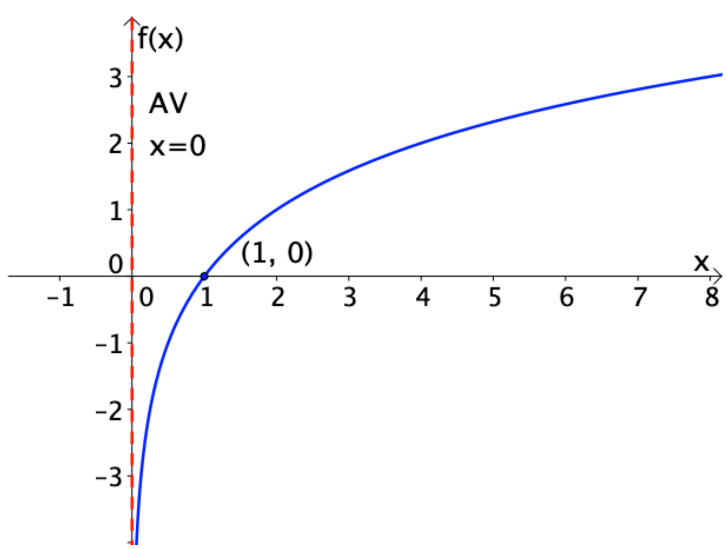


a) Realiza el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = -3e^{0.5(x-5)} + 6$, indicando su asíntota y su punto de referencia.

b) Indica su dominio y rango de la función.

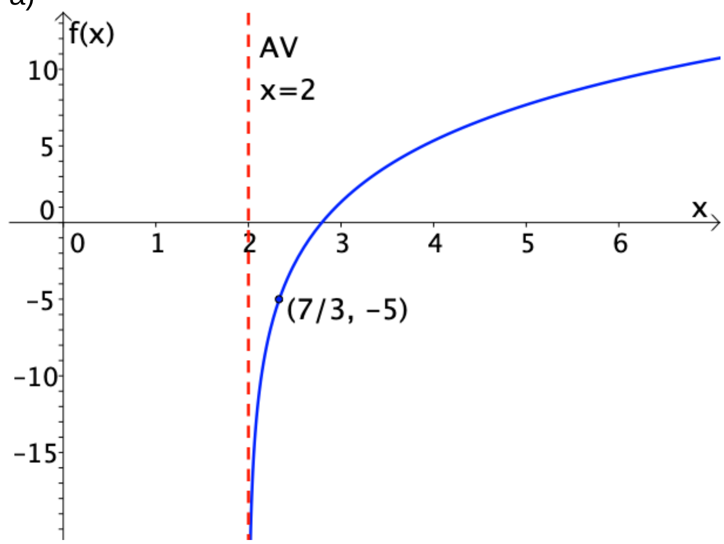
<table>
<tr>
<td>R.
a)
</td>
<td>b)
$D_f = (-\infty, \infty)$
$R_f = (-\infty, 6)$</td>
</tr>
</table>

32.- Considera la gráfica de la función $f(x) = log_2(x)$, que se muestra abajo y, utilizando desplazamientos horizontales y verticales, así como amplificación o compresión ya sea horizontal o vertical, e inclusive inversión con respecto a la horizontal o vertical:



a) Realiza el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = 4log_2(3x-6)-5$, indicando su asíntota y su punto de referencia.

b) Indica su dominio y rango de la función.

R. a)  	b) $D_f = (2, \infty)$ $R_f = (-\infty, \infty)$

33.- Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $9^{2-5x} = 3^{-1}$

b) $e^{-2x} - 4e^{-x} + 3 = 0$

c) $\log(5x-1) - \log(x-3) = 2$

d) $ln(e^{5x-3}) = 12$

R. a) $x = \frac{1}{2}$	b) $x_1 = 0$ $x_2 = \ln(1/3)$
c) $x = \frac{299}{95}$	d) $x = 3$

34.- En cierto lugar se encontró un fósil que contiene 74% del Carbono 14. Si sabemos que el decaimiento radiactivo de este elemento está dado por $N(t) = N_o e^{-kt}$, y para el carbono 14, $k = 0.001216$. ¿Cuál es la antigüedad del fósil?

R. El fósil tiene aproximadamente 248 años de antigüedad.

35.- Una sustancia radiactiva decae exponencialmente hasta la mitad de su cantidad inicial, a los 350 años. Determina el valor de k en la expresión $N(t) = N_o e^{-kt}$, siendo N la cantidad presente de la sustancia después de t años y N_o la cantidad de sustancia inicial.

R. $k = \frac{\ln(2)}{350}$

36.- Una persona pide un préstamo de $35,000 a un interés compuesto anual de 13.5% y lo pagará en cuatro años, liquidándolo al final. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

R. $58083.33

37.- Si el ruido que produce dolor en el oído es de 10^{14} veces I_o. La intensidad M del sonido, medida en decibeles (dB), está dada por $M = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$, en donde I es la potencia del sonido e I_o es la potencia mínima que puede percibir el oído humano. ¿Cuál será su intensidad en decibeles del ruido que produce dolor?

R. La intensidad del ruido que produce dolor es de 140 dB.

38.- El Yodo radiactivo se usa regularmente como trazador para realizar estudios de la glándula tiroides. Si la sustancia decrece de acuerdo a $A(t) = A_o \cdot 0.5^{0.125t}$, siendo A_o la dosis inicial y t el tiempo en días, ¿cuánto tiempo tardará para que la cantidad de Yodo sea sólo la mitad de la dosis suministrada? y ¿cuánto tiempo tardará para que sólo reste una tercera parte?

R. En 8 días restará la mitad de la dosis suministrada y, antes de que concluya el día 13, sólo restará la tercera parte.

39.- Cierta sustancia radiactiva tiene vida media de 8 días, esto significa que a los 8 días la sustancia radiactiva será la mitad de la inicial. Si se sabe que $N(t) = N_o e^{-kt}$, siendo N la cantidad presente de la sustancia después de t años y N_o la sustancia inicial. ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial quedará después de 35 días?

R. Restará el 4.8194% de la sustancia inicial.

40.- Demostrar las propiedades de los logaritmos y la "fórmula" para cambio de base.

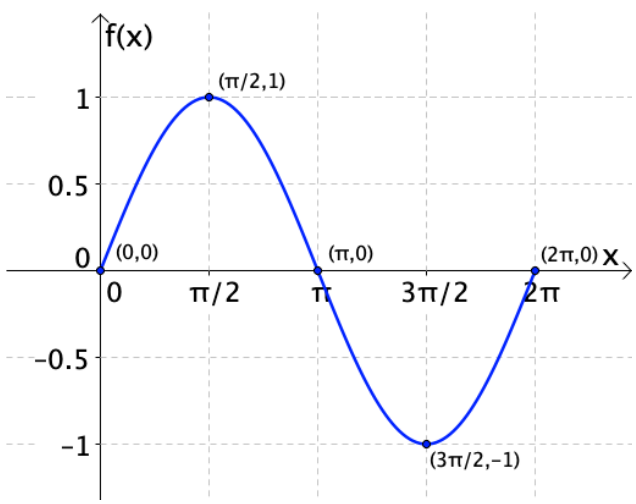
a) $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

b) $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$

c) $log_a(x^b) = b \cdot log_a(x)$

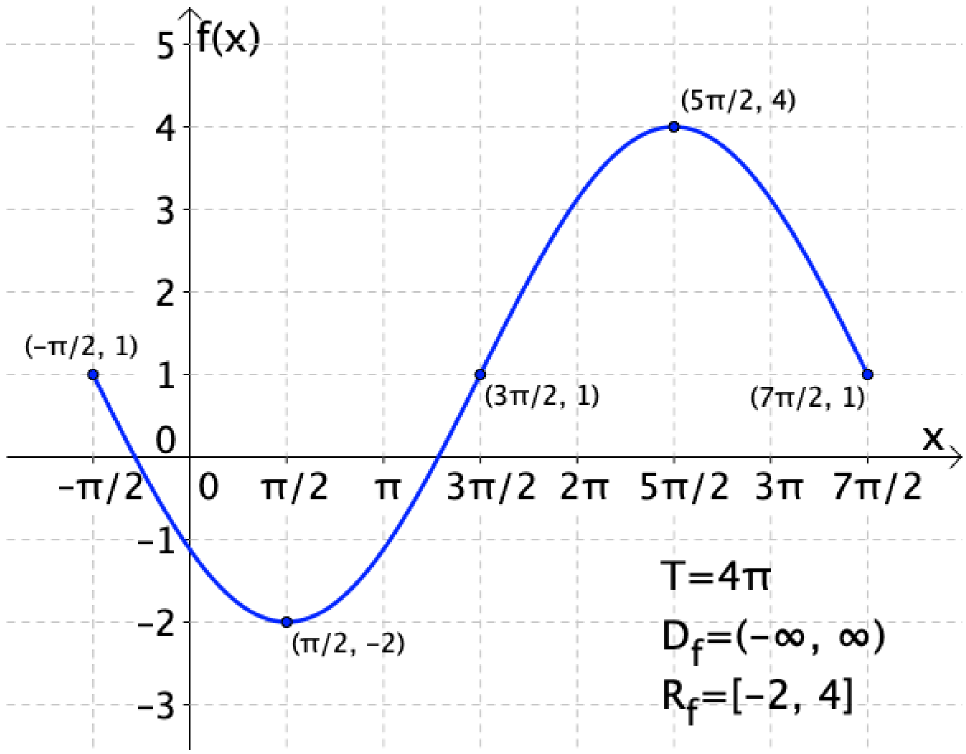
d) $log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$

41.- Tomando como referencia la parte de la gráfica de la función seno que se muestra abajo, y utilizando desplazamientos horizontales y verticales, amplificación o comprensión, ya sea vertical y horizontal, además de inversión con respecto a la horizontal:

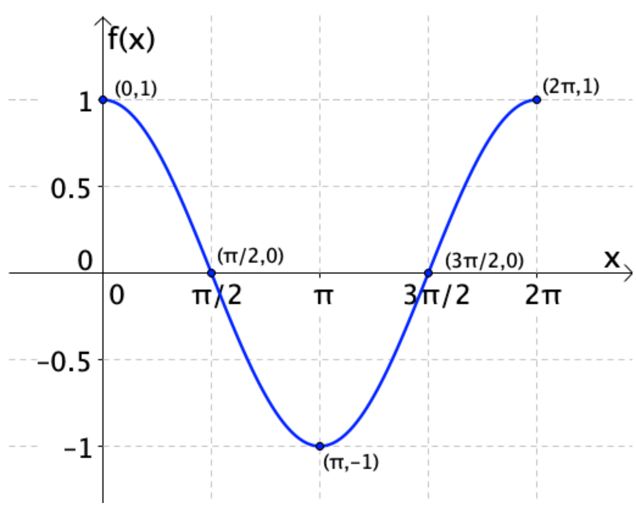


Realiza el bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3sen\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$, indicando su periodo, dominio, rango y coordenadas de los cinco puntos de referencia.

R.

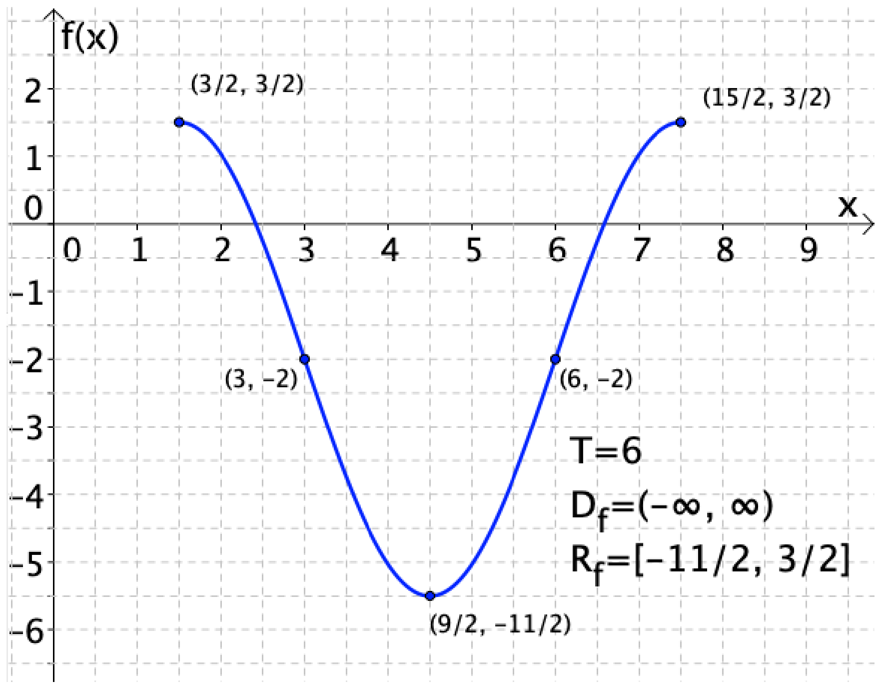


42.- Tomando como referencia la parte de la gráfica de la función coseno que se muestra abajo, y utilizando desplazamientos horizontales y verticales, amplificación o comprensión, ya sea vertical y horizontal, además de inversión con respecto a la horizontal:

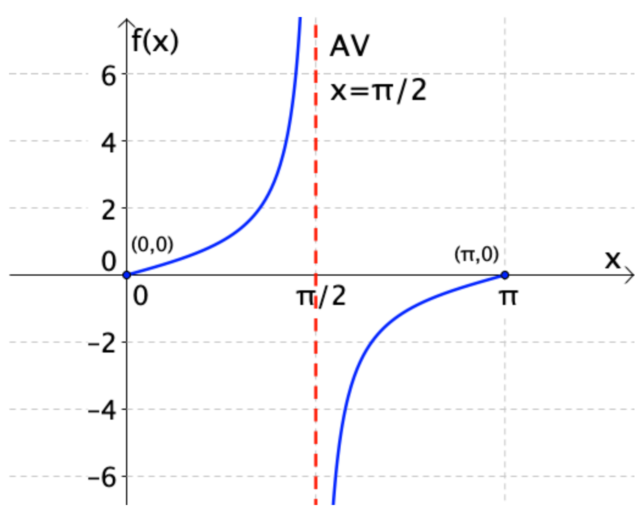


Realiza el bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = \frac{7}{2}cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$, indicando su periodo, dominio, rango y coordenadas de los cinco puntos de referencia.

R.

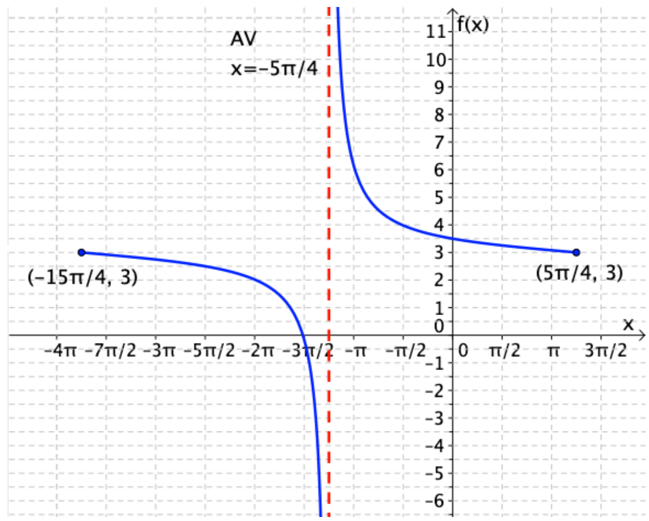


43.- Tomando como referencia la parte de la gráfica de la función tangente que se muestra abajo, y utilizando desplazamientos horizontales y verticales, amplificación o comprensión, ya sea vertical y horizontal, además de inversión con respecto a la horizontal:



Realiza el bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -\frac{1}{2}tan\left(\frac{1}{5}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 3$, indicando su periodo, dominio, rango, asíntota y coordenadas de los dos puntos de referencia.

R.

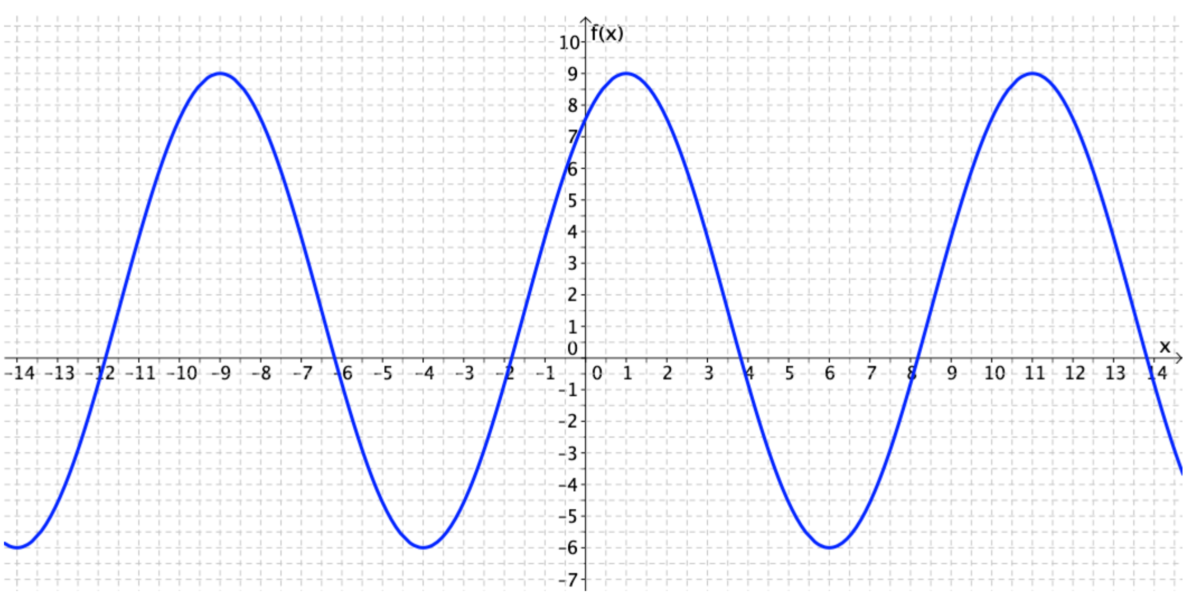


$$T = 5\pi$$

$$D_f = (-\infty, \infty) - \left\{-\frac{5\pi}{4} + 5\pi n; n \epsilon Z\right\}$$

$$R_f = (-\infty, \infty)$$

44.- Propón alguna función trigonométrica; seno positivo, seno negativo, coseno positivo y coseno negativo, con la cual se obtenga la gráfica mostrada a continuación:



R.

$$f(x)=\frac{15}{2}sen\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{3\pi}{10}\right)+\frac{3}{2}$$

$$f(x)=-\frac{15}{2}sen\left(\frac{\pi}{5}x-\frac{7\pi}{10}\right)+\frac{3}{2}$$

$$f(x)=\frac{15}{2}cos\left(\frac{\pi}{5}x-\frac{\pi}{5}\right)+\frac{3}{2}$$

$$f(x)=-\frac{15}{2}cos\left(\frac{\pi}{5}x-\frac{6\pi}{5}\right)+\frac{3}{2}$$

45.- La nota La que está arriba del Do central tiene una frecuencia de 440 Hz. Si la intensidad I del sonido a cierto punto, t segundos después de que se origina el sonido se describe mediante la ecuación $I(t)=0.08sen(880\pi t)$. Calcular el mínimo valor positivo de t, de manera que $I\ =\ 0.05$.

R.

$$t\ =\frac{sen^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)}{880\pi}\ =\ 0.0002686263$$

46.- Suponiendo que la presión sanguínea de una persona oscila entre 120 y 70. Si el corazón late una vez cada segundo, escribir una función seno que represente la presión sanguínea de esta persona.

R. $P(t)=25sen(2\pi t)+95$

47.- En algunas regiones del planeta, en determinadas épocas del año, la temperatura se puede aproximar mediante una función seno o coseno. Si durante el transcurso de un día (24 horas), la temperatura mínima se presenta a las 4:00 AM y es de 5ºC, mientras que la temperatura máxima se da a las 4 de la tarde y es de 28ºC.

a) Determina alguna función que sirva para modelar la temperatura en función del tiempo.
b) ¿A qué hora se tendrá una temperatura de 20ºC?

R.

a) $T(t) = -11.5\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}\right) + 16.5$

b) Aproximadamente a las 11:11AM y a las 8:50PM se tendrá una temperatura de 20ºC.

48.- En nuestro país, el voltaje que hay en cualquier contacto eléctrico de uso residencial de 120 volts, se aproxima mediante la función $V(t) = 180sen(120\pi t)$.

a) Investiga qué establece la ley de Ohm y determina cuál es la función que describe la corriente eléctrica que circula por una plancha de ropa, la cual tiene una resistencia de 30 ohm.
b) ¿Cuántos ciclos completos de la corriente eléctrica se presentan durante 10 segundos?

R.

a) $I(t) = 6sen(120\pi t)$

b) 600 ciclos.

Bibliografía:

- BARNETT, Raymond, et al., Álgebra, Mc. Graw – Hill Interamericana, México, 2000.
- FILLOY, E. Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1997.
- FULLER, Tarwater, Geometría Analítica, Adisson Wesley Iberoamericana, México, 1988.
- GOBRAN, Alfonso. Álgebra Elemental. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1990.
- GÓMEZ, Guillermo, et al., Matemáticas III, Trillas, México, 2008.
- GUZMÁN, Herrera Abelardo, Cien problemas de Geometría Analítica, Publicaciones Cultural, México, 1987.
- KINDLE, Joseph H., Geometría Analítica, Ed. McGraw-Hill, 1991.
- LARSON, Ronald y HOSTETLER, Robert. Álgebra. Publicaciones Cultural, México, 1996.
- LEHMAN, Geometría Analítica, Limusa, México, 1982.
- LEITHOLD, Louis. Álgebra y Trigonometría: con Geometría Analítica. Harla, México, 1994.
- MILLER, Charles. et al. Matemáticas: Razonamiento y Aplicaciones. Addison Wesley Longman, 1999.
- MORALES, Heriberto, et al., Matemáticas IV, Trillas, México, 2000.
- POLYA, G. Cómo Plantear y Resolver Problemas. Trillas, México, 1965.
- ROSS, M. Middlemiss, John L. Marks, James R. Smart, Geometría Analítica, Ed. McGraw-Hill, 1979.
- SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. Iberoamérica, México, 1997.
- SMITH, Stanley et al. Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Addison Wesley Longman, México, 1998.
- SULLIVAN, Michael. Precálculo. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1997.
- SWOKOWSKI, Earl y COLE, Jeffery. Álgebra y Trigonometría. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1996.
- TORRES C, Geometría Analítica, Santillana, México, 1998.