



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
ESCUELA NACIONAL  
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DIRECCIÓN GENERAL  
SECRETARÍA ACADÉMICA**



**Área de Matemáticas**

**GUÍA PARA EL EXAMEN DE CONOCIMIENTOS Y  
HABILIDADES DISCIPLINARIAS  
Promoción XXXIX**

**Cálculo Diferencial e Integral I-II**

**Noviembre de 2017**



## INTRODUCCIÓN

En esta guía se presentan diversos problemas de Cálculo Diferencial e Integral, algunos de ellos resueltos. En las soluciones se muestran estrategias para modelarlos y resolverlos. Algunos son sólo ejercicios, en los cuales se desarrollan algoritmos para llegar a su solución. También se presenta un listado de problemas no resueltos para que te ejercites y compruebes su solución.

### OBJETIVOS

El objetivo de esta guía es mostrar como “atacar” un problema, la manera de presentarlo, redactarlo de una manera sencilla, lógica y proporcionarte algunas ideas para enfrentar los problemas que contiene el examen.

### MODO DE USO DE LA GUÍA

Estudia los temas ligados a los problemas que se proporcionan y resuelve los problemas de esta guía apoyándote en la bibliografía.

### ACERCA DEL EXAMEN

El examen estará integrado por problemas similares a los presentados en esta guía y, para acreditarlo se deberá responder correctamente por lo menos el 80% de ellos. La calificación mínima requerida es ocho.

### ASPECTOS PRINCIPALES QUE SE TOMARÁN EN CUENTA PARA TU EVALUACIÓN

#### a) CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Definición de conceptos.
- Representación de conceptos matemáticos usando esquemas, diagramas, símbolos, etc.
- Reconocer, transitar y manejar las diversas representaciones de un concepto: tabular, gráfica, analítica y verbal
- Utilización de diversas interpretaciones de un concepto
- Reconocer y aplicar propiedades de un concepto

#### b) CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

##### Resolución de problemas

- Desarrollo y aplicación de estrategias para la resolución de problemas de Cálculo
- Construir modelos matemáticos, generalizando comportamientos e identificando patrones.

##### Razonamiento

- Elaboración y comprobación de conjeturas
- Construcción y validación de argumentos
- Utilización de los razonamientos inductivo y deductivo

##### Comunicación o lenguaje

- Expresar en forma escrita los conceptos matemáticos y la relación entre ellos

- Utilización del lenguaje simbólico del Cálculo en la resolución de problemas

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

### Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

1. Una rana parada en un extremo de una tabla de longitud un metro salta primero a la mitad de la tabla, luego salta a la mitad del tramo que tiene adelante y continúa saltando cada vez la mitad del espacio faltante generando con sus saltos una sucesión. Suponiendo que la rana pudiera dar un número infinito de saltos determinar:

- a) la distancia saltada hasta el salto  $n = 5$ ;
- b) el límite del salto cuando  $n$  tiende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ );
- c) el límite de la distancia total saltada cuando  $n$  tiende a infinito ( $n \rightarrow \infty$ ).

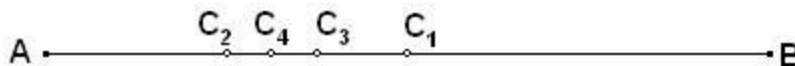
Respuestas: a)  $\frac{31}{32}$       b) 0      c) 1

2. Una pelota es soltada desde una altura de un metro del suelo. En cada rebote alcanza una altura de  $\frac{3}{4}$  de la altura anterior (no se considera la fricción con el aire y con el suelo y el tiempo de contacto de la pelota con el suelo se desprecia) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

Respuesta: 7

3. El punto  $C_1$  divide al segmento  $AB = 18$  en dos partes iguales, el punto  $C_2$  divide al segmento  $AC_1$  en dos partes también iguales; el punto  $C_3$  divide, a su vez, al segmento  $C_2C_1$  en dos partes iguales, el  $C_4$  hace lo propio con  $C_2C_3$ , y así sucesivamente. Determinar el límite del punto  $C_n$  cuando  $n$  crece indefinidamente (tiende a infinito).

Respuesta: Observemos en la siguiente figura



$$AC_1 = \frac{1}{2} AB, \quad C_1C_2 = \frac{1}{4} AB, \quad C_2C_3 = \frac{1}{8} AB, \quad C_3C_4 = \frac{1}{16} AB \text{ y así sucesivamente.}$$

Por otra parte observemos que el punto  $C_2$  se encuentra a la izquierda de  $C_1$ , el  $C_3$  se encuentra a la derecha de  $C_2$ , el  $C_4$  se encuentra a la izquierda de  $C_3$ , es decir los puntos se van alternando de posición con respecto al anterior.

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(18)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18),$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) \\
C_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) \\
C_5 &= \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \left(\frac{1}{32}\right)(18) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
C_n &= \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \left(\frac{1}{32}\right)(18) \cdots + (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n (18)
\end{aligned}$$

es decir:

$$C_n = (18) \left[ \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32}\right) + \cdots + (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

Dentro del corchete se tiene una progresión geométrica

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32}\right) \cdots + (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right] = \frac{1}{3}$$

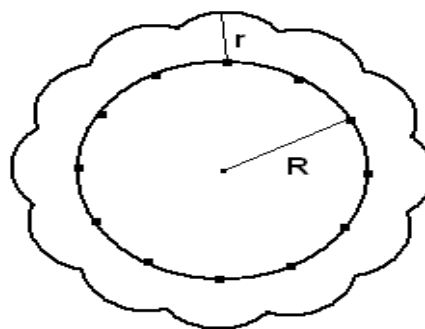
Como

$$C_n = (18) \left[ \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32}\right) + \cdots + (-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = (18)S$  de aquí se tiene  $C_n = (18) \left(\frac{1}{3}\right) = 6$  , es decir, la posición final del punto es de 6 unidades a partir del punto A .

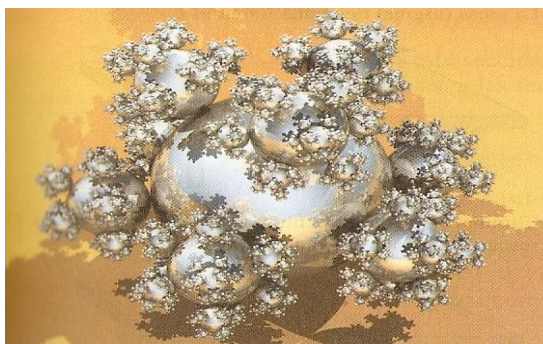
4. Obtener  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , si  $a_1 = \sqrt{6}$  y  $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$  .

5. Una circunferencia cuyo radio es  $R$  está dividida por  $n$  puntos en partes iguales. Cada uno de los puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia de radio  $r$ , hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos. Hallar el límite de la longitud de la línea cerrada resultante cuando  $n$  crece infinitamente.



6.

**Copo esférico.** Un copo esférico (mostrado en la figura de la derecha) es un fractal generado por computadora creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. A la esfera grande se unen nueve esferas de radio  $\frac{1}{3}$ . A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio  $\frac{1}{9}$ . Este proceso es infinitamente continuo. Demuestre que el copo esférico tiene una superficie de área no finita.



Respuesta: Denotemos por  $A$  el Área Superficial así que:

$$A = 4\pi(1^2) + 9 \left( 4\pi \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) + 9^2 \left( 4\pi \left( \frac{1}{9} \right)^2 \right) + \dots = 4(\pi + \pi + \pi + \dots) = \infty$$

7. Para los siguientes procesos infinitos encuentra la función que los representa y determina (si es posible) su límite respectivo.

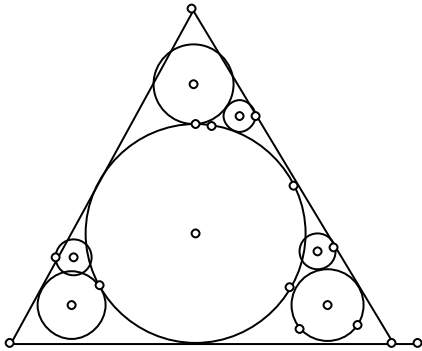
a)  $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots$

b)  $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

c)  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$

8. Si  $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ , ¿Por qué no existe  $h(0)$ ? Demuestra que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  existe y calcúlalo. Apoya ambas respuestas gráficamente.

9. Suma las áreas de círculos inscritos en un triángulo equilátero de lado 1. Observa la figura:



Calcula el área mediante la fórmula del triángulo; hazlo también con la suma de las áreas de los círculos que están inscritos de manera sucesiva en los “huecos” que hay en el triángulo.

Encuentre el valor de la serie siguiente  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Respuesta:

La serie  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  tiene como primeras sumas parciales  $S_1 = \frac{1}{2}$ ,

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \quad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

Observemos que la expresión  $\frac{1}{n(n+1)}$  se puede descomponer en sumas parciales de la

siguiente manera  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Vamos a obtener una fórmula para la n-ésima suma parcial, para esto vamos a ir escribiendo los sumandos en escalera y sumando estos “telescópicamente”.

**Valor de k**

**sumando k-ésimo**

1

$$1 - \frac{1}{2}$$

2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 4 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 n-1 \\
 n
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
 \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
 \end{array}$$


---


$$1 - \frac{1}{n+1}$$

Es decir  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$  de aquí se obtiene

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

10. La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{8^{n-1}}$  ¿es convergente? ¿Cuál es su suma?

11. Determinar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  si se tiene que  $a_1 = 2$ ,  $a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}$ ,  $n > 1$

12. Calcular el valor de los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \right]$$

Respuesta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \left( \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} \right] = 2$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt[3]{x+1}-x}{x} \right]$$

13. Un cuerpo al moverse con una velocidad  $v$  tiene una masa relativa  $m$  dada por la siguiente expresión, donde  $m_0$  es la masa en reposo y  $c$  es la velocidad de la luz.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad \text{Hallar: } \lim_{v \rightarrow 0} (m) = \lim_{v \rightarrow 0} \left[ \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]$$

Respuesta:  $m_0$

$$14. \text{ Obtén: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}$$

$$15. \text{ Obtén: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x-3} - 1}{\sqrt[4]{x-3} - 1}$$

$$16. \text{ Obtén: } \lim_{x \rightarrow 5} \left[ \frac{x-1}{x^2-4x-5} - \frac{2}{3x-15} \right]$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2 + x - 1}{2x + 5} \right]$$



$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4} \right]$$

$$19. \text{ Obtén: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{16x^2 + bx - c} - \sqrt{16x^2 - bx + c} \right)$$

20. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , use las propiedades de límites para evaluar cada límite.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^2 \qquad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{f(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[f(x)]^3 - x^3}{f(x) + x} \qquad d) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3f(x) - 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left[ x^2 f(x) - \frac{6}{f(x)} \right] \qquad f) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{[f(x)]^2 + x^4}$$

21. Suponga que la función  $f(x)$  satisface la inecuación  $\frac{2}{1+x^2} \leq f(x) \leq 2+x^2$ . Para toda  $x \neq 0$ . Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  e ilustre gráficamente.

## Unidad 2. La Derivada: estudio de la variación y el cambio

22. Sea  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , probar que  $f'(0)$  no existe.

Solución:

Puesto que  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}} - 0}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$  para  $h \neq 0$ ; y usando límites laterales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = +\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

Por lo tanto  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h}$  no existe.

23. Sea  $f(x) = |x - a|$  probar que  $f'(0)$  no existe.

24. Sea  $n$  un entero mayor o igual a 1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$  ¿Qué representa este límite?

Respuesta:  $na^{n-1}$

25. Haciendo uso de la definición de la derivada, derivar:  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $x \neq 0$ .

Respuesta:  $f'(x) = -3x^{-4}$

26. Considere la siguiente afirmación: *Si la derivada de una función es cero en todo su dominio entonces la función es constante.* ¿Es cierta la afirmación anterior? Justifique su respuesta.

27. Considere las siguientes afirmaciones

*Si  $f$  es una función continua en su dominio entonces es diferenciable.*

*Si  $f$  es una función diferenciable en su dominio entonces la función es continua.*

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas? Justifica tu respuesta.

28. La ecuación de movimiento de una partícula está dada por  $s(t) = 4t^3 - 2t + 1$ , donde  $s$  está en metros y  $t$  en segundos, calcular  $v(2)$ .

Respuesta: 46 m/s.

29. Elaborar un registro tabular que exprese el máximo número de regiones formadas por un número dado de cuerdas en un círculo. Deducir una función que exprese el máximo número de regiones de un círculo en términos del número de cuerdas del círculo.

Respuesta:  $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ .

30. Demuestra que no existe una recta que pase por el punto (1,2) que sea tangente a la curva  $y = 4x^2$

31. El área de la superficie de una esfera aumenta a razón de: 1 cm<sup>2</sup>/seg. ¿A qué razón aumenta el volumen cuando éste es de 36 cm<sup>3</sup>?

32. El punto que se apoya en el suelo de una escalera de 5 metros, recargada en una pared, se desplaza de modo que  $\frac{dx}{dt} = 1 \frac{m}{seg}$  (constante). ¿Es constante  $\frac{dy}{dt}$  (del punto que se apoya en la pared)? Argumenta.

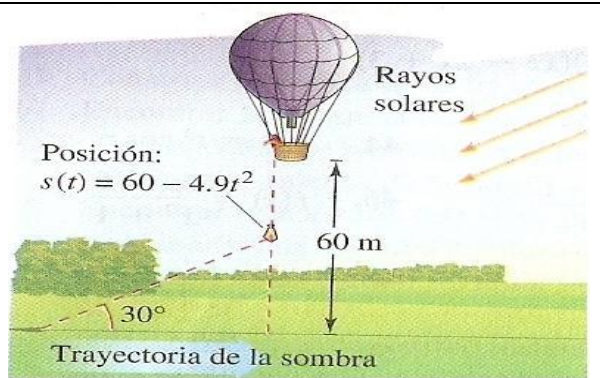
33. ¿Existe un recipiente en que al aumentar el volumen del líquido,  $\frac{dV}{dt}$  (la variación instantánea del volumen del líquido) disminuya? Argumenta.

34. Se lanza una piedra a un charco generándose ondas circulares concéntricas. Determina la tasa de variación de la superficie afectada cuando su radio es de 7 cm.

35. Sea  $g$  una función diferenciable tal que  $g(x + h) - g(x) = 2xh + h^2 - 2h$  y  $g(0) = 2$ , determinar  $g(x)$ .

36.

**Sombra en movimiento.** Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (ver figura a la derecha). Encontrar la razón de cambio instantánea del ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. (Sugerencia: La posición del costal está dada por  $s(t) = 60 - 4.9t^2$ .)



Solución.

$$s(t) = 60 - 4.9t^2$$

$$s'(t) = -9.8t$$

$$s = 35 = 60 - 4.9t^2$$

$$4.9t^2 = 25$$

$$t = \frac{5}{\sqrt{4.9}}$$

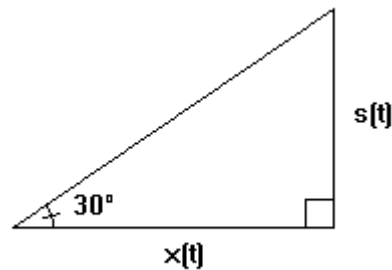
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s(t)}{x(t)}$$

$$x(t) = \sqrt{3}s(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}(-9.8) \left( \frac{5}{\sqrt{4.9}} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} \approx -38.34 \frac{m}{seg}$$



### Unidad 3. Derivación de funciones algebraicas

37. Usando la definición de derivada, calcular  $f'(a)$ , si  $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$

Solución:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(5x^2 + 2x - 1) - (5a^2 + 2a - 1)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{5(x^2 - a^2) + 2(x - a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{5(x+a)(x-a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} 5(x+a) + \lim_{x \rightarrow a} 2$$

$$f'(a) = 10a + 2.$$

38. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \frac{\sqrt{x}(2-x^2)}{x}$  en  $x = 4$

Respuesta:  $y + 7 = -\frac{25}{8}(x - 4).$

39. Sea  $f(x)$  una función par. Probar que  $f'(x) = -f'(-x)$ . Además, trazar un bosquejo de la gráfica de la derivada.

40. Sea  $f(x)$  una función impar. Probar que  $f'(x) = f'(-x)$ . Además, trazar un bosquejo de la gráfica de la derivada.

$$1) y = \ln(4x - 7)^x$$

41. Deriva las siguientes funciones: 2)  $y = 4\text{sen}(e^{3x^2+x-3})$

$$3) y = \sqrt[x]{x}$$

42. Encontrar una fórmula para la derivada enésima de la función  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

Respuesta:  $y^n(x) = \begin{cases} n!x^{-(n+1)} \dots \text{si } n \cdot \text{es } \cdot \text{par} \\ -n!x^{-(n+1)} \dots \text{si } n \cdot \text{es } \cdot \text{impar} \end{cases}$

43. Supongamos que  $f^{(n)}(a)$  y  $g^{(n)}(a)$  existen, es decir las derivadas de orden  $n$  existen. Encuentre una fórmula para  $(f \square g)^{(n)}(a)$ .

44. Encuentre una función polinómica  $f$  de grado  $n$  tal que  $f'(x) = 0$  para precisamente  $n-1$  números  $x$ .

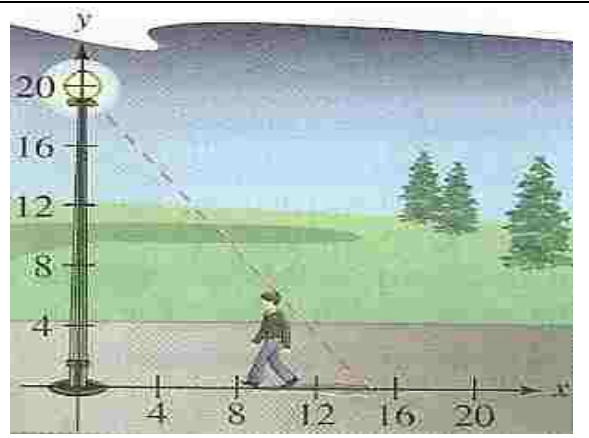
45. El número  $a$  recibe el nombre de raíz doble de la función polinómica, si  $f(x) = (x-a)^2 g(x)$  para alguna función polinómica  $g(x)$ . Pruebe que  $a$  es raíz doble de  $f(x)$  si y sólo si  $a$  es raíz de  $f$  y  $f'$  a la vez.

46.

**Longitud de una sombra.** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo, camina hacia la luz que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura sobre el suelo (ver la siguiente figura).

Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

- ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
- ¿a qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?



Solución:

- En la figura de la derecha se representan los datos e incógnitas principales:

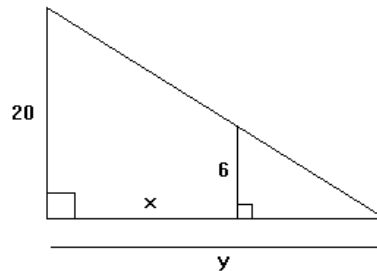
De la semejanza de triángulos se sabe que:

$$\frac{20}{6} = \frac{y}{y-x} \quad \therefore 20y - 20x = 6y$$

$$\text{Por lo que: } 14y = 20x \quad \therefore y = \frac{10}{7}x$$

$$\text{Se sabe que: } \frac{dx}{dt} = -5 \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

$$\text{Además: } \frac{dy}{dt} = \frac{10}{7} \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{10}{7} (-5) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$



$$\text{Por lo que } \frac{dy}{dt} = \frac{-50}{7} \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

$$\text{b) } \frac{d(y-x)}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{d(y-x)}{dt} = \left( -\frac{50}{7} - (-5) \right) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

$$\therefore \frac{d(y-x)}{dt} = \left( -\frac{50}{7} + \frac{35}{7} \right) \frac{\text{pies}}{\text{segundo}} = -\frac{15}{7} \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

## Unidad 4. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización

47. Para la función  $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ , determinar:

- los puntos críticos.
- los intervalos sobre los cuales  $f$  es creciente o decreciente.
- los valores máximos o mínimos locales de  $f$ .
- los intervalos donde la función  $f$  es cóncava o  $f$  es convexa.
- los puntos de inflexión.
- su gráfica.

Respuestas:

a)  $x = 0$  y  $x = -1$ .

b)

Intervalo	$f'$	Forma de la gráfica
$(-\infty, -1)$	-	decreciente
$(-1, 0)$	+	creciente
$(0, \infty)$	+	creciente

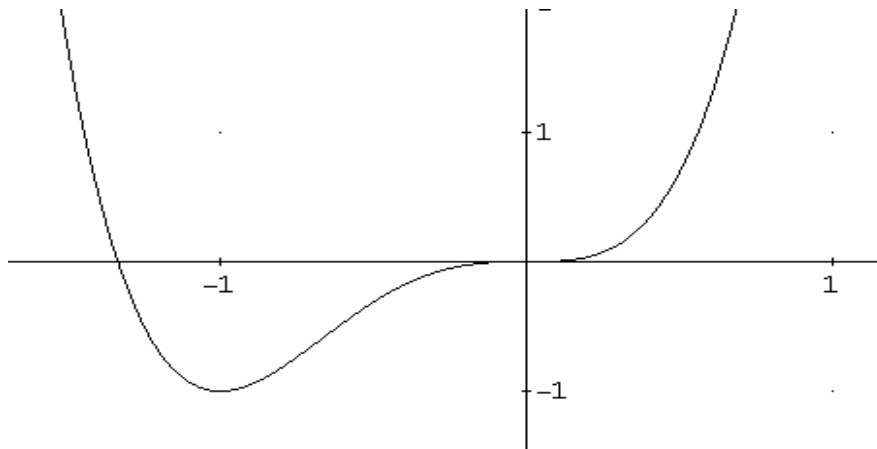
c) Mínimo local en  $x = -1$

d)

Intervalo	$f''$	Forma de la gráfica
$(-\infty, -\frac{2}{3})$	+	Convexa
$(-\frac{2}{3}, 0)$	-	Cóncava
$(0, \infty)$	+	Convexa

e) Puntos de inflexión:  $(0, 0)$  y  $(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$ .

f)



48. Para las funciones  $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$  y  $f(x) = 2x - 8 + 3\sqrt[3]{x^2 - 8x + 16}$ , determina:

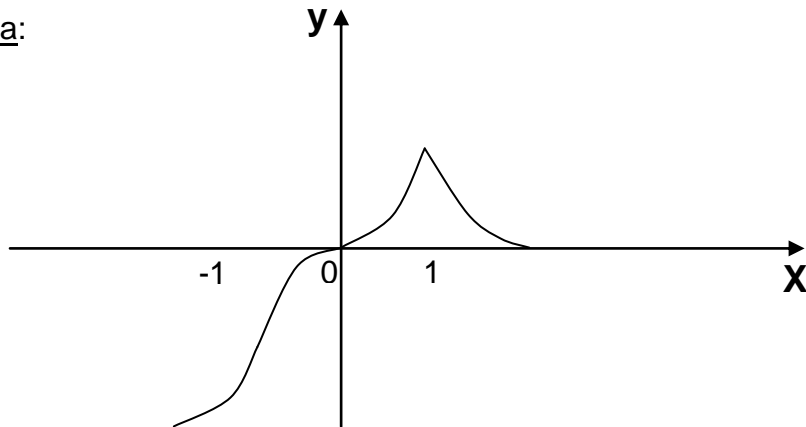
- los puntos críticos
- los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente
- los puntos máximos o mínimos locales de la función

- d. los intervalos donde la función es cóncava o convexa.
- e. Los puntos de inflexión
- f. Su gráfica.

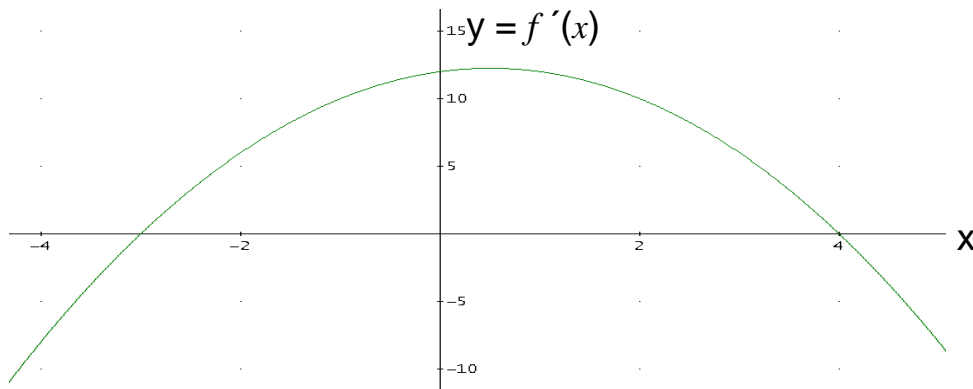
49. Dibujar la gráfica de una función con las propiedades siguientes:

- a)  $f(0) = 0$ ,
- b)  $f'(x) > 0$  para  $x < -1$  y  $-1 < x < 1$ ,
- c)  $f'(x) < 0$  para  $x > 1$ ,
- d)  $f''(x) > 0$  para  $x < -1$ ,  $0 < x < 1$  y  $x > 1$ ,
- e)  $f''(x) < 0$  para  $-1 < x < 0$ .
- f)  $f'(1)$  no existe

Respuesta:



50. Analizar la gráfica de la función  $f'$  dada y trazar una posible gráfica de  $f(x)$



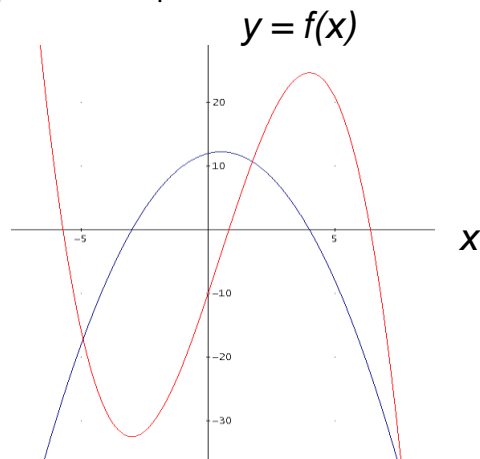
Solución:

Primero, observe que para  $x < -3$ , la gráfica de  $f'(x)$  está abajo del eje  $x$ , luego  $f'(x) < 0$  y la gráfica de  $f(x)$  es descendente. La gráfica de  $f'(x)$  es ascendente para  $x < -3$ , lo cual significa que  $f''(x) > 0$  y la gráfica de  $f(x)$  es convexa. De la misma manera, se pueden analizar en los intervalos  $(-3, 4)$  y  $(4, \infty)$ ; los resultados se resumen en la siguiente tabla.

<b>x</b>	<b>Características de <math>y = f'(x)</math></b>	<b>Características de <math>y = f(x)</math></b>
$x < -3$	Negativa, creciente	Decreciente, convexa.
$x = -3$	Intersección con el eje x,	Tangente horizontal.
$-3 < x < 0.5$	Positiva, creciente	Creciente, convexa
$x = 0.5$	Tangente horizontal	Posible punto de inflexión
$0.5 < x < 4$	Positiva, decreciente	Creciente, cóncava.
$x = 4$	Intersección con el eje x	Tangente horizontal
$x > 4$	Negativa, decreciente	Decreciente, cóncava.

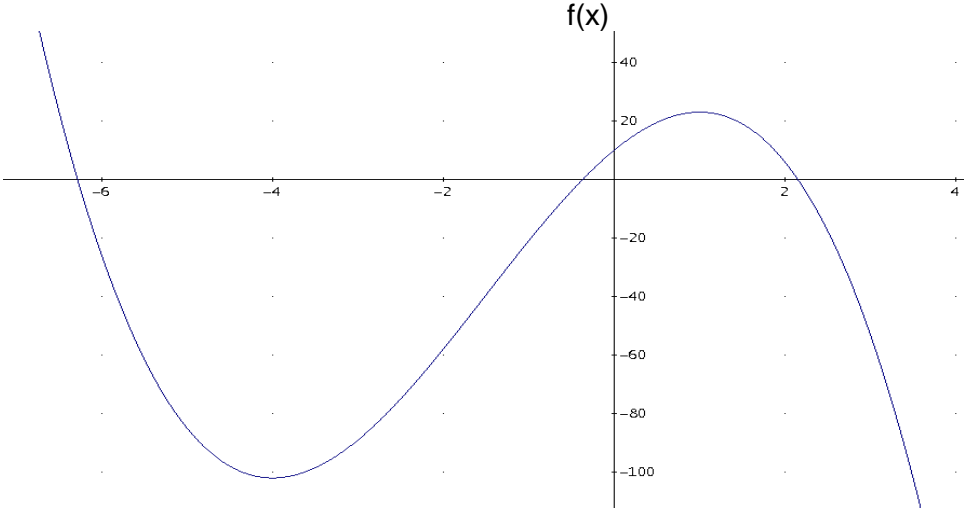
Como la concavidad cambia en  $x = 0.5$  (de arriba hacia abajo), allí se presenta un punto de inflexión, pero no hay ninguna tangente horizontal, en cambio en  $x = -3$  y  $x = 4$  no cambia la concavidad. La gráfica de  $f(x)$  es descendente a la izquierda de  $x = -3$  y ascendente a la derecha, luego debe haber un mínimo relativo en  $x = -3$ , de manera análoga en  $x = 4$  debe haber un máximo relativo.

A continuación se muestran las gráficas de  $f'(x)$  y una posible que tiene todas las características requeridas para  $y = f(x)$ . Observe que debido a que no se dan los valores de  $f(-3)$ ,  $f(0.5)$  y  $f(4)$ , muchas otras gráficas cumplirán los requisitos.

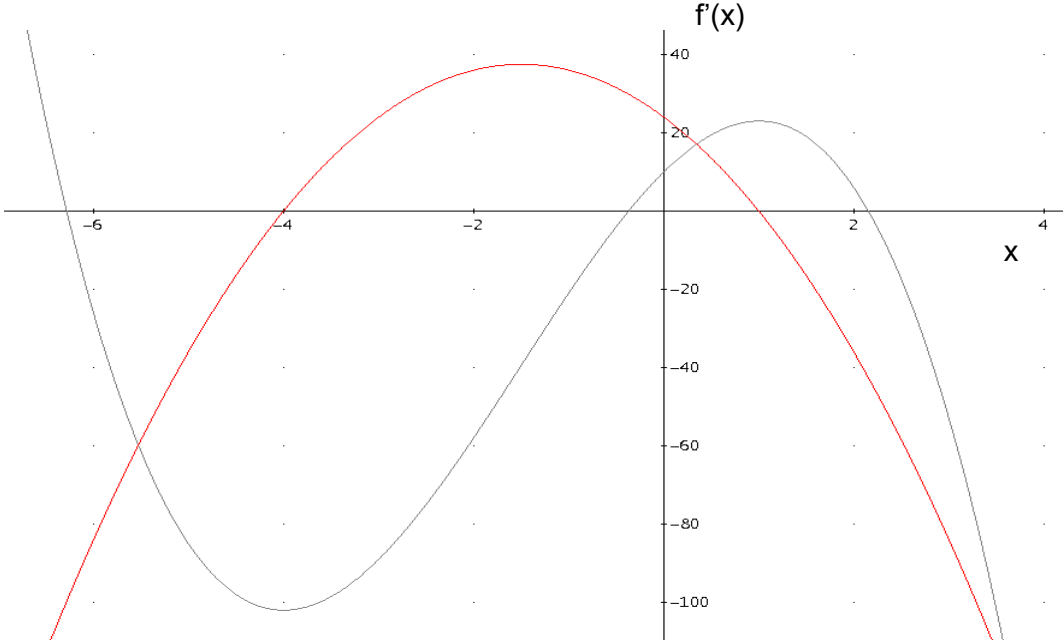




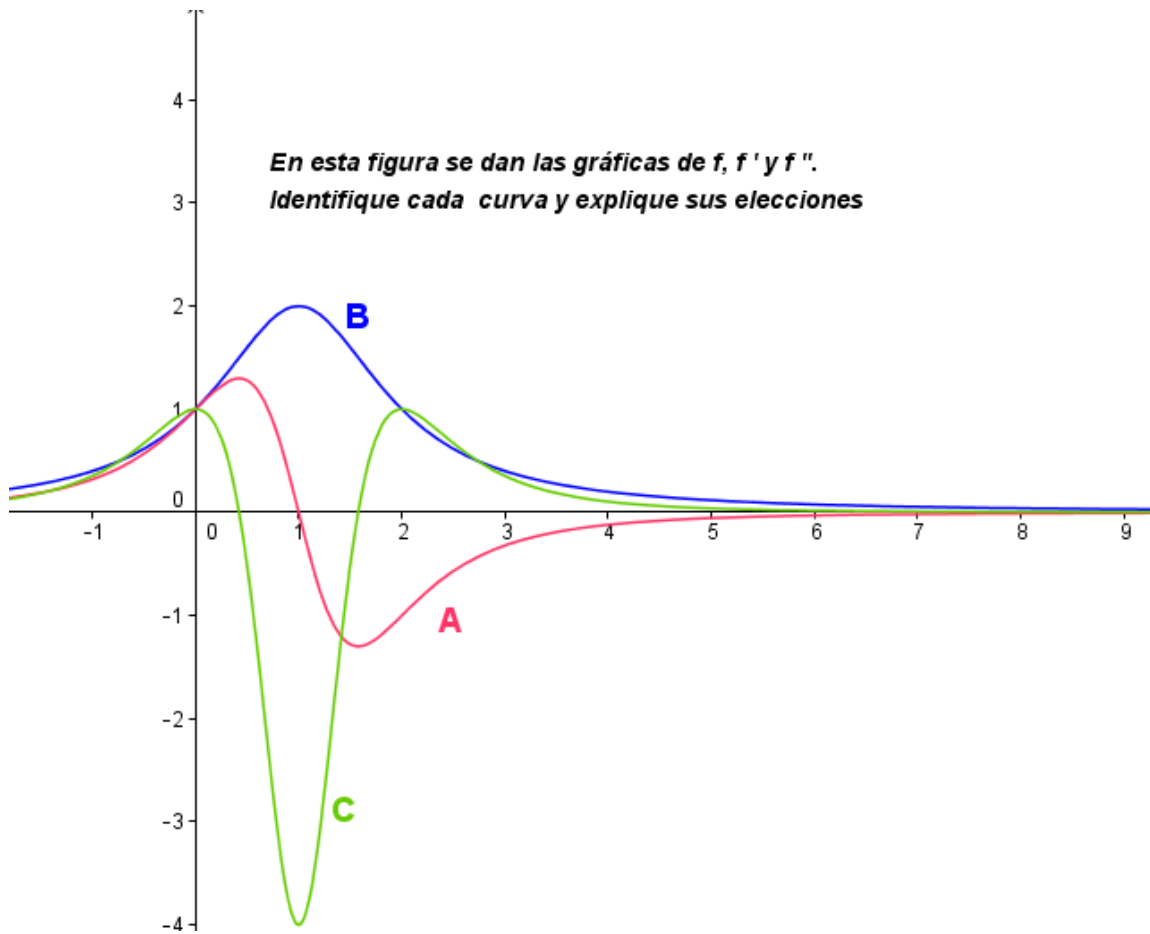
51. A partir de la gráfica de la función  $f$ , esbozar la gráfica de  $f'$ .



Respuesta:



52.



53. Traza la gráfica de las siguientes funciones. Determina sus intersecciones con los ejes; sus máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión y cualquier otro elemento que te permita obtener dicha gráfica.

a)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

b)  $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

c)  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

54. Construya un ejemplo de funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  para las cuales  $f'(1) = g'(1) = h'(1) = 0$  y además se cumpla que :

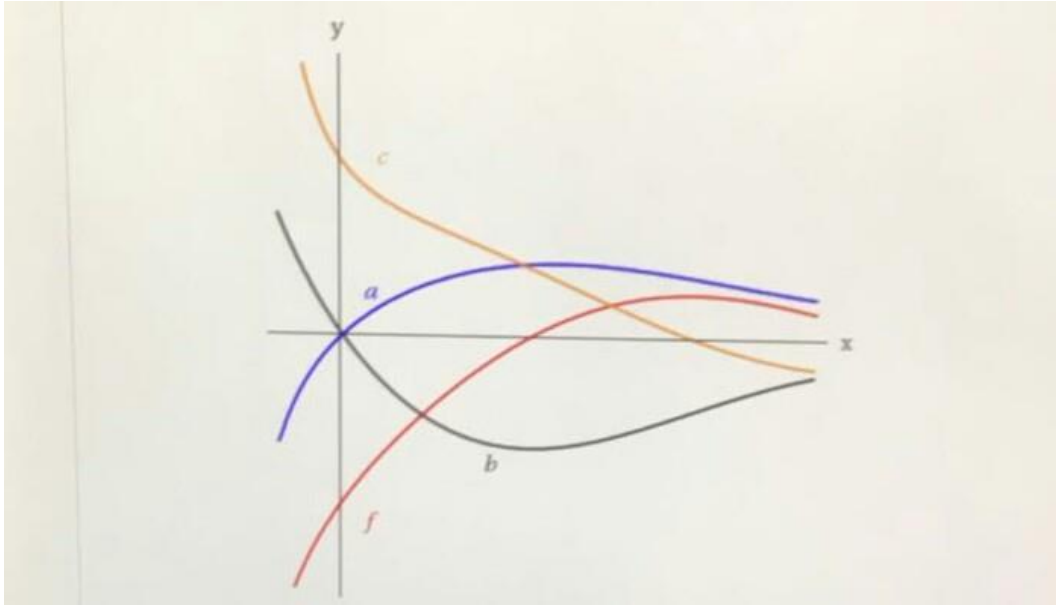
En  $x_0=1$ ,  $f(x)$  tiene un mínimo relativo.

En  $x_0=1$ ,  $g(x)$  tiene un máximo relativo.

En  $x_0=1$ ,  $h(x)$  tiene un punto de inflexión.

55. Calcule las dimensiones del cilindro recto de menor superficie que tenga un volumen de 1litro ( $1000 \text{ cm}^3$ ).

56. A continuación, se muestra la gráfica de una función  $f(x)$  y las curvas  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Explique cuál de las curvas es la gráfica de una antiderivada de  $f(x)$



57. Pruebe que la suma de un número y su recíproco es por lo menos dos.

- i. Suponga que tiene un polinomio  $f(x) = x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_0$  con puntos singulares en  $-1$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$  y  $f''(-1) = 0$ ,  $f''(1) > 0$ ,  $f''(2) < 0$ ,  $f''(3) = 0$ . Trazar la gráfica de  $f$  con todo el detalle posible a partir de esta información.
- ii. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad  $\beta$  y según un ángulo  $\alpha$  de modo que su componente vertical es  $\beta \sin \alpha$  y la componente horizontal es  $\beta \cos \alpha$ . Su distancia  $s(t)$  sobre el nivel del suelo obedece a la ley  $s(t) = -4.9t^2 + (\beta \sin \alpha)t$ , mientras que su velocidad horizontal permanece constante  $\beta \cos \alpha$ .
  - a) Pruebe que la trayectoria de la bala es una parábola.
  - b) Hallar el ángulo  $\alpha$  que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

58. Encuentre el mínimo número  $M$  tal que para cada valor de  $x$  que satisface la desigualdad  $0 \leq x \leq 2$  se tenga  $|2x^2 - x^3| \leq M$ .

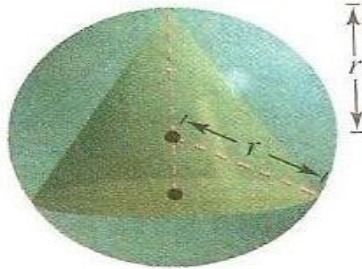
59. Encuentre el máximo número  $B$  tal que para cada  $x > 0$ , se tenga  $\left| \frac{1}{x} + 4x \right| \geq B$ .

60. Encuentra el punto en la parábola  $y^2 = 2x$  que está más próximo al punto  $(1, 4)$ .

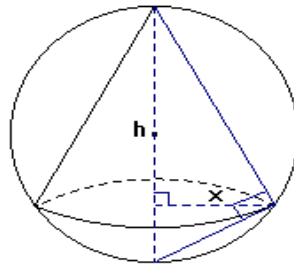
61. Calcula el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio  $r$ .

62 Un cono de papel para beber agua debe contener  $10 \text{ cm}^3$  de líquido. Encontrar la altura y el radio del cono que requerirá la menor cantidad de papel.

63. **Volumen máximo.** Encontrar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio  $r$ .



Solución. Considerando la siguiente figura que se relaciona con los datos e incógnita que se mencionan, se tiene:



Por semejanza de triángulos se sabe que:  $\frac{2r-h}{x} = \frac{x}{h} \therefore x^2 = h(2r - h)$

El volumen del cono es:  $V = \frac{1}{3} \pi x^2 h \therefore V(h) = \frac{1}{3} \pi h(2r - h)h$

$$\therefore V(h) = \frac{1}{3} \pi h^2(2r - h) \therefore V(h) = \frac{2\pi r}{3} h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$$

$$\text{Así que: } V'(h) = \frac{4\pi r}{3} h - \pi h^2 \therefore V'(h) = h \left( \frac{4\pi r}{3} - \pi h \right)$$

$$\text{Haciendo: } V'(h) = 0 \text{ se tiene: } h = 0 \text{ o } \frac{4\pi r}{3} - \pi h = 0$$

$$\text{Desde que: } 0 < h < 2r \therefore h \neq 0 \therefore \frac{4\pi r}{3} = \pi h \therefore h = \frac{4r}{3}$$

$$\text{Ahora que: } V''(h) = \frac{4\pi r}{3} - 2\pi h$$

$$\therefore V''\left(\frac{4r}{3}\right) = \frac{4\pi r}{3} - 2\pi \left(\frac{4r}{3}\right) \therefore V''\left(\frac{4r}{3}\right) = -\frac{4\pi r}{3} \therefore V''\left(\frac{4r}{3}\right) < 0$$

Así que  $V$  es máximo para:  $h = \frac{4r}{3}$

$$\therefore x^2 = \frac{4r}{3} \left( 2r - \frac{4r}{3} \right) \therefore x^2 = \frac{8r^2}{9} \therefore x = \frac{2\sqrt{2}r}{3}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{8r^2}{9} \right) \left( \frac{4r}{3} \right) \therefore V = \frac{32\pi}{81} r^3 \text{ unidades cúbicas.}$$

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

### Unidad 1. Derivada de Funciones Trascendentes .

1. Determinar el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{sen } x}{x} \right]$  Argumente su respuesta.

Respuesta: 1

2. Determinar el valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \text{COS } x}{x} \right]$  Argumente su respuesta.

Respuesta: 0

3. Obtén  $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen} \frac{1}{x}$

4. Obtén:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{sen}(bx) \cot(ax)}{\text{sen}(ax)}$

5. Encontrar la derivada de las funciones:  $\text{sen } x$  y  $\text{cos } x$  a partir de la definición

6. A partir de la derivada de las funciones seno y coseno, encontrar la fórmula para la derivada de la función tangente de  $x$ .

Solución:

Sabemos que:  $\frac{d \text{sen } x}{dx} = \text{cos } x$  y que  $\frac{d \text{cos } x}{dx} = - \text{sen } x$  y como  $\tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

Se tiene que  $\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \right) = \frac{\frac{d \text{sen } x}{dx} (\text{cos } x) - \frac{d \text{cos } x}{dx} (\text{sen } x)}{\text{cos}^2 x} = \frac{\text{cos}^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{cos}^2 x}$

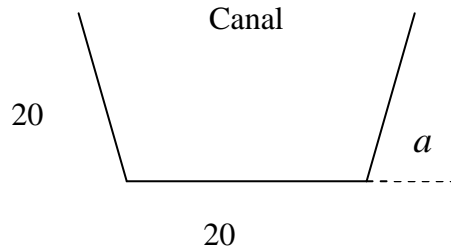
Por lo que  $\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\text{cos}^2 x} = \sec^2 x$

7. Utilizando  $\frac{d}{dx} \text{sen } x = \text{cos } x$  y el teorema de la función inversa para la derivada de una

función obtener  $\frac{d}{dx} \arcsen x$  en  $[-1, 1]$

8. El extremo de una biela que se mueve verticalmente en un motor de combustión interna es:  $x(t) = 3 \text{sen } t + 4 \text{cos } t$  Demostrar que la aceleración y la posición son iguales en magnitud y opuestas en signo.

9. De una tira de metal de 60 cm. de ancho se quiere formar un canal de sección transversal un trapecio isósceles. ¿Para qué ángulo  $a$  el área de la sección es máxima?



10. Obtener  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

11. Determinar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$

12. Un cable telegráfico submarino consta de un alma de cobre, con una envoltura de material no conductor. Si  $x$  representa la razón del radio del alma al espesor de la envoltura, y se sabe que la velocidad  $v$  de transmisión varía como:  $v = x^2 \ln(1/x)$ . Demostrar que la

mayor velocidad se alcanza cuando  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

13. Obtén:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{9x} - e^{3x}}{x}$

14. Obtén:  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{4(10)^n - 3(10)^{2n}}{3(10)^{n-1} + 2(10)^{2n-1}}$

15. Encontrar la derivada de la función  $\ln(x)$  a partir de la definición.

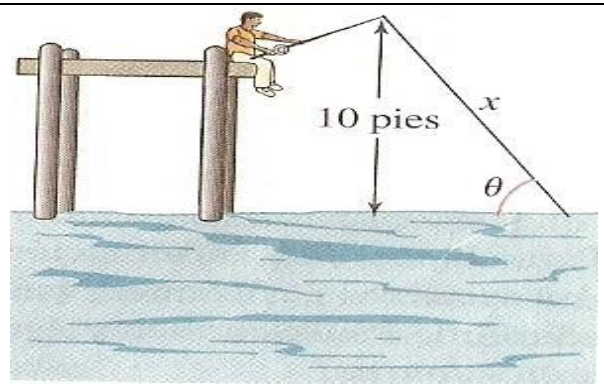
16. Derivar la función:  $y = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x}}$

Respuesta:  $\frac{d}{dx} \left[ \ln \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x}} \right] = \frac{-2}{x^2 - 4}$

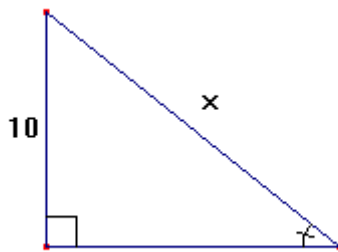
17. Obtener los puntos en donde las pendientes de las funciones  $f(x) = 4^x$  y  $f(x) = 2^x$  son iguales.

18.

**Angulo de elevación.** El pescador de la siguiente figura recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua. ¿A qué ritmo cambia el ángulo  $\theta$  entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?



Solución:



$$\text{De la figura se tiene: } \operatorname{sen}\theta = \frac{10}{x}$$

$$\text{De los datos se sabe que: } \frac{dx}{dt} = -1 \frac{\text{pies}}{\text{segundo}}$$

$$\begin{aligned} (\cos\theta) \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{10}{x^2} \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{x^2} (\sec\theta) \frac{dx}{dt} \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{25^2} \left( \frac{25}{\sqrt{25^2 - 10^2}} \right) (-1) \\ \therefore \frac{d\theta}{dt} &= \frac{10}{25} \left( \frac{1}{\sqrt{625 - 100}} \right) \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{5} \left( \frac{1}{\sqrt{525}} \right) \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{5} \left( \frac{1}{5\sqrt{21}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{25\sqrt{21}} \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\sqrt{21}}{525} \quad \therefore \frac{d\theta}{dt} \approx 0.017 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

## Unidad 2. La Integral como una Antiderivada

19. Encontrar las funciones  $F$  que satisfagan las condiciones dadas para cada caso.

a)  $f'(x) = 8x^2, f(0) = 1$

b)  $f'(x) = \sqrt{x}, f(1) = 2.$

c)  $f'(x) = 14x^{-4/3}, f(16) = -60$

d)  $f'(x) = x^2 \sqrt{x}, f(4) = 0.$

20. Calcular la integral indefinida  $\int x\sqrt{x+1} dx.$

Respuesta:

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$$

21. Calcular la integral indefinida  $\int \frac{x+1}{x-1} dx$ .

Respuesta:

$$\int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2\ln|x-1| + c.$$

22. Calcula las siguientes integrales, sin usar tablas de integración:

$$\int \sec x dx, \int \csc x dx$$

23. Usando el método de integración por partes, calcular las siguientes integrales:

$$a) \int e^x \operatorname{sen} x dx \quad b) \int e^x \cos x dx \quad c) \int x(x-1)^8 dx.$$

Respuestas:

$$a) \int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c \quad b) \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$$

$$c) \int x(x-1)^8 dx = \frac{x(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^{10}}{90} + c$$

24. Calcular  $\int x^2 \cos x dx$  por el método tabular

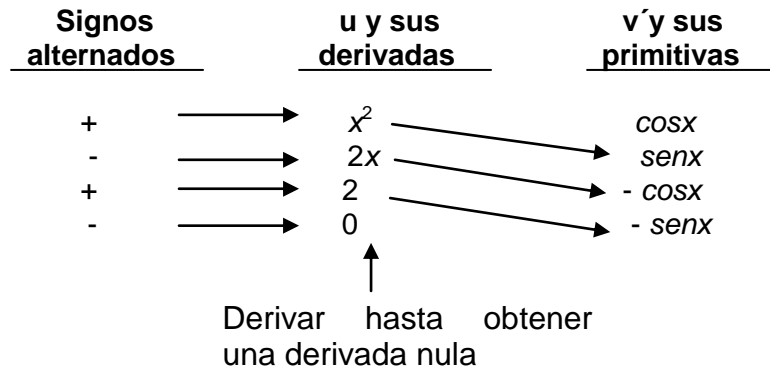
Solución:

Esta integral la podemos calcular usando el método de integración por partes, pero utilizaremos el denominado **método tabular**. El método tabular que presentaremos aquí hace que las integraciones por partes sean bastante sencillas, en especial en problemas en los que se tienen que aplicar varias veces. Este método funciona bien en integrales de la forma

$$\int x^n \operatorname{sen} ax dx, \int x^n \cos ax dx \text{ y } \int x^n e^{ax} dx \text{ donde } n \in \mathbb{N}.$$

Sea  $u = x^2$  y  $dv = \cos x dx$ . Luego, se construye una tabla de tres columnas como la siguiente:





La solución se obtiene sumando los productos: (signo alternado) ( $u$  y sus derivadas) ( $v'$  y sus primitivas de las entradas diagonales), es decir,

$$\int x^2 \cos x dx = (+)x^2 \text{sen } x + (-)(2x)(-\cos x) + (+) 2(-\text{sen } x) + c$$

$$= x^2 \text{sen } x + 2x \cos x - 2\text{sen } x + c$$

Explicar por qué funciona el método tabular.

25. Usando el método tabular, calcular las siguientes integrales:

a)  $\int x^2 e^x dx$

b)  $\int x^3 \text{sen } x dx$

Respuestas:

a)  $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

b)  $\int x^3 \text{sen } x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \text{sen } x + 6x \cos x - 6 \text{sen } x + c$

26. Calcule la siguiente integral  $\int (|x-1| + |2x+1|) dx$

27. Calcule la siguiente integral  $\int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx$

28. Calcule la siguiente integral  $\int \cos \sqrt{x} dx$

29. Resuelve las siguientes integrales:

a)  $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

b)  $\int \sqrt{x} \log x dx$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$d) \int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$e) \int \arctg \sqrt{x} dx$$

$$30. \int x^2 \arctg x dx$$

31. Calcula las integrales siguientes:

$$1) \int x e^{-x^2} dx$$

$$2) \int \frac{x+1}{x} dx$$

$$3) \int \frac{xdx}{3x^2+2}$$

$$4) \int x^2 \sqrt{x^3-14} dx$$

$$5) \int_0^6 \frac{xdx}{x+3}$$

32. **Crecimiento de árboles.** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente,  $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$ , donde  $t$  es el tiempo en años y  $h$  es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan ( $t = 0$ ). a) Determinar la altura después de  $t$  años. b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

Solución:

$$a) h(t) = \int (1.5t + 5) dt \quad \therefore h(t) = 0.75t^2 + 5t + c$$

$$h(0) = 0.75(0)^2 + 5(0) + c$$

$$\text{como } h(0) = 12 \quad \therefore c = 12 \quad \therefore h(t) = 0.75t^2 + 5t + 12$$

$$b) h(6) = 0.75(6)^2 + 5(6) + 12 \quad \therefore h(6) = 690 \text{ centímetros}$$

### Unidad 3. La Integral Definida

33. Calcular el área bajo la parábola  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ , de 0 a 2, aproximándose mediante rectángulos por debajo de la curva.

34. Dada  $A(x) = \int_a^x (6-t) dt$ , determinar  $A'(x)$  de las siguientes dos maneras:

a) Usando una interpretación geométrica

b) Usando Teorema Fundamental del Cálculo.

35. Si  $f$  es una función diferenciable,  $f(1) = 4$ ,  $f(2) = 6$  y  $\int_1^2 x f'(x) dx = 5$   
 Determinar  $\int_1^2 f(x) dx$

36. Si  $f$  es continua en los reales, demostrar que:

a) Si  $f$  es par entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

b) Si  $f$  es impar entonces  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

c)  $\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$

d)  $\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$ .

e) Demuestra que  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Determinar

f)  $\int_{-1}^2 (x^3 - x) dx$

g)  $\int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx$

h)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

37. Suponga que la velocidad de un objeto en  $m/s$  está dada por  $v(t) = 10 + 8t - t^2$ . Calcular la distancia recorrida por el objeto durante los primeros 5 segundos.

38. Sobre la luna la aceleración de la gravedad es de  $g = -1.6 \text{ m/seg}^2$ . En la luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie 20 segundos después, ¿desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

39. Encontrar el área de la región encerrada por las curvas  $y = 5x$ ,  $y = x^3 - 4x$ .

Solución:

Las gráficas de estas funciones se intersecan cuando:

$$x^3 - 4x = 5x$$

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x = -3, 0, 3$$

Puesto que tenemos dos regiones, el área total está dada por

$$\int_{-3}^0 [(x^3 - 4x) - 5x] dx + \int_0^3 [5x - (x^3 - 4x)] dx =$$

$$\int_{-3}^0 (x^3 - 9x) dx + \int_0^3 (9x - x^3) dx = -\left(\frac{(-3)^4}{4} - \frac{9(-3)^2}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right)$$

$$= -\left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right] + \left[\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right] = \frac{81}{2} u^2$$

40. Determinar el área de la región acotada por las curvas

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x \quad y \quad y = x^2 - 4x, \text{ en el intervalo } [0,4]$$

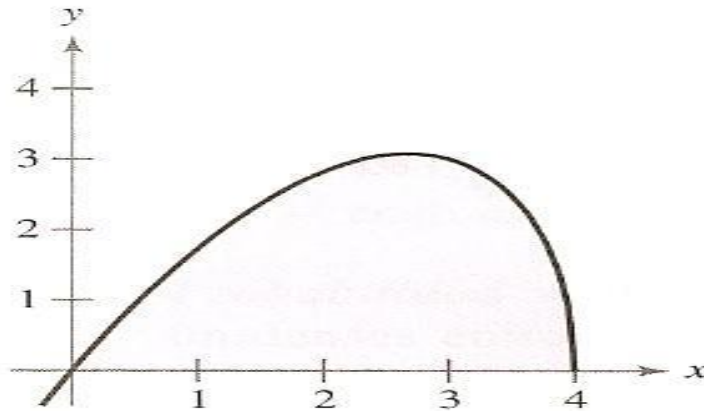
Respuesta:  $\frac{71}{6} u^2$

41. Calcular las integrales a)  $\int_0^1 x \ln(x+1) dx$  y b)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2 \sec x}} dx$

Respuestas:

a)  $\frac{1}{4}$       b)  $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

42. Encontrar el área de la región limitada por el eje  $x$  y la gráfica de la función  $y = x\sqrt{4-x}$ , la cual se muestra en la siguiente figura.



Solución:

$$A = \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx$$

Haciendo

$$u = \sqrt{4-x}, \quad \therefore u^2 = 4-x \quad \therefore 2udu = -dx \quad \therefore dx = -2udu \quad \therefore x = 4-u^2;$$

Si  $x = 0$ ,  $u = 2$ ; Si  $x = 4$ ,  $u = 0$

$$\begin{aligned}\therefore A &= \int_0^4 x\sqrt{4-x} dx = \int_2^0 (4-u^2) u(-2u du) = 2 \int_2^0 (u^2 - 4) u^2 du \\ &= 2 \int_2^0 (u^4 - 4u^2) du = 2 \left[ \frac{u^5}{5} - 4 \left( \frac{u^3}{3} \right) \right]_2^0 = -2 \left( \frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) = -64 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) \\ &= -64 \left( -\frac{2}{15} \right) = \frac{128}{15}\end{aligned}$$

## Unidad 4. Modelos y Predicción

43. La población en un país está creciendo en forma directamente proporcional a su población en ese momento. Si en 2007 su población era de 101 millones y en 2008 es de 104 millones. Calcular su población para el año 2024.

Solución:

Como la rapidez de crecimiento es directamente proporcional a la población se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde  $t$  es el tiempo en años,  $y$  es el tamaño de la población en el tiempo  $t$ ,  $k$  la constante de proporcionalidad.

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = k$$

por la regla de la cadena:  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dt} = k$

integrando con respecto de  $t$ :  $\int \frac{d(\ln y)}{dt} dt = \int k dt$

Se obtiene  $\ln y = kt + C$ , en donde  $y$  es mayor que cero (tamaño de la población en el tiempo  $t$ )

Luego se tiene que  $y = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$

Por lo tanto  $y = Ae^{kt}$

Como en el 2007 se tienen 101 millones, se tiene que para el tiempo  $t = 0$

$$101 = y = Ae^0 = A$$

Para el 2008,  $t = 1$  se tiene

$$104 = y = 101e^k$$

$$\frac{104}{101} = e^k$$

$$\ln\left(\frac{104}{101}\right) = k \cong 0.03$$

Por lo que, en 2024,  $t = 17$ , la población tiene un tamaño de

$$y = 101e^{0.03(17)}$$

$$y \cong 168.19 \text{ millones.}$$

44. Un cultivo de bacterias comienza con  $n_0 = 1000$  y al cabo de 2 horas aumenta hasta 2500. Suponer que el cultivo crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Calcula el tamaño de la población a las 6 horas.

Respuesta: 15625 bacterias.

45. La vida media del radio  $^{226}_{88}\text{Ra}$  es de 1590 años. Esto quiere decir que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente y que en 1590 años se desintegra la mitad de cualquier cantidad dada.

- a) Si se tiene una muestra de 100 miligramos de  $(^{226}_{88}\text{Ra})$ , ¿cuántos miligramos se tendrán después de 1000 años?  
 b) ¿Cuánto tiempo se requiere para tener una masa de 30 miligramos?

Respuestas:

a) 65 miligramos

b) 2762 años

46. Resolver la ecuación  $\frac{dy}{dx} = x^2 y$

Respuesta:  $y = Ae^{\frac{x^3}{3}}$ , donde A es una constante.

47. Un cuerpo, a una temperatura desconocida, se coloca en una habitación en la cual la temperatura es de  $18^\circ$  (constante). Si después de 15 minutos la temperatura es de  $8^\circ$  y después de 25 minutos de  $12^\circ$ . Hallar la temperatura inicial del cuerpo.

48. Una esfera maciza de metal se funde con una velocidad inversamente proporcional a su radio. Si su volumen se reduce 5% en 20 minutos. ¿En qué tiempo se derretirá la esfera?

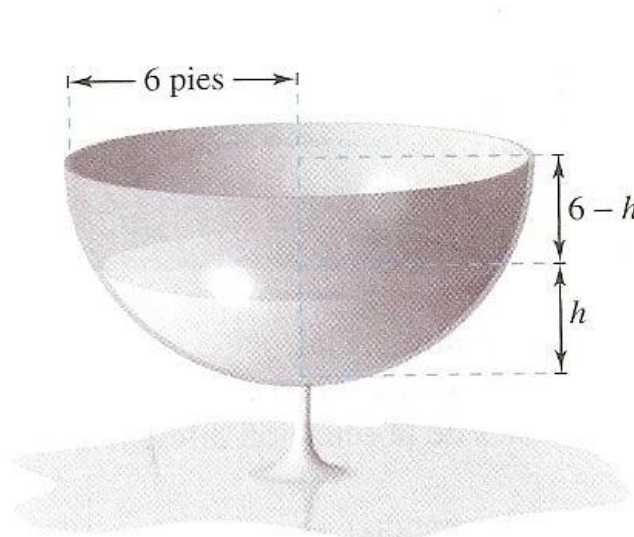
49. Se necesita una fuerza de 500 lb para comprimir un resorte de su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 9 pulgadas. Determina el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud de 8 pulgadas.

50. Encontrar la función y si:

a)  $\frac{dy}{dx} = x(2x + y)^2 - 2$

b)  $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x^2}$

51. **La ley de Torricelli** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es:  $A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$ , donde  $h$  es la altura del agua en el tanque,  $k$  es el área de la abertura de la parte inferior del tanque,  $A(h)$  es el área de la sección transversal a la altura  $h$  y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad: ( $g \approx 32 \frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$ ). Un tanque semiesférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



Solución:

$$k = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi$$

$$g = 32$$

$$x^2 + (y - 6)^2 = 36 \dots\dots \text{Ecuación del tanque}$$

$$x^2 = 36 - (y - 6)^2 \therefore x^2 = 36 - y^2 + 12y - 36 \therefore x^2 = -y^2 + 12y$$

$$\therefore A(h) = (12h - h^2)\pi \dots\dots \text{Área de la sección transversal}$$

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh} \therefore (12h - h^2)\pi \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{144}\pi\sqrt{64h}$$

$$\begin{aligned} \therefore (12h - h^2) \frac{dh}{dt} &= -\frac{1}{18} \sqrt{h} & \therefore (216h - 18h^2) \frac{dh}{dt} &= -h^{\frac{1}{2}} \\ \therefore (216h - 18h^2) h^{-\frac{1}{2}} dh &= -dt & \therefore \left(-216h^{\frac{1}{2}} + 18h^{\frac{3}{2}}\right) dh &= dt \\ \therefore \int \left(-216h^{\frac{1}{2}} + 18h^{\frac{3}{2}}\right) dh &= \int dt & \therefore -216 \left(\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + 18 \left(\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) &= t + c \\ \therefore \frac{36}{5} h^{\frac{5}{2}} - 144h^{\frac{3}{2}} &= t + c & \therefore \frac{h^{\frac{3}{2}}}{5} (36h - 720) &= t + c \\ \text{Cuando } h = 6, t = 0 & \therefore \frac{6\sqrt{6}}{5} (216 - 720) = c & \therefore c = \frac{6\sqrt{6}}{5} (-504) & \therefore c \approx 1481.45 \end{aligned}$$

El tanque está completamente vacío cuando  $h = 0$

$$\therefore t = 1481.45 \text{ segundos} \quad \therefore t \approx 24' 41''$$

## BIBLIOGRAFÍA

Ayres, F. **Cálculo diferencial e integral**. Edit. Mc Graw-Hill. México, 1995.

Bittinger, M. **Cálculo para Ciencias Económico-administrativas**. Addison Wesley. 7ª ed. Colombia, 2002.

Cruse A. B. y Granver M. **Lectures on freshman calculus**. Addison-Wesley Publishing Company. U S A. 1971.

Granville, W. A. **Cálculo diferencial e integral**. Edit. Limusa. México, 1981.

Leithold, L. **El Cálculo con geometría analítica**. Edit. Harla. 2ª. Ed. México, 1972.

McAloon, K y Tromba, A. **Cálculo en una variable**. Publicaciones Cultural. 1ª ed. en español. México, 1975.

Pinzón, E. A. **Cálculo I. Diferencial. Teoría y 476 problemas resueltos**. Edit. Harla. México, 1973.

Purcell, et. al. **Cálculo**. Prentice Hall. 8ª ed.

Soler, N. y Aranda. **Fundamentos de Cálculo**. ECOE ediciones. Reimpresión de la 2ª ed. México, 2003.

Spivak, M. **Cálculo infinitesimal**. Edit. Reverté. México, 1992.

Stewart, J. **Cálculo**. Grupo editorial iberoamérica. México, 1994.

Stewart, J. **Cálculo. Conceptos y contextos**. International Thomson Editores. México, 1999.

Zill, G. D. **Cálculo con geometría analítica**. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1997.