Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades

DESARROLLO DE UN TEMA CON FINES DIDÁCTICOS. RUBRO I Y III-B.

Tema:
Criterios de semejanza de Triángulos

Material desarrollado para la primera olimpiada cecehachera.

Presentado por:
Maritza Vázquez Hernández
CCH Vallejo

Ciudad de México a 11 de noviembre de 2020

Contenido

Presentación

En la materia de Matemáticas II, se ubica la unidad 4. Congruencia, semejanza y teorema de Pitágoras dentro de los programas actualizados de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). Nuestro bachillerato provee conocimientos de cultura básica[1] para lo cual esta unidad tiene como propósito que, al finalizar, el alumno: Aplique los conceptos de congruencia y semejanza y use el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumente deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

Específicamente en este trabajo se tratará el aprendizaje: "*El alumno establece como válidos los criterios de semejanza*", que tiene como temática: *los criterios de semejanza de Triángulos.*

La temática se desarrollará de la siguiente manera:

1. Razón de proporcionalidad.
2. Semejanza en triángulos.
   2.1 Teorema fundamental de proporcionalidad.
   2.2 Recíproco del teorema fundamental de proporcionalidad.
3. Datos para establecer semejanza en triángulos.
4. Criterios de semejanza en triángulos.
   4.1 LAL (lado-ángulo-lado).
   4.2 AAA (ángulo-ángulo-ángulo).
   4.3 LLL (lado-lado-lado).
5. Cómo los utilizamos

Las aplicaciones de la proporcionalidad en triángulos son muy variadas, de ahí que es fundamental que los estudiantes comprendan justificaciones teóricas que les permitan hacer un uso correcto de las mismas, en este caso solo para triángulos, aunque teniendo esto como base será más fácil que puedan trasladarlo hacia otro tipo de figuras geométricas.

[1] A diferencia de otros sistemas, en la UNAM el bachillerato tiene carácter propedéutico; no es terminal, no es técnico, no está enfocado hacia un área específica del conocimiento. "Plan de estudios de Matemáticas I a IV." Área de Matemáticas, Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, 2016.

Desarrollo

Thales fue un gran matemático de su época al que se atribuye el cálculo de la distancia de un barco a la costa. En una época en la que la ciudad de Mileto iba a ser invadida por mar los soldados se acercaron con el matemático para pedir que calculara la distancia a la que se encontraban los barcos para ajustar sus catapultas y así poder atacar de manera efectiva desde tierra. En la siguiente imagen se observa cómo logró la hazaña. Subió a lo alto de una torre con dos listones (tablas) con medidas conocidas que estaban unidas formando un ángulo recto, colocó el "instrumento" alineándolo con su propio vertical y desde ese punto observó uno de los barcos a lo lejos realizando una marca sobre la parte horizontal de los listones donde cruzaba su visión del barco.

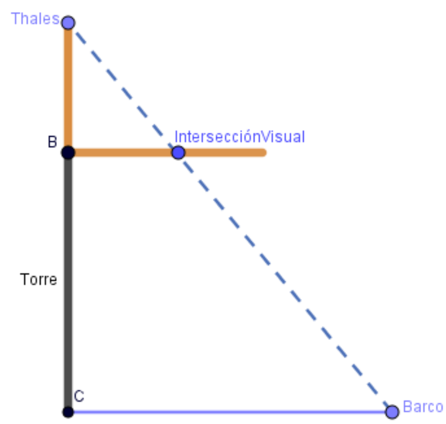


Figura 1. Calculando distancia de barco

Para justificar porqué funcionó la forma de cómo Thales determinó la distancia del barco es necesario abordar otras temáticas primero, a lo largo de las cuales iremos analizando diferentes situaciones que nos permitirán argumentar este escenario.

1. Razón de proporcionalidad.

La proporcionalidad se maneja, de manera general, como razones que relacionan dos magnitudes y la llamaremos **razón de proporcionalidad**. Cuando se realiza el cálculo correspondiente en una razón de proporcionalidad, división, este valor es la **constante de proporcionalidad**.

Problema. En la fotografía de un terreno triangular, se aprecia que las longitudes de los tres lados son de 4 cm, 5 cm y 3 cm, respectivamente. El lado más corto del terreno mide 400 m, realmente. Determinar la razón de proporcionalidad de las medidas de la fotografía respecto a las medidas reales del terreno[2].

Aún no tenemos las bases suficientes para su solución, por lo que primero abordaremos algunos conceptos.

Desde hace muchos siglos la cartografía, que se ha dedicado a la elaboración de los mapas, ha hecho uso de la razón de proporcionalidad, en este ámbito se le conoce como escala y también se utiliza en otras ramas como en el diseño o la arquitectura para la elaboración de planos o maquetas en las que se observan figuras con similares con diferentes dimensiones.

Por ejemplo, cuando realizas la búsqueda de alguna dirección en alguna aplicación como Google Maps, también se encuentra indicada la escala en la que está el mapa mostrado. Al realizar la búsqueda de CCH Vallejo aparece el siguiente mapa:

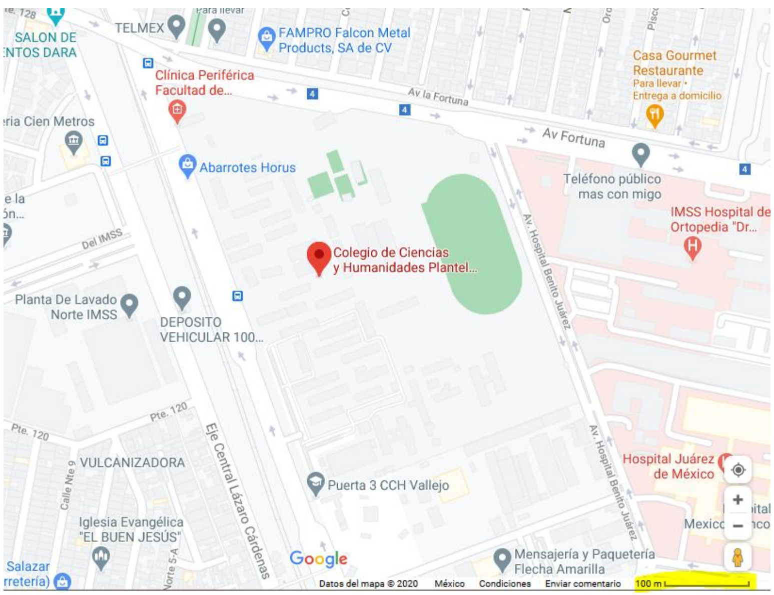


Figura 2. Mapa de la ubicación de CCH Vallejo

En la parte inferior se indica su escala, es decir, la longitud ahí mostrada representa 100 m en realidad, para obtener la razón de proporcionalidad es necesario medir el segmento que se observa, supongamos que el segmento que se encuentra marcado en amarillo, al lado de 100m, mide 3 cm.

Ahora bien, para escribir su escala es importante saber que la relación entre las magnitudes se puede escribir en dos sentidos:

a. Medidas del mapa respecto a medidas reales, la razón quedaría como $\frac{3}{100}$ o $3:100$.

[2] Miller, Charles D., Heeren, Vern E., Hornsby, John. (2013). Matemática: razonamiento y aplicaciones. (12ª. ed.) México: Pearson. Addison Wesley. pp. 533.

b. Medidas reales respecto a medidas del mapa, entonces la razón sería $\frac{100}{3}$ o $100 : 3$.

Numéricamente se observa que no es lo mismo, así que la manera en cómo se escribe la razón de proporcionalidad es importante para que exista correspondencia.

Retomando el problema de la fotografía tenemos la correspondencia del lado más pequeño en la fotografía respecto al lado más pequeño con medidas reales, $3\ cm \leftrightarrow 400\ m$. Para determinar la razón de proporcionalidad debemos tener las mismas unidades, si todo lo trabajamos en centímetros nos queda, $3 : 40\,000$.

2. Semejanza en triángulos.

La semejanza la observamos muy seguido en nuestra vida diaria, otro ejemplo es cuando sacamos una selfi con nuestro celular, ésta genera una imagen semejante a la de nuestro rostro en el tamaño de nuestro dispositivo.

En matemáticas la **semejanza** son dos figuras geométricas con la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

Específicamente para que exista semejanza deben cumplirse dos situaciones: a) que sus lados correspondientes sean proporcionales y b) que sus ángulos correspondientes sean congruentes (≅).

Antes de determinar si dos triángulos son semejantes es necesario ubicar lados correspondientes u homólogos, cuando se trata de congruencia no resulta complicado encontrar esta relación pues tienen la misma longitud los segmentos, pero para calcular la razón de proporcionalidad no se puede comparar deliberadamente cualquier pareja de lados de los triángulos.

De hecho, la **congruencia** es un caso particular de la semejanza, en el que, al ser sus lados iguales la razón de proporcionalidad es uno.

En el caso de semejanza no siempre los triángulos se encuentran en la misma posición, por lo que, si se conocen los valores de los ángulos, a partir de estos se puede hacer la correspondencia de sus lados.

En la figura 2 se muestran los ΔABC y ΔFDE, donde $\measuredangle A \cong \measuredangle F$ (el ángulo A es congruente al ángulo F), $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle D$.

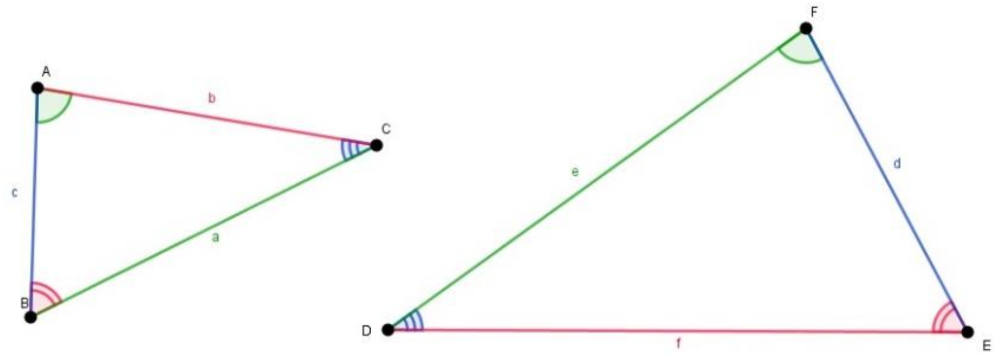


Figura 3. Correspondencia de ángulos congruentes

Así entonces la correspondencia entre estos triángulos es $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta FED$.

Como se observa en la nomenclatura de correspondencia se debe respetar la relación entre los ángulos congruentes, de ahí que el orden en el que están escritos los vértices en la correspondencia anterior se respete:

$$\measuredangle A \leftrightarrow \measuredangle F \qquad \measuredangle B \leftrightarrow \measuredangle E \qquad \text{y} \qquad \measuredangle C \leftrightarrow \measuredangle D$$

por lo mismo existen diferentes formas de expresarla: $\Delta BCA \leftrightarrow \Delta EDF$, $\Delta CAB \leftrightarrow \Delta DFE$, etc.

Una vez que se ha determinado la correspondencia en ángulos se puede hacer la relación entre lados correspondientes:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{EF} \qquad \overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED} \qquad \text{y} \qquad \overline{CA} \leftrightarrow \overline{FD}$$

En el momento de hacer la correspondencia $\overline{AB}$ es homólogo al $\overline{EF}$, cuando se habla de semejanza en realidad significa que son proporcionales y se refiere a sus magnitudes por lo que solo se escribirá $AB \leftrightarrow EF$, entonces se cumple:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{ED} = \frac{AC}{FD}$$

La proporcionalidad no solo se observa en la correspondencia de izquierda derecha ($AB \leftrightarrow FE$) sino también en sentido contrario por lo que también se cumple:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{FD}{AC}$$

Otra forma de determinar los lados homólogos es a partir de sus magnitudes como se muestra en la siguiente figura.

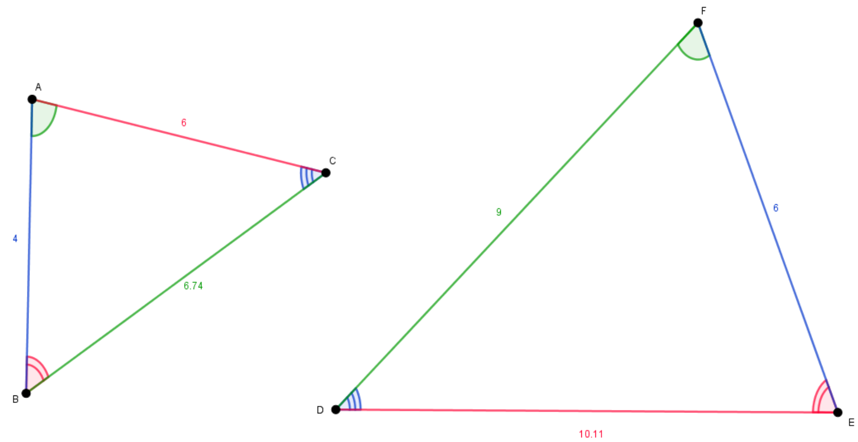


Figura 4. Correspondencia de lados homólogos

Si se observan los valores de los segmentos y de acuerdo con sus magnitudes podemos hacer la correspondencia, dicho de otra manera, el segmento más grande del triángulo ABC con el segmento más grande del triángulo FDE. Primero podemos escribir:

1. Para el ΔABC: $\overline{AB} = 4\,u, \overline{BC} = 6.74\,u$ y $\overline{CA} = 6\,u$.

2. Para el ΔFDE: $\overline{FD} = 9\,u, \overline{DE} = 10.11\,u$ y $\overline{EF} = 6\,u$.

La correspondencia de lados homólogos será:

$AB \leftrightarrow EF$ $\quad$ $CA \leftrightarrow FD$ $\quad$ y $\quad$ $BC \leftrightarrow DE$

Y sus razones de proporcionalidad:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{6.74}{10.11}$$

O también como:

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{10.11}{6.74}$$

Entonces cuando se cumple la proporcionalidad entre los lados y congruencia con los ángulos existe **semejanza (~)** entre dos triángulos y se expresa $\Delta BCA \sim \Delta EDF$.

2.1 Teorema fundamental de proporcionalidad (Teorema de Thales)

No siempre los triángulos se encuentran por separado, este es el caso en el que se basa el Teorema fundamental de proporcionalidad.

El **teorema fundamental de proporcionalidad** dice que: Dado un segmento que sea paralelo ($\overline{DE}$) a uno de los lados de un triángulo ($\overline{BC}$) y que intersecte en dos puntos (D y E) a los otros dos lados, los segmentos que resultan son proporcionales.

$$\textbf{Si } \overline{\boldsymbol{DE}} \parallel \overline{\boldsymbol{BC}} \textbf{ entonces } \frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{DB}} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{EC}}$$

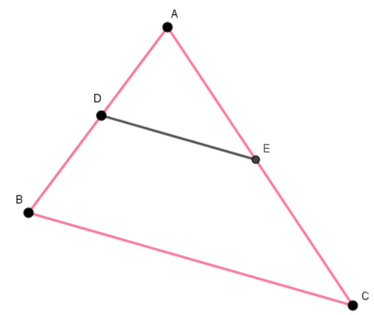


Figura 5. Teorema fundamental de proporcionalidad.

Para comprobar este teorema se trazan dos segmentos auxiliares, primero uno que una los puntos B y E, un segundo para C y D.

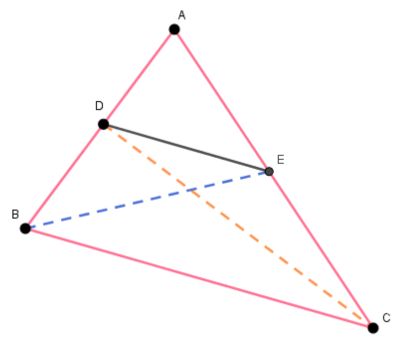
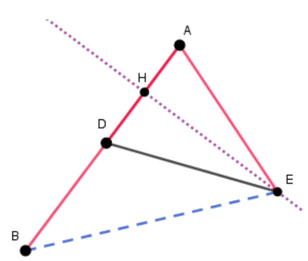


Figura 6. Trazos auxiliares

Primero tomamos las parejas de triángulos ΔDEA y ΔDEB, estos comparten la altura[3] que se ubica en el segmento HE. Si calculamos el área para ambos triángulos con la fórmula base por altura entre dos, podemos obtener la primera razón de proporcionalidad con las áreas de estos triángulos.

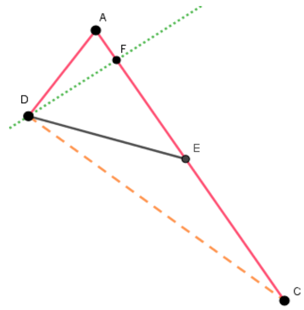


$$\frac{AD(\frac{HE}{2})}{DB(\frac{HE}{2})} = \frac{AD}{DB}$$

Figura 7. Primera razón de proporcionalidad

[3] Puertas (1994) retomando definiciones del libro VI de Euclides, menciona que en toda figura, la altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base.

En segundo lugar, consideramos una pareja de triángulos que se generan, ΔDEA y ΔDEC, la altura para ambos triángulos es la misma DF. Si calculamos la proporción de sus áreas tenemos:



$$\frac{AE(\frac{DF}{2})}{EC(\frac{DF}{2})} = \frac{AE}{EC}$$

Figura 8. Segunda razón de proporcionalidad

Además, como los ΔDEB y ΔDEC son triángulos con la misma base, entonces se cumple: $\boldsymbol{\frac{AD}{DB}} = \boldsymbol{\frac{AE}{EC}}$

2.2 Recíproco del teorema fundamental de proporcionalidad (Recíproco del Teorema de Thales).

Para un triángulo cualquiera ABC donde D pertenezca a $\overline{AB}$ y E a $\overline{AC}$ sus segmentos resultantes son proporcionales $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, entonces $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

Si $\boldsymbol{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$ **entonces** $\boldsymbol{\overline{DE} \parallel \overline{BC}}$

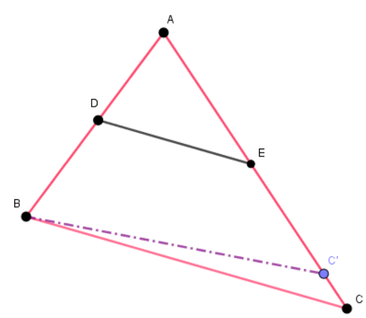


Figura 9. Recíproco del teorema fundamental de proporcionalidad

Suponiendo que $\overline{BC'}$ sea paralelo a $\overline{DE}$ cuya intersección con $\overline{AC}$ es en el punto C', se debería cumplir $\boldsymbol{\frac{AD}{DB}} = \boldsymbol{\frac{AE}{EC'}}$

Al considerar lo que dice el recíproco del teorema fundamental de proporcionalidad $\frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{DB}} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{EC}}$.

Si observamos la razón del lado izquierdo de ambas igualdades es la misma por lo que $\frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{EC}} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{EC\prime}}$

Los numeradores son los mismos, entonces $EC = EC'$ por lo que $C = C'$.

Analicemos un poco la siguiente figura y consideremos los teoremas anteriores; al tener un segmento paralelo a uno de los lados del triángulo original entonces se generan ángulos correspondientes congruentes.

1. $\measuredangle A \cong \measuredangle A$ $\quad$ $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ $\quad$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle D$

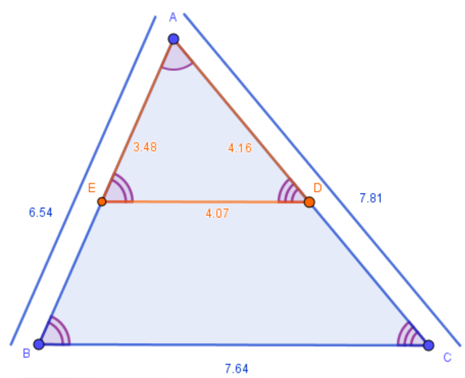


Figura 10. Teoremas de proporcionalidad

2. $$\frac{6.54}{3.48} = \frac{7.81}{4.16} = \frac{7.64}{4.07} = 1.87$$

En los teoremas anteriores solo se hacía la referencia a que la proporcionalidad se daba en dos de los lados de los triángulos observados, pero en realidad se cumple para los tres lados de la figura, con esto se cumplen las dos situaciones que exige la semejanza: *a) lados correspondientes proporcionales y b) ángulos homólogos congruentes, así* $\Delta ABC \sim \Delta AED$.

3. Datos para establecer semejanza.

Consideremos la siguiente situación. Una persona que mide 1.5 m de altura se coloca a 3.5 m de una lámpara. ¿Cuánto mide su sombra sobre una pared que está a 10 m de la lámpara?[4]

[4] Carpinteyro, E. (2018). *Geometría y Trigonometría. Conceptos y aplicaciones*. México: PATRIA educación. pp. 175.

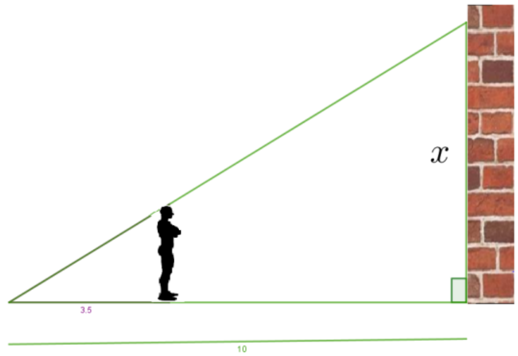


Figura 11. Problema sombras

El busto forma un ángulo recto con el piso y la pared tiene el mismo ángulo, además la lámpara es de donde nace el haz de luz por lo que el ángulo que genera es el mismo para ambos triángulos, con esta información:

$$\frac{10}{3.5} = \frac{x}{1.3}$$

Para conocer el valor de la sombra en la pared:

$$x = \frac{10(1.3)}{3.5}$$

$$x = 3.17\ m$$

La sombra proyectada en la pared tendrá una altura de 3.17 m.

Veamos el siguiente problema. Si los segmentos de la figura son $\overline{CP} = 16\ u,\ \overline{CA} = 20\ u, \overline{CQ} = 25\ u$ y $\overline{CB} = 30\ u$, ¿será $\overline{\boldsymbol{PQ}}\ \parallel\ \overline{\boldsymbol{AB}}$?[5]

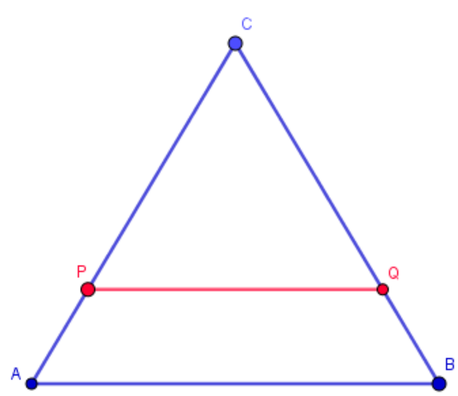


Figura 12. Problema de segmentos paralelos.

[5] Moise, E. E. y Downs, F. L. (1972). *Serie matemática moderna. Geometría*. Cali, Colombia: Norma. pp. 333.

Recordemos que las figuras son representaciones que nos ayudan a visualizar o entender mejor un problema, si observamos la figura se ve que el $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ pero debemos comprobarlo y para eso nos ayudaremos del recíproco del teorema fundamental de la proporcionalidad que aplicado a esta situación: "**Si** $\boldsymbol{\frac{CA}{CP} = \frac{CB}{CQ}}$ **entonces** $\boldsymbol{\overline{PQ} \parallel \overline{AB}}$ **".**

$$\mathbf{\frac{20}{16} = \frac{30}{25}}$$

$$\mathbf{1.25 \neq 1.2}$$

Las razones de proporcionalidad son diferentes, por lo tanto $\boldsymbol{\overline{PQ} \nparallel \overline{AB}}$**,** no son paralelos los segmentos y como consecuencia ΔCAB no es semejante a ΔCPQ.

4. Criterios de semejanza en triángulos.

Pero ¿cuántos datos se necesitan en un problema para determinar si una pareja de triángulos es semejante? Retomemos el teorema fundamental de proporcionalidad que dice:

$$\textbf{Si } \boldsymbol{\overline{DE} \parallel \overline{BC}} \textbf{ entonces } \boldsymbol{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$

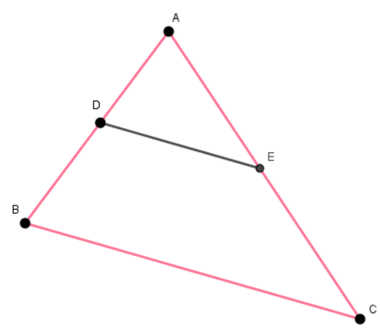


Figura 5. Teorema fundamental de proporcionalidad.

Y su recíproco:

$$\textbf{Si } \boldsymbol{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}} \textbf{ entonces } \boldsymbol{\overline{DE} \parallel \overline{BC}}$$

4.1 Teorema LAL (lado-ángulo-lado)

Para los triángulos $ABC \ y \ DEF$, la correspondencia: $ABC \leftrightarrow DEF,$ $\boldsymbol{\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}}$ y $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

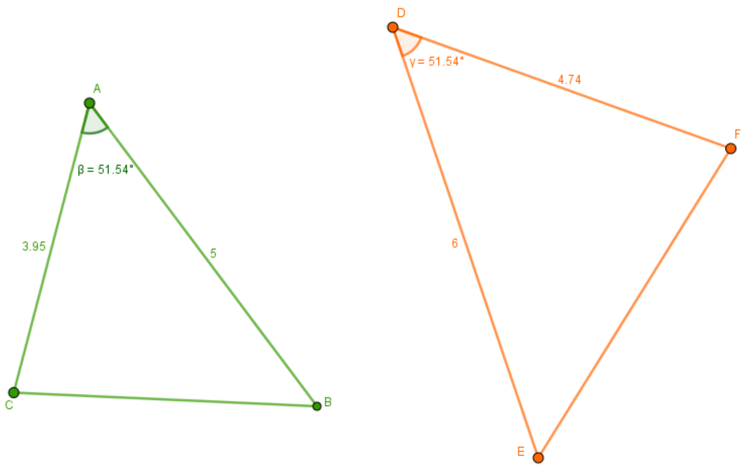


Figura 13. Teorema LAL

Para que se cumpla este teorema el ángulo congruente debe ser aquel que se forma con los segmentos proporcionales, aunque no estén en la misma posición si superponemos ambos triángulos se obtiene la siguiente figura.

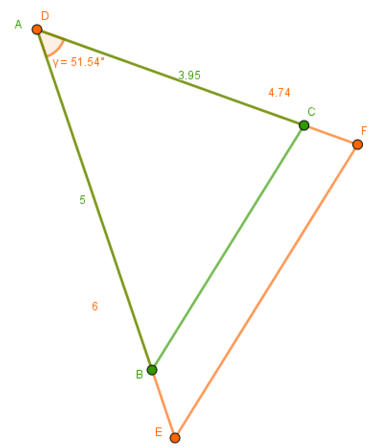


Figura 14. Triángulos superpuestos teorema LAL

$\frac{3.95}{4.74} = \frac{5}{6}$, se cumple $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$. ¿En qué otro momento hicimos uso de una figura similar? En el teorema fundamental de proporcionalidad, $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ por lo que también $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ aún sin saber su valor y por consiguiente $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{DE}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{DF}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{EF}}$, cumpliéndose $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

4.2 Teorema AAA (ángulo-ángulo-ángulo)

Para los triángulos $ABC\ y\ DEF$, la correspondencia: $ABC \leftrightarrow DEF,\ \measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle F$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

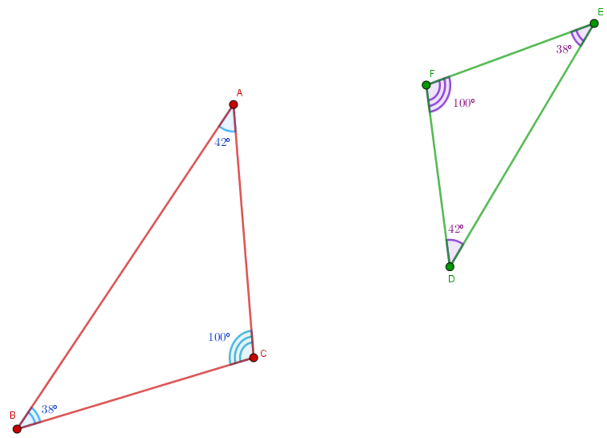


Figura 15. Teorema AAA

En este caso no conocemos las dimensiones de los triángulos, solo los ángulos. ¿De lo que se ha visto anteriormente, cómo podríamos sustentar que son semejantes?

Es ahora la comparación con el recíproco del teorema fundamental de proporcionalidad. El segmento DE es paralelo a AB. Por lo que $\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{DE}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{DF}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{EF}}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Como sabemos la suma de los ángulos interiores en un triángulo debe ser 180°, por lo que si se conocen los valores de sólo dos ángulos el tercero puede calcularse sin problema, así que para decir si dos triángulos son semejantes se pueden conocer solo 2 de sus tres ángulos internos.

4.3 Teorema LLL (lado-lado-lado)

Para los triángulos $ABC\ y\ DEF$, la correspondencia: $ABC \leftrightarrow DEF,$ si todos sus lados son proporcionales ($\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{DE}} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{DF}} = \frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{EF}}$), entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

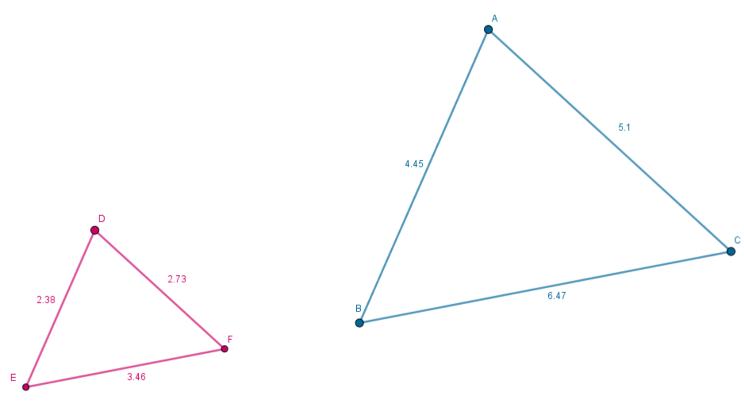


Figura 16. Teorema LLL

Continuando una metodología similar a los teoremas anteriores obtenemos:

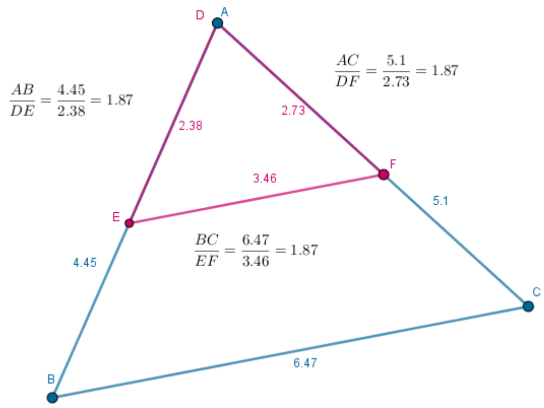


Figura 17. Triángulos superpuestos teorema LLL.

5. Cómo los utilizamos.

En los cuatro problemas que se han planteado hasta el momento, se han podido resolver mediante semejanza de triángulos, relaciona cada situación con alguno de los teoremas (LAL, AAA o LLL).

¿Recuerdas la situación con la que se comenzó? En una época en la que la ciudad de Mileto iba a ser invadida por mar los soldados se acercaron con el matemático para pedir que calculara la distancia a la que se encontraban los barcos para ajustar sus catapultas y así poder atacar de manera efectiva desde tierra.

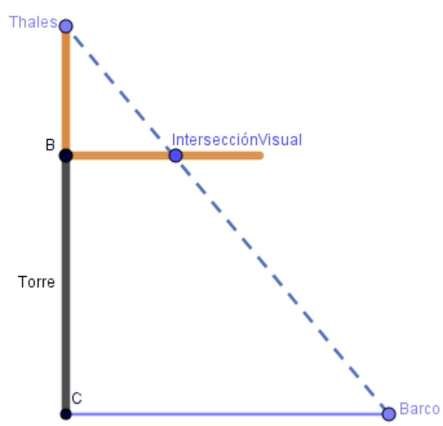


Figura 1. Calculando distancia de barco

¿Ya tenemos herramientas suficientes para justificar por qué Thales pudo ayudar a los soldados? Efectivamente, el matemático utilizó la semejanza entre triángulos, rectángulos específicamente, para lograr calcular la distancia de los barcos, por eso fue necesario hacer una marca en la parte horizontal del listón para que éste estuviera paralelo a la distancia de la torre al barco. ¿qué teorema pudo poner en práctica en esta construcción?

Pongamos a prueba los aprendizajes que han logrado, ahora les corresponde resolver los siguientes ejercicios:

1. Dada la siguiente figura, con las propiedades indicadas, determina todos los valores de x para los cuales se cumple que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

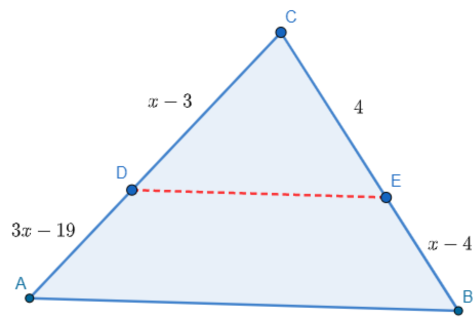


Figura 18. Figura de ejercicio de triángulos semejantes.

2. A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 8 m de longitud que consta de 20 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo. Debido a que las llamas ascienden rápidamente hacia arriba, es necesario averiguar si es posible con dicha escalera evacuar al tercer piso del hospital. Cada planta tiene 2,5 m de altura. ¿Podrán ser rescatados?

Instrumentación didáctica

Inicio. Solicitar que los alumnos investiguen la demostración del teorema de Pitágoras utilizando semejanza, además de mencionar por lo menos otras dos demostraciones diferentes.

Desarrollo. A partir de la siguiente demostración http://mateint.unam.mx/pitagoras/d_demo01_m.html solicitar a los alumnos que justifiquen la semejanza que indican en los triángulos formados, utilizando alguno de los teoremas revisados (AAA, LLL, ALA).

Cierre. Que los alumnos resuelvan el siguiente ejercicio:

Un solar triangular tiene lados de longitudes 130 pies, 140 pies y 150 pies, como se indica en la figura. La longitud de la perpendicular desde una esquina al lado de 140 pies es de 120 pies. Se va a construir una verja perpendicular al lado de 140 pies de manera que el área del solar quede dividida en dos partes iguales ¿A qué distancia de A sobre $\overline{\mathrm{AB}}$ deberá construirse la verja?

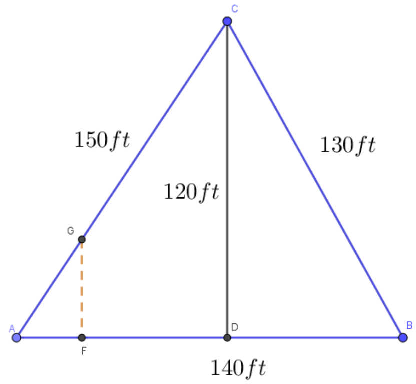


Figura 19. Problema solar

Evaluación. Considerando la figura del problema anterior se traza un segundo triángulo con una razón de proporcionalidad de 1.5, ¿cuáles serán las medidas de los lados y la altura del nuevo triángulo? ¿cuál sería el valor su área?

Conclusiones.
¿Recuerdan las situaciones que se deben cumplir para que exista semejanza? *a) que sus lados correspondientes sean proporcionales y b) que sus ángulos correspondientes sean congruentes (≅).*

Si analizamos estas condiciones respecto a los teoremas anteriores, hablando de triángulos ¿se deben cumplir ambas?

No es necesario que ambas sucedan al mismo tiempo para que exista semejanza en este tipo de figuras, pueden ser sus ángulos correspondientes congruentes (teorema AAA) o sus lados correspondientes proporcionales (teorema LLL), incluso se da el caso en el que se combinan estas (teorema LAL).

Es importante tener en cuenta los teoremas revisados pues no siempre se "ofrece" toda la información de manera explícita, regresemos al primer problema planteado:

En el problema de la fotografía de un terreno triangular, damos por hecho que se cumple la semejanza porque es como si se tratara de un plano a *escala* de un terreno real por lo que deben tener la misma forma (ángulos congruentes, teorema AAA). En este ejercicio se brinda el valor de los lados del triángulo "pequeño" y una medida real, con la cual se encontró su razón de proporcionalidad $3 : 40\,000$. Al conocer que se cumple la proporción entre la imagen de una fotografía y la imagen que se fotografió incluso podemos calcular los valores de los lados faltantes. Sea x: lado mediano del terreno en metros y y: lado grande del terreno en metros.

$$\frac{3}{40\,000} = \frac{4}{x} = \frac{5}{y}$$

Para encontrar las medidas reales solo consideraremos una pareja de razones y despejaremos la incógnita:

$$x = \frac{4\,(40\,000)}{3} \qquad\qquad y = \frac{5\,(40\,000)}{3}$$

$$x = 53\,333.\overline{3} \qquad\qquad y = 66\,666.\overline{6}$$

Recordemos que la razón de proporcionalidad está calculada en cm por lo que las medidas en realidad del terreno son:

$$x = 533.\overline{3}\text{ m} \qquad\qquad y = 666.\overline{6}\text{ m}$$

Comentario sobre la aplicación del material

El material está diseñado para que los estudiantes lo revisen por su cuenta y puedan generar aprendizajes significativos a partir de su contenido y realización de ejercicios.

Se propone al docente que haga uso de él, que primero ofrezca la parte teórica del documento y que para la instrumentación didáctica participe de manera presencial o sincrónicamente en su aplicación, para que le ayude al docente a relacionar con áreas y volúmenes semejantes, así como la semejanza de otras figuras geométricas.

Bibliografía.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). *Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. Educação e Pesquisa*, 44, e182013. Epub November 23, 2018. https://dx.doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Carpinteyro, E. (2018). *Geometría y Trigonometría. Conceptos y aplicaciones*. México: PATRIA educación. pp. 175.

Jiménez D. (2005*). Geometría, el encanto de la forma*. Caracas, Venezuela: CEC, SA.

Martínez Juste, S., Muñoz Escolano, J. M., Oller Marcén, A. M., & Ortega del Rincón, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 20(1), 95-122. https://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2014

Mochón Cohen, Simón. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y a alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, 24(1), 133-157. Recuperado en 09 de mayo de 2019, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262012000100006&lng=es&tlng=es.

Moise, E. E. y Downs, F. L. (1972). *Serie matemática moderna. Geometría*. Cali, Colombia: Norma. pp. 333.

Parra, F., Ávila, R., Ávila, J. (2013). *El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo*. En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1241-1249). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4222/1/ParraElsignificadoALME2013.pdf

“Programa de estudios de Matemáticas I a IV.” Área de Matemáticas, Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, 2016.

Puertas, M. L. (1994), Euclides. *Elementos. Libros V-IX.* Biblioteca Clásica Gredos, Madrid: Editorial Gredos S.A.

Torre Puente, J. C., (2004*). Hacia una enseñanza universitaria centrada en el aprendizaje*. Madrid, España: Universidad Pontificia Comilla de España. pp. 130-132.

Vargas Alejo, Verónica, Escalante, César Cristóbal, & Carmona, Guadalupe. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación matemática*, 30(1), 213-236. https://dx.doi.org/10.24844/em3001.08

Villarreal, C. E., González-Hernández J. (s.f.) *Geometría* (pp. 55-61). Recuperado el 11 de mayo de 2019 de http://eprints.uanl.mx/1822/1/Geometria.pdf

Xunta de Galicia. (s.f.-c). Teorema de Thales y Semejanza. Recuperado 29 mayo, 2019, de https://www.edu.xunta.es/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491480036/contido/ud9_teorema_Thales_y_semejanza/index.html