DIAGNÓSTICO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS PARA LA ACTUALIZACIÓN DEL PLAN Y LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES DE LA UNAM

Proceso de Actualización del Plan y los Programas de Estudio

Mayo, 2012

Diagnóstico del Área de Matemáticas

ELABORADO POR:

Ángel Homero Flores Samaniego
Hugo Hernández Trevethan

Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM
Mayo de 2012

PRESENTACIÓN

El proceso de Actualización del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) requiere de un diagnóstico integral de sus componentes. El diagnóstico de las áreas curriculares —Ciencias Experimentales, Matemáticas, Histórico-Social y Talleres de Lenguaje y Comunicación— y sus asignaturas correspondientes, resulta ser un insumo crucial para dar sustento a los eventuales ajustes o modificaciones.

En esta perspectiva, se solicitó a grupos de profesores, con experiencia en la docencia en cada una de las cuatro áreas, la elaboración de un diagnóstico por cada área de conocimientos del Plan de Estudios. Para realizar dicho diagnóstico se propuso a los grupos una guía analítica con los siguientes conceptos:

a) Aprendizajes esperados por área y asignaturas correspondientes.
b) Contenidos de aprendizaje por área y asignaturas.
c) Resultados de aprendizaje por área y asignaturas, según el desempeño de los alumnos.
d) Criterios de evaluación del aprendizaje y para la asignación de calificaciones al desempeño de los alumnos.
e) Estrategias de enseñanza/aprendizaje por asignatura del área.
f) Tiempo destinado a la enseñanza por asignatura del área.
g) Perfil del docente por asignatura del área.
h) Tutorías destinadas a la asignatura por área.
i) Asesorías destinadas a la asignatura por área.

El análisis diagnóstico se realizó bajo un esquema de identificación de las características distintivas positivas que dan certeza en el logro de los aprendizajes de los alumnos (fortalezas), prescritos por cada área del Plan de Estudios; así como los rezagos que no contribuyen al logro de dichos aprendizajes (debilidades), y los consecuentes cambios y/o innovaciones que se requieran para asegurar la calidad de los resultados de aprendizaje de los alumnos del CCH y, con ello, la adquisición de las habilidades, capacidades y conocimientos definidos por el perfil de egreso de la institución.

Los profesores que participaron en la elaboración de los diagnósticos de área dispusieron de la información institucional disponible: Diagnóstico Institucional del CCH, trayectorias escolares de los alumnos, reportes del Examen Diagnóstico Académico (EDA), estudios de Ingreso y Egreso de alumnos del Colegio, Indicadores de aprobación/reprobación de las asignaturas, Reportes sobre el Examen Diagnóstico de alumnos de primer ingreso a las licenciaturas de la UNAM, entre otros. Adicionalmente, los propios profesores recurrieron a las fuentes de datos e información que consideraron necesarios para la realización del diagnóstico respectivo.

El resultado final del trabajo realizado por los profesores son los cuatro diagnósticos de área que hoy se ponen a disposición de la comunidad del Colegio para su revisión. Su estructura es muy similar y destaca el carácter propositivo, pues contienen orientaciones claras sobre la solución de la problemática identificada, las cuales son un insumo imprescindible para las comisiones encargadas de la actualización de los programas de estudio de las asignaturas del plan vigente del Colegio.

ÍNDICE

Introducción

En el presente documento se hace una recapitulación de los elementos más importantes que, a consideración de sus autores, se deberían contemplar en un estudio diagnóstico del Área de Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Además de aspectos que dan cuenta específicamente del estado de la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina, es necesario considerar aspectos aledaños como la concepción de la Matemática adoptada por el Colegio, y su impacto en la metodología o metodologías para la enseñanza. Por tanto se hace indispensable hacer una revisión exhaustiva del documento Orientación y Sentido del Área de Matemáticas (CCH, 2005), pues es aquí donde se define la Matemática que se enseña en el Colegio y las consideraciones teóricas y metodológicas que fundamentan la estructura y el contenido del currículo, y debería dar las pautas para la evaluación del desempeño del estudiante, del profesor y del currículo mismo.

También se hace necesaria una revisión de las posturas teóricas de la enseñanza de la Matemática producidas en el ámbito de la investigación educativa, en especial aquellas afines a la filosofía educativa del Colegio.

Por último, a partir de lo anterior, consideramos necesario dar algunas propuestas sobre la dirección que debería tomar la revisión curricular del Área, especialmente en cuanto a los aprendizajes relevantes, la metodología de enseñanza y la evaluación.

La enseñanza de la matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades

Los principios educativos del CCH, aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser, y su Modelo Educativo, con la división por áreas, en el que el estudiante debe ser actor principal de su aprendizaje, y formarse como un individuo crítico, deben ser la primera de las orientaciones para un proceso de revisión curricular.

El documento Orientación y Sentido del Área de Matemáticas, publicado por el Colegio en agosto de 2005, tiene como propósito orientar “las acciones generales y particulares, destinadas a favorecer el logro de la misión educativa del Colegio en las condiciones reales en que esta se cumple y atiende a la necesidad de que la práctica docente de los profesores del Área de Matemáticas contribuya a la formación del egresado”. (p.3)

En este documento se define la Matemática como una ciencia y una herramienta: ciencia que permite hacer conjeturas y validarlas, que admite la comisión de errores y su corrección; y herramienta que sirve para resolver problemas dentro y fuera del ámbito de la Matemática.

A partir de esta concepción de la Matemática se hace una reflexión que tiene como fin **justificar la organización curricular del Área de Matemáticas.**

El documento en cuestión podría tomarse como base para hacer un análisis de los Programas del Área de Matemáticas, su estructura y sus planteamientos educativos. Este análisis sería de utilidad para dar respuesta a algunas interrogantes que surgen del diagnóstico del estado del Plan de Estudios y los Programas con miras a su ratificación o su modificación. Para que pueda fungir como fundamento real de los Programas y sirva de orientación a los profesores para lograr los cometidos educativos del Colegio, habría que hacerle modificaciones de fondo.

La revisión crítica de este documento tiene como objetivo poner en relieve aquellos aspectos en los que debería hacerse cambios o correcciones y, al mismo tiempo, dar las pautas para el diagnóstico del estado que guarda el Área de Matemáticas con respecto a su configuración global y sus Programas de Estudio.

Empezaremos por revisar la selección de los "conocimientos que se **proporcionarán** al estudiante'. Para ello se tomaron en cuenta tres consideraciones:

Primero, dado que muchos conceptos matemáticos se construyen a partir de conocimientos previos, se requiere incluir en las asignaturas obligatorias del plan de estudios conceptos y procedimientos que son sustento indispensable de otros más especializados, tanto de la propia Matemática como de otros campos del saber, de modo que el egresado del Colegio cuente con la preparación suficiente para tener éxito en sus estudios posteriores, cualesquiera que estos sean. (p. 5)

En segundo término, al ser el bachillerato el último escaño donde se brinda una educación no especializada, debe también proporcionar conocimientos para comprender y afrontar con mejores recursos culturales diversas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, interpretar y analizar la información cuantitativa que se presenta frecuentemente en los diversos medios de comunicación, o la que se requiere para tomar diversas decisiones importantes. (p. 5)

Por último, dado que las exigencias del trabajo productivo se han incrementado y requieren habilidades para resolver problemas y actualizarse permanentemente, tanto en recursos teóricos del campo laboral como en el manejo de software especializado y de instrumentos o aparatos cada vez más sofisticados, es indispensable dotar al alumno de estrategias de aprendizaje y capacidades analíticas que le permitan enfrentar esos requerimientos. (p. 6)

Se señala que estas consideraciones dan la pauta para determinar qué contenidos se enseñarán en el Colegio. El problema con estos contenidos es que entre sus componentes aprendizajes, estrategias y temáticas no existe la concordancia que debería.

Por ejemplo, en la primera unidad de Matemáticas I se tiene como una de las cuatro temáticas la siguiente:

Números Racionales. Distintos significados y representaciones: División; Parte de un todo; Razón; Porcentajes; Fracciones equivalentes; Notación decimal; Orden, representación gráfica en la recta numérica; Operaciones básicas; Mínimo común múltiplo; Máximo común divisor; Prioridad de las operaciones; Uso de signos de agrupación y prioridad del cálculo.

Se esperaría que el conocimiento de los conceptos propuestos sea base para adquirir otros más especializados, pero algunos de ellos no se vuelven a utilizar en unidades o cursos posteriores; éste es el caso del Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor.

Como estrategias de enseñanza se proponen:

- *En el periódico u otros medios de comunicación pueden ser recursos para que los alumnos interpreten gráficas y den significado a los signos de los números (sic).*

- *Proponer problemas que involucren la aplicación de porcentajes, así como su representación gráfica (barras, circular), insistir en que la cantidad base del cálculo del porcentaje representa 100% o la unidad.*
- *Se recomienda el uso de la recta numérica para dar sentido y significado geométrico a las operaciones de números con signos.*
- *Se puede utilizar la recta numérica y las propiedades de los números para calcular expresiones aritméticas.*
- *El uso de la calculadora permite explorar los números, por ejemplo: determinar el número más grande que le cabe a la pantalla, generar aproximaciones de números irracionales con la función radical, conversión a números decimales, etcétera.*
- *La representación geométrica de la suma, resta, multiplicación y división de números enteros y racionales es un recurso para dar significado a los procedimientos de las operaciones básicas.*
- *Para visualizar la propiedad de densidad de los números racionales en la recta numérica se puede recurrir al uso de una escala conveniente y poner a los alumnos a obtener y localizar entre dos racionales dados otro racional.*

Con la representación de los distintos conjuntos numéricos, construir la recta real, haciendo mención de la de densidad de los racionales y de la existencia de los irracionales para “rellenar” la recta real (sic).

En cuanto a las estrategias, es más fácil ver las consideraciones. Por ejemplo, el uso de las calculadoras puede obedecer a la tercera consideración sobre *‘el manejo de software especializado y de instrumentos o aparatos cada vez más sofisticados.’*

Ante estos planteamientos surge la pregunta de si 15 horas serán suficientes para estudiar la primera unidad.

Si revisamos con esta perspectiva todas las unidades de los Programas de Matemáticas, encontraremos que se está privilegiando la algoritmia y el enciclopedismo en aras del desarrollo del pensamiento matemático.

En cuanto a los propósitos de la enseñanza de la matemática, en la página 16 del citado documento se dice:

Específicamente, la formación matemática que brinda el Colegio de Ciencias y Humanidades, busca que sus egresados sean capaces de:

- *Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.*
- *Utilizar diversas representaciones en el proceso de resolución de problemas.*
- *Revisar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos, a fin de valorar la generalidad de la solución.*
- *Apreciar la resolución de problemas como generadora de conocimiento más que como mera actividad de ejercicio mental.*
- *Efectuar generalizaciones, a partir del análisis de diferencias y similitudes, del reconocimiento de estructuras, de la identificación de analogías y de patrones de comportamiento.*

- *Establecer conjeturas sobre características y vinculaciones de conceptos y procedimientos matemáticos a los que se enfrenten.*
- *Proporcionar argumentos de validez sobre tópicos matemáticos y evaluar los de otros.*
- *Utilizar diversas formas de razonamiento (sistemático, especulativo y riguroso), particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo, y ser conscientes de la incertidumbre o certidumbre de los resultados* de estos.
- *Apreciar las formas de razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de la matemática.*
- *Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales diversas formas de representación matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica y algebraica) para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.*
- *Analizar y evaluar el trabajo matemático y las estrategias de otras personas.*
- *Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas.*
- *Reconocer conceptos, métodos y procedimientos comunes en las diversas áreas del conocimiento matemático.*
- *Utilizar su conocimiento matemático en distintos contextos incluyendo su entorno habitual.*
- *Usar las representaciones matemáticas pertinentes para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y biológicos, entre otros.*

Si se analizan a detalle estos puntos, encontraremos algunas dificultades.

1) La forma en la que están redactados, al menos algunos de ellos, puede prestarse a interpretaciones ambiguas.

2) Se tienen profesores en el Colegio que no han desarrollado estas capacidades.

Lo anterior lleva directamente al aspecto de la formación del profesor, tanto en aspectos de su disciplina como de didáctica de la misma. **Es necesario tener un Programa Estructurado de Formación y Actualización de Profesores que permita el buen desempeño del Plan de Estudios y una mejor aplicación de los Programas** y que éste no cambie año con año ni con el cambio de administración, sino que se adecue a las necesidades reales del currículo del CCH.

Continuando con el análisis es importante mencionar la cuestión de la organización de los Programas a través de Ejes de Desarrollo Temático. Al respecto se dice:

Así, los contenidos se estructuran en Eyes (sic) Temáticos que se van desplegando a lo largo de los cuatro cursos obligatorios, de manera que un contenido dado se retoma posteriormente para ampliarlo y profundizarlo progresivamente, poniendo de manifiesto el proceso de construcción de los conceptos y procedimientos matemáticos, pero cuidando y propiciando a la vez el avance del conocimiento a partir de la actividad del estudiante. (p. 10)

Uno de estos ejes es la Geometría Euclidiana. Este se aborda en Matemáticas I y en Matemáticas II como tal, pero en los cursos de Matemáticas III y IV realmente se trabaja más con la Geometría Analítica que pudiera derivarse de la Euclidiana. Por tanto no es un eje temático que se despliegue a lo largo de los cuatro cursos obligatorios y cada vez con mayor profundidad.

Otro de los ejes es *Función y su Modelación*. El concepto de función se aborda en una unidad de Matemáticas I, la primera de Matemáticas II y a lo largo de Matemáticas IV, por tanto es un concepto que podría considerarse como eje temático, pero el nombre del eje no es adecuado al concepto de función, ya una de las mayores aplicaciones de la función matemática es en la Modelación Matemática de fenómenos de diferente índole, como modelos que reproducen ciertas características de tal fenómeno. Pero una función no es objeto de la modelación, no se construyen modelos de los modelos.

Difícilmente las ramas de la Matemática pueden considerarse como ejes temáticos, algunos conceptos, como el de función, sí podrían serlo, entonces se hace evidente considerar la conveniencia o no de definir los ejes temáticos para estructurar los aprendizajes y los contenidos del currículo. Una posible solución sería abordar los aprendizajes, de manera longitudinal, desde el punto de vista del pensamiento matemático diferenciado en varios aspectos: numérico, algebraico, geométrico y probabilístico; y, de manera transversal, en el contexto del pensamiento reflexivo (Dewey, 1910, 1953) que en Matemática tomaría la forma de los razonamientos inductivo y deductivo, haciendo posible la inclusión de la argumentación y la demostración matemática.

No es la intención alargar el escrutinio del documento en toda su extensión, sino poner en relieve que es necesario hacer una reflexión más profunda sobre qué Matemática se enseña en el Colegio y si ésta cumple con sus propósitos educativos.

En consecuencia, se hace necesario hacer una revisión a fondo del documento y una discusión seria y detallada sobre el documento Orientación y Sentido del Área de Matemáticas y que se tome en cuenta en la construcción de los Programas.

Es necesario señalar que los Programas vigentes entraron en vigor en 2004, mientras que el documento Orientación y Sentido del Área de Matemática data de agosto de 2005. Es decir, se elaboró lo que debió ser la guía en el proceso de revisión y ajuste de los Programas una vez que estos se habían ajustado, lo que limitó mucho los alcances del documento de 2005.

Enseñanza-aprendizaje de la Matemática en su contexto global

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) a través de su Programa de Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés, 2003) considera como un campo de evaluación el Alfabetismo Matemático (Mathematical Literacy), definido de la manera siguiente:

El Alfabetismo Matemático es la capacidad individual de identificar y entender el papel que juega la matemática en el mundo; de emitir juicios bien fundamentados, y de usar la matemática, e involucrarse con ella, de manera que llene las necesidades de la vida de dicho individuo como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (p. 24)

Y el campo está organizado en tres componentes (p. 30):

- Situaciones o contextos en los que se ubican los problemas
- Contenido matemático que se tiene que utilizar para resolver el problema, organizado mediante ciertas ideas vinculantes.
- Competencias que deben activarse con el fin de conectar el mundo real, en el cuál se generan los problemas, con la matemática y, en consecuencia, resolver el problema.

Se pone énfasis en que las competencias son el componente más importante.

Mientras que las competencias se definen en el marco de la *Matematización* entendida como los procesos fundamentales que los estudiantes utilizan para resolver problemas de la vida real. Las competencias que define la OCDE son ocho:

- Pensamiento y razonamiento
- Argumentación
- Comunicación
- Modelación
- Planteamiento y resolución de problemas
- Representación
- Uso de lenguaje y de operaciones simbólicos, formales y técnicos
- Uso de apoyos y herramientas

Ahora bien, el programa de evaluación de la OCDE, por ser un programa internacional, recurre a la aplicación de cuestionarios estándares para evaluar el desempeño matemático de los estudiantes. Y este examen pretende ser un indicador de dicho desempeño. Pero en muchos países, México incluido, se confunde el indicador del estado de la educación con los objetivos de ésta. Por tanto, se adopta lo que en nuestro país se conoce como Enseñanza por Competencias (véase por ejemplo los documentos de la SEP sobre las reformas en la educación básica y la media superior: RIEB y RIEMS), en un afán de ocupar mejores lugares en los resultados de la evaluación de PISA: es decir, el objetivo de la educación es salir bien ubicados en los informes de PISA y no el aprendizaje de los estudiantes (o éste pasa a segundo término).

Las *ideas vinculantes (overarching ideas)* de todo el campo de Alfabetismo Matemático son: cantidad, forma y espacio, cambio y relaciones, e incertidumbre.

Un aspecto de la enseñanza de la Matemática del Colegio en el llamado tronco común al que no se ha puesto el cuidado que merece es la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística. En el Plan de Estudios original se tenía una asignatura en el Área de Ciencias Experimentales, Método Experimental, que consistía en técnicas estadísticas aplicadas; en la primera revisión de los Programas de Estudio se incluían temas de estadística descriptiva, datos Bivariados y de probabilidad en el curso de Matemáticas IV; actualmente no existe ningún contenido de estadística y probabilidad dentro de los primeros cuatro semestres en el CCH; esto es, son conocimientos que el CCH ha ido descartando en tanto que la tendencia mundial es darles cada vez más relevancia. En su marco teórico de evaluación, en PISA se define la incertidumbre de acuerdo con el planteamiento del NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas) estadounidense y otros organismos:

[Por] Incertidumbre se tiene la intención de sugerir dos temas relacionados entre sí: datos y azar. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y la probabilidad. Recomendaciones relativamente recientes apuntan hacia el hecho de que la estadística y la probabilidad deberían ocupar un lugar mucho más prominente que el que ha tenido (Comité de Indagación sobre la Enseñanza de la Matemática en las Escuelas, 1982, LOGSE, 1990, MSEB, 1990; NCTM, 1989, 2000). (p. 37)

Por su parte el NCTM, en 2000 publicó sus Principios y Estándares (que más bien serían Normas) para la Matemática Escolar. En este conjunto de documentos pone énfasis en la necesidad de aprender matemática en un mundo en constante cambio, y define cuatro aspectos de la vida cotidiana en donde se necesita la Matemática:

- Matemática para la vida
- Matemática como parte de una herencia cultural
- Matemática para el trabajo
- Matemática para las comunidades técnica y científica

Propone los siguientes principios:

- de Equidad
- Curricular
- de Enseñanza
- de Aprendizaje
- de Evaluación
- de Uso de Tecnología

Y los estándares o normas que asegurarían la calidad de la educación matemática de los estudiantes estadounidenses se dividen en dos partes: estándares de metas de contenidos matemáticos (número y operaciones; álgebra; geometría; medición; y análisis de datos y probabilidad) estándares de procesos (resolución de problemas; razonamiento y demostración; conexiones; comunicación; y representación) (NCTM, 2000).

El NCTM no es un organismo gubernamental de Estados Unidos, sino una asociación de profesores, por tanto sus documentos no tienen un carácter oficial, aunque los Principios y Estándares han sido adoptados por muchas escuelas y algunos distritos educativos en la Unión Americana, y fuera del país en algunas escuelas de Latinoamérica.

Del mismo modo que en Estados Unidos se tienen los Principios y Estándares, en otros países se tienen políticas gubernamentales que apuntan hacia la mejora de la educación matemática de sus estudiantes. El factor común a todas ellas es el bajo grado de éxito en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Aunque parece ser que hay ciertas excepciones (con las reservas del caso) como Cuba, Finlandia o Corea del Sur.

En todo caso, para la revisión curricular en el Colegio, es indispensable retomar los principios educativos y aterrizarlos en el aula, tomando en cuenta la propia experiencia del Colegio y adoptando aquellos aspectos de la docencia de otras experiencias que puedan servir a nuestros propósitos.

En las secciones siguientes se hará un análisis de los aspectos propuestos para el diagnóstico del Área de Matemáticas, su problemática y posible solución.

Diagnóstico

Los puntos considerados en este diagnóstico se consideran fundamentales para evaluar el desempeño del currículo y su dosificación por semestres. Arroja, también, información sobre el desempeño de los profesores y algunos comentarios sobre la posible manera de resolver los problemas detectados. Cabe aclarar que no se trata de un diagnóstico exhaustivo, sino que pretende ser la base para éste, y en el que se tomarían en cuenta las percepciones de la comunidad del Colegio.

Aprendizajes esperados por Área-asignatura

De manera general se puede definir el aprendizaje como el proceso que lleva a la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas sobre una cierta rama del saber humano, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia. El aprendizaje implica también un cambio de actitudes hacia el objeto del conocimiento y una valoración diferente del mismo.

Esta concepción de aprendizaje no coincide con la definición de aprendizaje en los programas.

En particular, en los Programas de Matemáticas del CCH se define el aprendizaje como aquello que el estudiante puede ser capaz de hacer o saber al término de una unidad temática. Así, se puede ver que los aprendizajes, en los Programas de matemáticas adquieren formas muy diversas, sobre todo en virtud de que se utilizan verbos muy diversos en su redacción.

Al revisar todos los Programas de las asignaturas del Área, se puede ver entonces que un aprendizaje puede ser: explorar algo; identificar y construir objetos; mencionar ventajas de ciertos procedimientos; resolver problemas; y diferenciar entre objetos. Si se hiciera un recuento puntual de los aprendizajes propuestos en los Programas del Área de Matemáticas (incluyendo Cibernética y Computación y Taller de Cómputo), se podría llegar a la conclusión de que un aprendizaje puede ser prácticamente cualquier cosa, en particular actividades y procedimientos.

Esto se debe a que no hay una definición clara de aprendizaje en la cual basarse. Por tanto, se debe empezar por adoptar una definición de aprendizaje y tomarla en cuenta cuando se determinen los aprendizajes que deben adquirir lo estudiantes y no confundir el término con estrategias de enseñanza ni con conceptos.

Digamos, como ejemplo, que se quiere que el estudiante *aprenda a resolver problemas*; en este caso, el aprendizaje es el proceso que lleva al estudiante a apropiarse de ciertas heurísticas o estrategias de resolución de problemas que puede aplicar de manera oportuna y eficiente dependiendo del problema a resolver; este aprendizaje implica también habilidades de comprensión de lectura. Así, el aprendizaje, entendido como un proceso, no puede ser algo puntual que se logra en un sólo momento, sino que, como proceso, requiere una aproximación gradual. Algo parecido se puede decir con el aprendizaje de conceptos.

A manera de conclusión, diremos que un aprendizaje escolar es el proceso de adquisición de un concepto o un procedimiento a través de la interacción en el aula con otros estudiantes y con el profesor y apoyándose en los materiales de aprendizaje y los recursos que la escuela pone a disposición de la comunidad escolar.

Es difícil aprender algo si sólo se le estudia o se le menciona una sola vez en el currículo. El aprendizaje implica hacer y reflexionar sobre ese hacer de manera más o menos constante. Por lo que habría que retomar los aprendizajes en diferentes momentos a lo largo de todo el estudio de la matemática.

Por tanto, se puede concluir que más que hablar de la vigencia y la pertinencia de los aprendizajes habría que redefinirlos y adecuarlos a los propósitos de la enseñanza de la matemática en el CCH.

Contenidos de aprendizaje del Área y sus correspondientes asignaturas

La presentación de los contenidos en los programas de Matemáticas del Colegio vienen en forma de tabla con tres columnas: en la última se consigna la Temática con la cual se abordarán los Aprendizajes (primera columna) a través de las Estrategias propuestas (segunda columna).

Se considera que la conformación de las unidades de los Programas no permite hacer un análisis separado o independiente de las tres columnas. En consecuencia, habría que hacer el análisis de la temática a la luz de lo que se propone en Aprendizajes y Estrategias, y todo esto en relación con el propósito de la Unidad.

Al revisar las diferentes unidades de los Programas de las asignaturas del Área, se encuentran discrepancias entre los propósitos de las unidades con los aprendizajes, con los aprendizajes y las estrategias, con el propósito de la unidad y el tiempo destinado a ella, con los aprendizajes y las temáticas, con los niveles taxonómicos de los aprendizajes propuestos y el tiempo establecido para cubrir la unidad, etcétera.

Si se hace un análisis un poco más detallado de los Programas, llegaríamos a la conclusión de que los temas o contenidos propuestos no siempre están en concordancia con los aprendizajes y, muchas veces, las estrategias confunden al profesor que, en la mayoría de los casos "cubre" la temática sin prestar mayor atención a los aprendizajes o a las estrategias. Además hay temáticas que no atienden a ningún aprendizaje. Esto hace que el Programa sea difícil de entender.

En conclusión, es necesario hacer una revisión exhaustiva de la temática a la luz de los propósitos y los aprendizajes que se propongan en cada Unidad de los Programas del Área y, a partir de esto, hacer una propuesta pertinente de estrategias.

Resultados de aprendizaje por Área y asignaturas correspondientes, según desempeño de los alumnos

El Examen de Diagnóstico Académico (EDA) es una prueba que se aplica a los estudiantes al final de cada semestre escolar, o cerca del final. La intención es medir si los alumnos alcanzaron ciertos aprendizajes de los Programas.

En los Informes 2009-2 sobre el EDA, la Secretaría de Planeación (Seplan) del CCH consigna que el examen tiene una confiabilidad muy baja. La confiabilidad del instrumento se midió siguiendo tres parámetros, el Índice de Discriminación (ID, que debe ser mayor a 0.39 para que el reactivo sea confiable), el Grado de Dificultad (GD , que debe estar equilibrado entre Muy Difícil y Muy Fácil, para que el examen tenga confiabilidad óptima), y el Funcionamiento de las Opciones de Respuesta (FOR, un reactivo no tiene validez si alguno de sus distractores obtuvo mayor respuesta tanto en los grupos de Bajo Rendimiento como en los de Alto Rendimiento).

En dicho informe se afirma que el EDA aplicado en 2009-2 tiene un ID no mayor que 0.2 (en Matemáticas II es de (0.07); el GD predominante es el de Muy Difícil y Difícil (Matemáticas II de los 27 reactivos, 15 se ubicaron como Muy Difíciles y 12 como Difíciles); finalmente, el FOR, con excepción del Taller de Lectura II, fue superior a 70% de reactivos cuya respuesta fue uno de los distractores (en Matemáticas II fue de 77.8%).

No obstante lo anterior, es interesante seguir con el análisis de las estadísticas de este Informe. Se consigna que en la aplicación del EDA los resultados positivos fluctúan entre 21% y 48%, el porcentaje más bajo corresponde a Taller de Cómputo y el más alto a Estadística y Probabilidad II. Ninguna de las materias alcanzó 50%.

Además de la baja confiabilidad del instrumento, hay que tomar en consideración otras dos situaciones.

La primera es el hecho de que los estudiantes no parecen responder a estos instrumentos con la debida seriedad, al ser considerados exámenes que no influyen en la trayectoria académica. Al respecto Ángeles, Guerra, Ramírez y Velasco (2011) señalan “A nivel empírico, es sabido que muchos estudiantes responden algunos instrumentos de evaluación al azar, principalmente si estos instrumentos no incidirán en sus calificaciones. Un ejemplo de ello es el Examen de Diagnóstico del Aprendizaje, EDA, que el Colegio de Ciencias y Humanidades, CCH, aplica a sus estudiantes a final de cada semestre. Se ha notado que una considerable cantidad de alumnos responde a este instrumento sin ocuparse realmente de las preguntas y las respuestas, lo cual desvirtúa su aplicación, en el sentido de darle al CCH información errónea sobre el alcance de los aprendizajes de sus estudiantes”. Dichos autores proponen que “puede considerarse que instituciones como la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, y en particular el CCH, podrían optimizar la información estadística que obtienen de instrumentos como el EDA, aplicando el test de rachas a dichas pruebas, si es que aún no lo hacen, y considerando aquellos puntos que podrían viciar el proceso, como lo puede ser el factor humano” (p.15).

La segunda es que los aprendizajes que mide el EDA son propios de los tres niveles más bajos de la taxonomía de Bloom: Conocimiento, Aplicación y Comprensión. Ello no implica que no existan aprendizajes de los tres niveles más altos de dicha taxonomía, Análisis, Síntesis y Evaluación, en los programas vigentes o que no deban existir. Es decir, con los reportes del EDA se tendrá información valiosa sobre los alcances de los alumnos en ciertos aprendizajes de cierto nivel taxonómico, pero ello no evita el revisar otro tipo de documentos en aras de tener más información correspondiente justamente a la consecución, por parte de los alumnos, de aprendizajes de niveles taxonómicos más altos.

Finalmente cabe recordar que en todos los reportes del EDA, que el CCH ha puesto a disposición de la comunidad en la página de la Secretaría de Planeación de la Dirección General, se establece que las condiciones en las que se elaboró y aplicó el EDA de cada periodo son completamente diferentes y, por tanto, sus resultados no pueden contrastarse estadísticamente, pero que la comparación cualitativa del nivel cognoscitivo, del grado de dificultad y del comportamiento de las opciones de respuesta, proporcionará elementos para conocer la estructura de los exámenes y las modificaciones que se han hecho al instrumento, además de contar con un registro de la evolución del EDA como instrumento de diagnóstico.

En el análisis cualitativo de los resultados del diagnóstico se mencionan las dificultades para evaluar los aprendizajes propuestos en los Programas, pues están estructurados de modo que se hace difícil su evaluación con un solo reactivo por la cantidad de contenidos y procedimientos que abarcan, y se afirma que hay *aprendizajes que no se pueden ubicar en un tema y temas que no tienen aprendizajes* (p. 53). Y presenta algunas razones que podrían ser la causa de este bajo rendimiento, como la forma de abordar los temas por los profesores.

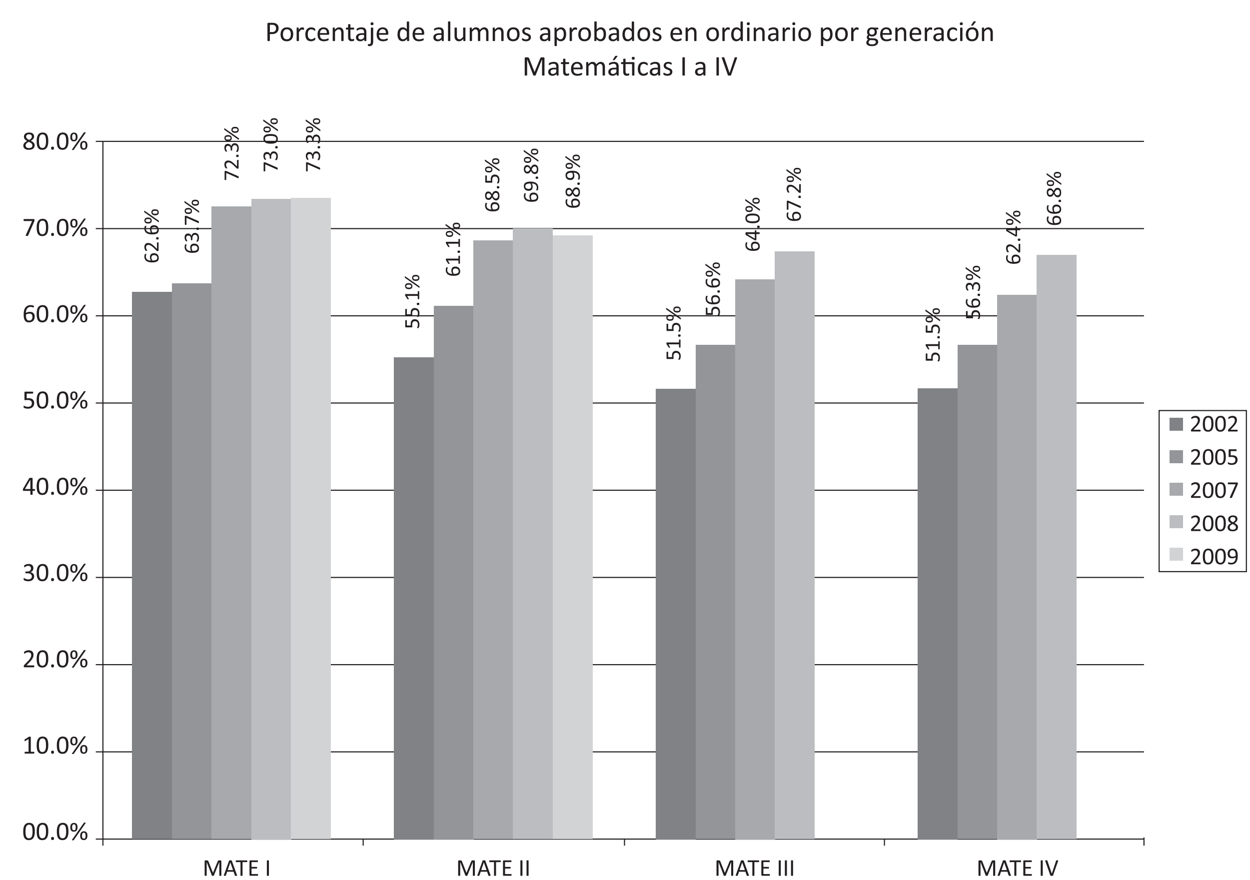
Por su parte, en el documento Proyecto Académico para la Revisión Curricular: desempeño escolar y egreso (Cuadernillo 3, 2009) se consigna el siguiente gráfico con respecto al porcentaje de aprobación de los estudiantes del Colegio en diferentes generaciones, para Matemáticas I a IV.

De acuerdo con la Gráfica 1, el porcentaje de estudiantes aprobados en Matemáticas IV para la generación 2009 es 66%, contra 23% del EDA. La diferencia se puede deber a las condiciones de aplicación del EDA y a la confiabilidad de este instrumento, misma que no es muy alta de acuerdo con el propio informe de la Secretaría de Planeación. Para la generación del 2011, este porcentaje es de 61.5% (*Diagnóstico institucional para la revisión curricular*, CCH, 2012).

El aumento en el porcentaje de aprobación en el Colegio puede deberse, entre otros factores, a la separación de los grupos de matemática en dos secciones. Aunque este aumento es significativo del 2002 al 2009, el porcentaje sigue siendo bajo.

Los criterios para asignar una calificación que utilizan los profesores no son uniformes y no siempre reflejan el verdadero desempeño del estudiante o su nivel de conocimientos, no obstante, si tomamos en cuenta los resultados del EDA y los porcentajes de aprobación, a pesar de estar entre 66% y 73%, podríamos decir que los resultados no son satisfactorios.

Gráfica 1. Regularidad escolar en Matemáticas I a IV



Según este gráfico, el porcentaje de estudiantes aprobados en Matemáticas IV para la generación 2009 está en 66%. Según el *Diagnóstico institucional* (CCH, 2012) para 2011 el porcentaje bajó a 61.5% por abajo del obtenido en 2008. Estas fluctuaciones podrían deberse al hecho de haber dividido los grupos en dos secciones. Sin embargo, los cambios no son sustantivos y siguen siendo bajos.

Criterios de evaluación del aprendizaje y para la asignación de calificaciones al desempeño de los alumnos

En los Programas de Matemática del Plan de Estudios Actualizado del CCH (1996), con respecto a las sugerencias de evaluación ordinaria se propone la conveniencia de *"otorgar un seguimiento continuo al desarrollo del proceso educativo, a fin de identificar los avances y las dificultades de los estudiantes en la consecución de los objetivos; la evaluación conlleva un constante análisis crítico del trabajo realizado por el estudiante y por el profesor, a fin de ubicar las causas y la naturaleza de las dificultades que se presentan y proceder a desarrollar, oportunamente, estrategias de trabajo para su superación"*.

Entre los instrumentos que se proponen para lograr lo anterior se mencionan exámenes de diagnóstico, parciales, acumulativos, globales y de contraste; instrumentos de autoevaluación para los estudiantes, ejercicios de consolidación, tareas de reforzamiento, prácticas guiadas, trabajos de investigación de resultados, trabajos de búsqueda de información, reporte de visitas a museos, exposición del estudiante ante el grupo, construcción de modelos, participación en discusiones por equipo y grupal, etcétera. Y se da preferencia a las tareas extra aula y a los exámenes; con respecto a estos últimos se dice:

> *Realización de exámenes de tipo acumulativo, ya sea en la forma de globales (semisemestrales o finales) o exámenes parciales que deberán explícitamente incluir una porción de lo anteriormente visto, en un rango que posibilite simultáneamente explorar con amplitud los nuevos conocimientos; para propiciar que el estudiante retome contenidos ya estudiados. Para habituar al estudiante a este tipo de requerimiento es útil realizar periódicamente algunos repasos acumulativos, ya sea en clase o fuera de ella (mediante el diseño de actividades apropiadas), lo que redundará en grandes beneficios de aprendizaje* (p. 9).

Así pues, en el Colegio de Ciencias y Humanidades se alienta a que la evaluación recaiga de manera casi exclusiva en los exámenes de todo tipo. Y no se tiene una definición clara del concepto ni criterios uniformes de evaluación. Los profesores hacen sus evaluaciones según sus propios juicios. Si tomamos en cuenta que la gran mayoría de los profesores que atienden la enseñanza de la matemática son de asignatura A (y de éstos gran parte son interinos) con poca experiencia de enseñaza en el Colegio, la problemática se agrava bastante. Por consiguiente se hace necesaria una profunda reflexión sobre la evaluación en el CCH y su instrumentación en el aula, sobre todo la que se ha dado en llamar formativa (que muy bien puede servirnos para asignar una calificación al estudiante).

Estrategias de enseñanza/aprendizaje por asignatura del Área

Debido al poco o nulo trabajo colegiado y a la poca o nula socialización de estrategias de enseñanza-aprendizaje, no es posible determinar si éstas son las adecuadas. Sin embargo, debido a la preparación de los profesores y la poca consistencia entre Aprendizajes, Estrategias y Temática que hay en los Programas, así como a políticas no muy adecuadas de evaluación de los productos de los docentes, podría pensarse que en su gran mayoría no son adecuadas.

Por ejemplo, muchos profesores siguen basando su enseñanza en exposiciones magistrales apoyada en libros de texto cuyo enfoque es totalmente algorítmico y que no propician el desarrollo del pensamiento matemático. Hay algunos cuadernos de trabajo y libros de texto escritos por profesores del mismo Colegio que, a pesar de que dicen basarse sobre teorías constructivistas, siguen siendo bastante algorítmicos (un ejemplo de esto son los materiales producidos por la Secretaría de Programas Institucionales hace un par de años).

El uso de software educativo como la Matemática Dinámica o de calculadoras graficadoras es muy limitado. Lo mismo puede decirse del uso de Internet y sus recursos. La mayoría de los profesores que usan tecnología, la usan para hacer más dinámicas sus exposiciones, menos tediosas, sin aprovechar todas las posibilidades de interactividad que dan las tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

Esto apunta, de nuevo, a que es necesario tener en el Colegio un programa continuo de formación de profesores que esté bien estructurado y con objetivos y metas claros.

Por otra parte, es igual de importante referirse a más documentos en aras de tener un diagnóstico más claro de la situación que guarda la enseñanza de la Matemática en el Colegio.

La información más valiosa, de primera mano, que tiene el CCH con respecto a sus estudiantes, a la instrumentación del Plan y los Programas de Estudio y al logro de los aprendizajes, proviene de sus académicos, particularmente de los informes de docencia del profesorado de carrera y de los informes académicos del profesorado de asignatura, respectivamente.

Estos documentos, y los compendios al respecto, son una valiosa fuente de información dentro de un proceso de actualización, ya que darán información, sobre todo, de qué fallas se han detectado en el proceso de enseñanza aprendizaje, qué posibles razones hay para ello, qué estrategias se han instrumentado y qué sugerencias se tienen para su solución, cuáles aprendizajes de los Programas vigentes han sido los que más dificultades ha implicado para los estudiantes y qué tan relevantes pueden ser estos aprendizajes dentro de lo que se espera como la formación matemática de los alumnos.

Paralelamente, la revisión de los productos entregados por el profesorado de carrera dará una idea si el Colegio está realmente instrumentando sus Programas de Estudio.

Tiempo destinado a la enseñanza por asignatura del Área

El esquema de cinco horas semanales (dos de dos y una de una) ha mostrado ser adecuado para las materias de I a IV. El tener sesiones de dos horas permite el diseño de actividades de enseñanza en las que el estudiante juegue un papel activo. Mientras que las sesiones de una hora son útiles para hacer discusiones e institucionalizar el conocimiento.

Los problemas que se dan son de otra índole. A continuación se presentan algunos de ellos:

a) El tener las sesiones de una hora los viernes hace que muchos estudiantes y profesores (sobre todo en el turno vespertino) no asistan. Es común ver los salones de matemáticas vacíos los viernes por la tarde. Entonces el tiempo por materia se reduce a 4 o menos horas.

b) Si el profesor imparte su materia con exposiciones magistrales ante el grupo y el estudiante sólo escucha y toma apuntes, dos horas son excesivas para un estudiante adolescente lleno de energía.

c) Como la Matemática se enseña como una serie de procesos algorítmicos, en donde es necesario aprender procesos y mecanizarlas, dedicar dos horas para que los estudiantes realicen sólo series de ejercicios es completamente antipedagógico.

Se pueden hacer consideraciones parecidas con respecto al tiempo para las materias optativas. Para optimizar los tiempos es necesario que el profesor cambie su forma de enseñar y tratar a los estudiantes.

Perfil del docente por asignatura del Área

La mayoría de los profesores de Matemáticas del Colegio provienen de carreras afines con la matemática. Según las estadísticas, sólo 11 profesores (2.3%) vienen de otras carreras entre las que podrían estar las afines con la educación como pedagogía o enseñanza de la matemática que se dan en instituciones como la Universidad Pedagógica Nacional. Entonces, el perfil del docente es el del egresado de alguna ingeniería o alguna carrera del área físico matemática (38.5 % son egresados de este tipo de licenciaturas). Es decir, en el perfil del docente se busca el conocimiento disciplinario sin considerar la formación docente.

Hay que observar que muchos profesionistas llegan a la docencia porque no hay trabajo en otro lado o no son competentes en su profesión y no porque tengan una verdadera vocación docente.

Si a esto le agregamos que los programas de formación de profesores no han logrado atender las demandas de enseñanza y aprendizaje del Colegio, entonces queda claro que el perfil del docente no es el que debería.

Tutorías destinadas a la asignatura por Área

Este programa busca apoyar a los estudiantes en las diferentes problemáticas que puedan enfrentar y que incidan directamente en su desempeño académico.

La dinámica es asignar a un profesor-tutor para cada grupo de los primeros cuatro semestres, mismo que apoyará a los estudiantes de dicho grupo, canalizándolos a las instancias pertinentes cuando el alumno presente determinada problemática.

En algunos casos, se han asignado tutores a los alumnos de quinto y sexto semestres, en aras de apoyarlos en su proceso de egreso.

Actualmente se tiene cobertura total de los grupos de primero a cuarto semestres, se cuenta también con un seminario central para el programa y con impartición de cursos para tutorías. Desafortunadamente los cursos son muy descriptivos y no responden a las necesidades de formación de los participantes en el programa.

Al igual que ocurre con el programa de Asesorías, la gran mayoría de los profesores-tutores son profesores de reciente ingreso, al tiempo que muy pocos profesores de carrera comprometen en este programa su proyecto de área complementaria.

El apoyo que se brinda a los estudiantes tiene que ver con dos vertientes: orientación vocacional-profesional e integración escolar. Muy pocas veces la problemática que se aborda en las tutorías tiene que ver con el contenido académico de un área, por lo que difícilmente se podría hacer una evaluación de este programa desde la perspectiva del Área de Matemáticas.

Asesorías destinadas a la asignatura por Área

En el Programa Institucional de Asesorías (PIA) se plantea acompañar al estudiante en su trayectoria escolar apoyándolo en dos áreas de intervención:

- Académica, con acciones encaminadas a favorecer la autorregulación de su aprendizaje; y
- Disciplinaria, con acciones que apuntan a que el estudiante adquiera los aprendizajes correspondientes a las diferentes disciplinas del Plan de Estudios o a la consolidación de tales aprendizajes.

En el caso de la primera, el propósito es el de apoyar al estudiante en el conocimiento de los procesos implicados en el aprendizaje y en el desarrollo de las estrategias de aprendizajes (hábitos de estudio, por ejemplo) que le permitan un desempeño más eficiente.

Y en la segunda, la intención es apoyar al estudiante con asesorías sobre el contenido disciplinario en aquello aspectos que le son más difíciles de entender.

En ambos casos se cuenta con el apoyo de un profesor y con tecnología y materiales diseñados ex profeso para el programa.

Actualmente se cuenta con materiales en el Portal Académico, con profesores comisionados a asesorías (en general con 10 horas cada uno), con espacios dedicados exclusivamente para asesorías en los cinco planteles, y con cobertura total de los estudiantes. Se tiene también trabajo colegiado a partir de un seminario central y se ofrecen cursos de actualización a los asesores.

Al ser el de asesorías un programa institucional, tiene que considerarse que aquellos docentes que sean responsables de su funcionamiento con su trabajo directamente con estudiantes deberán tener una formación didáctica y disciplinaria sólida, al tiempo que su entendimiento y apropiación de los programas deben ser totales. De otra forma, difícilmente los alumnos con mayores dificultades alcanzarán los aprendizajes.

Una manera de evaluar esto es revisar los informes que los profesores comisionados entregan acerca de su labor en el programa y de los resultados alcanzados por los estudiantes que hayan atendido.

Sin embargo, la mayoría de las asesorías que se dan en el área de Matemática se han centrado en la segunda área de intervención y, principalmente, en la ayuda a los estudiantes en el desarrollo de tareas o con problemas o ejercicios que no entienden. Esto cumple de manera inmediata las expectativas del estudiante pero no resuelve su problemática de estrategias de aprendizaje ni la consolidación de sus aprendizajes.

Algunos asesores optaron por entrar al PIA porque les da la oportunidad de dar menos clase (esto se da sobre todo con profesores de asignatura que prestan sus servicios en otras instituciones y cuya carga de horas frente a grupo es muy alta), o porque con ello consiguen completar la carga horaria de 30 horas semanales. En opinión de muchos asesores, su labor consiste en ayudar a los estudiantes con sus tareas.

Es necesario revisar si el programa cumple con sus objetivos, a pesar de que son muchos los estudiantes que participan de él.

El PIA y sus objetivos son pertinentes e importantes para el Colegio, pero el problema no está en su planteamiento, sino en su instrumentación. Para que sea más efectivo es necesario que se tenga una mejor capacitación de los asesores, una concientización de la importancia del programa, y que su labor sea conocida por todos los profesores de Matemáticas con el fin de que puedan recomendar a sus estudiantes el uso de estos apoyos.

Algunas consideraciones para reestructurar el currículo de Matemática

Los resultados del diagnóstico realizado resaltan la necesidad de reformular el currículo de Matemáticas, para ello partiremos de la siguiente premisa:

Los principios educativos del Colegio de Ciencias y Humanidades –*aprender a aprender, aprender a hacer y aprender a ser*– no sólo siguen vigentes y son válidos en nuestra comunidad, sino que han sido adoptados por la comunidad Internacional a través de la UNESCO en sus planteamientos de Educación para la vida. (Delors, 1996).

Haremos nuestras observaciones en dos planos: el teórico-metodológico y el educativo. El primero tiene la intención de definir el marco teórico de referencia y sus implicaciones en la conformación del currículo de Matemática; el segundo apunta a su ubicación en el ámbito educativo de nuestro país.

La propuesta de currículo en Matemática del CCH sería la conjunción de estos dos planos en el contexto específico del Colegio.

El plano teórico-metodológico

El análisis de esta sección se harán en tres Niveles de Concreción Teórica: el primero son consideraciones globales que tienen que ver con la naturaleza del conocimiento, es decir, se trata de teorías cognitivas generales; en un segundo nivel tomaremos en consideración teorías intermedias que ubican los planteamientos generales en el contexto de la disciplina que nos interesa (didácticas específicas): la Matemática; y en un tercer nivel se considera la forma que adquirirían las teorías intermedias en la instrumentación concreta dentro del Colegio.

En cada uno de los Niveles de Concreción se tomarán aquellos aspectos que son relevantes para la conformación del currículo en el CCH, y en particular el de Matemática.

Naturaleza del conocimiento

Se considera al conocimiento humano como una construcción que se hace y tiene sentido en el seno de una sociedad, por tanto, es ella, con sus mecanismos de validación de conocimientos, la que determina cuáles de los generados por sus integrantes son válidos y útiles para sus fines. Por consiguiente, el conocimiento depende de la sociedad en la cual se genere, de su ubicación geográfica y del contexto cultural en el cual surge. Esto es, *el conocimiento está situado*.

El conocimiento humano se genera y puede manifestarse a través del uso de herramientas, herramientas psicológicas como el lenguaje y herramientas físicas como los instrumentos tecnológicos. Las herramientas psicológicas tienen un uso interno y sirven como mediadores semióticos; mientras que las herramientas físicas son todos aquellos instrumentos y artefactos que sirven para modificar el entorno y facilitar, es decir tienen un uso externo. Por tanto se considera que el conocimiento está mediado por el uso de instrumentos.

El conocimiento humano está mediado por la acción. Según Dewey (1989) el "pensamiento es un instrumento de la acción. La organización intelectual tiene su origen y parte de su desarrollo cuando se organizan las acciones necesarias para el logro de un objetivo". Es el *pensamiento reflexivo* el que hace que un individuo realice ciertas acciones encaminadas a explicar las causas que motivaron la reflexión. El objetivo que se menciona aquí puede surgir como una necesidad del propio individuo o como una necesidad social. En este segundo caso, decimos que la acción o praxis (encaminada al logro de objetivos) está marcada por una interacción dialéctica entre las formas en que historia y cultura conforman a las personas, incluso mientras esas mismas personas están haciendo historia y produciendo cultura.

En resumen, tomando en cuenta este plano, en primer término, una de las primeras consideraciones a hacer en la revisión del currículo de Matemática y la forma de instrumentarlo es que el aula es una comunidad que refleja las relaciones que se dan fuera de ésta, tanto en el ámbito escolar como en el no escolar. En segundo término, es que el conocimiento se genera a través de la acción premeditada, encaminada al logro de objetivos comunes, por tanto se debe aprender haciendo y en un ambiente de cooperación. En tercero es necesario introducir al aula el uso de herramientas (tanto físicas como psicológicas) que ayudarían al desarrollo y a la manifestación de conocimientos. En cuarto, y último término, es necesario buscar mecanismos de validación del conocimiento que se produce en el aula; esto se puede lograr a través del autoconvencimiento (en lo particular) y la persuasión (en lo general), esto se lograría mediante el desarrollo de esquemas de argumentación cada vez más sofisticados en el estudiante.

Estas consideraciones son aspectos transversales de la educación y deberían tomarse en cuenta en todas las materias.

La enseñanza de la Matemática

En este Nivel de Concreción se encuentran teorías y propuestas de enseñanza como las que propone el NCTM de Estados Unidos o el marco teórico de PISA.

Para este análisis, se utilizan algunos elementos de la Teoría de Las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, la Teoría de las Representaciones de Raymond Duval y los planteamientos de Papert con respecto a los Micromundos.

Brousseau (1986) parte del hecho de que la escuela es algo temporal en el desarrollo de los estudiantes. Por tanto es necesario prepararlos para tener éxito fuera de la escuela. Para ello, propone el uso de situaciones no-didácticas (*situations a-didactiques*), aquellas que no tienen ninguna intención de enseñanza o didáctica, convirtiéndolas en situaciones didácticas, aquellas con intención de enseñar algo. Las situaciones no-didácticas son tomadas de la vida cotidiana fuera del aula (puede interpretarse esto como problemas planteados a partir de la consideración de fenómenos no escolares), el profesor las adapta dándoles un intención didáctica y problematizándolas, y el estudiante asume la responsabilidad de resolver tales situaciones en el entendido de que al hacerlo está adquiriendo el conocimiento que la institución escolar quiere que aprenda.

Brousseau privilegia el trabajo en equipo. En el proceso de resolución de un problema se ponen en juego varios patrones interrelacionados: los alumnos estudian la situación que el profesor les presenta y se comunican las ideas sobre la misma y de qué manera pueden abordarla (si es un problema, buscan la manera de formular la estrategia de solución); una vez determinada la forma de proceder, se ponen en práctica las estrategias seleccionadas y, ya que se llega a una solución o a una conclusión, hay necesidad de comunicar los resultados. Hasta aquí se pueden reconocer tres de los patrones de los que habla Brousseau: Comunicación, Formulación y Acción.

El siguiente patrón, y que puede ser incluso más importante que los otros, es el de validación que se presenta cuando dos o más integrantes del equipo no están de acuerdo con lo que se propone y se desata una discusión en la cual cada participante del conflicto trata de convencer a los demás de que su propuesta es la más viable o la correcta. Para convencer a los demás de que su posición es la mejor, un estudiante debe estar convencido de ello (autoconvencimiento) y tener los argumentos necesarios para convencer a los demás (persuasión). Es éste patrón, el que podría permitir que el estudiante aclarara sus ideas y le diera la oportunidad de exhibirlas de manera ordenada y coherente en esquemas de argumentación que, finalmente, le lleven a usar la demostración matemática como medio de validación de su conocimiento matemático (Flores, 2007, 2009, 2010).

Finalmente, toca al profesor la institucionalización de los conceptos a aprender, sobre la base de todo lo mencionado.

Así pues, de los planteamientos de Brousseau se rescata lo siguiente: el trabajo con actividades de enseñanza tomadas de ámbitos no escolares adaptados a los requerimientos de la materia; el trabajo en equipo; y la libre comunicación entre los estudiantes para propiciar la puesta en marcha de los patrones mencionados (en especial el de validación).

Por su parte Duval (1995) afirma que es esencial el uso de varios sistemas semióticos de representación para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales, entre las razones que da para justificar su afirmación aduce que, para que un individuo tenga un conocimiento completo de un objeto matemático, es necesario que pueda reconocerlo en sus diferentes representaciones, pueda darles un tratamiento dentro de un mismo registro y sea capaz de pasar de una representación a otra, en lo que llama conversión.

Afirma, también que las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural (citado en Godino, 2003, p. 56)

En la enseñanza de la matemática esto se traduce en que un objeto matemático, por ejemplo el de función, debe estudiarse en sus representaciones semióticas: algebraica o analítica, aritmética o tabular, y geométrica o gráfica. Y para decir que el estudiante conoce el concepto debe ser capaz de trabajar el concepto en un registro y de pasar de una representación a otra sin mayores complicaciones (de la algebraica a la gráfica y viceversa, por ejemplo).

La conversión entre representaciones de un objeto matemático y su tratamiento se facilitan si se utiliza la tecnología computacional, en particular un software de Matemática Dinámica y algunos Sistemas de Álgebra Computacional (CAS, por sus siglas en inglés) como Derive o las calculadoras graficadoras.

Algunos de estos programas de cómputo conforman lo que en la literatura se conoce como *micromundos*. Un micromundo es una herramienta de aprendizaje que implica un ambiente que simula el mundo real y en el cual existen objetos que se pueden manipular y cuyo estudio puede utilizarse para promover la resolución de problemas, el pensamiento crítico, el descubrimiento y el desarrollo de modelos, entre otras cosas. El concepto de micromundo nació del trabajo de un equipo de investigadores del MIT liderados por Seymour Papert al trabajar en el desarrollo del lenguaje de programación llamado Logo. El objeto manipulable es la representación en la pantalla de una tortuga. La intención es que los estudiantes jóvenes que se inician en el estudio de la Matemática pudieran darle órdenes de desplazamiento a la "tortuga" para llevarla a determinados puntos o para que su trayectoria describiera ciertas figuras. La descripción de los micromundos y el papel que juega Logo en el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático se describen en la obra de Papert, *Mindstorm: Children, Computers, and Powerful Ideas* de 1980.

Podríamos decir que los programas computacionales de Matemática Dinámica como *The Geometer´s Sketchpad* o *GeoGebra* constituyen verdaderos micromundos, que podrían ayudar al desarrollo del pensamiento matemático de nuestros estudiantes.

Resumiendo esta parte, en la enseñanza de la matemática se debe privilegiar el trabajo en equipo, las actividades de enseñanza que propicien el tratamiento de los objetos matemáticos en sus diferentes representaciones y el uso de la tecnología. Todo esto apunta a sugerencias metodológicas que deberían estar presentes en los Programas.

En la descripción del tercer Nivel: *La Matemática en el Aula del CCH*, se debe tomar en cuenta el contexto educativo en el cual se inserta el Colegio y en especial la enseñanza de la Matemática. En consecuencia, se hará el análisis del Plano Educativo primero.

Plano Educativo

En los últimos años, México ha tenido varias reformas educativas en los niveles básico y medio superior. Como es sabido, en ambos niveles la Secretaría de Educación Pública (SEP) adoptó la enseñanza por competencias. Y recientemente anunció la obligatoriedad de la Educación Media Superior.

Respecto a la revisión del Acuerdo 592, por el cual se establece la Articulación de la Educación Básica, publicado en agosto de 2011 en el Diario Oficial de la Federación, los principios pedagógicos que sustentan el Plan de Estudios se tienen los siguientes:

- Centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje
- Planificar para potenciar el aprendizaje
- Generar ambientes de aprendizaje
- Trabajar en colaboración para construir el aprendizaje
- Poner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de los Estándares Curriculares
- y los aprendizajes esperados
- Usar materiales educativos para favorecer el aprendizaje
- Evaluar para aprender
- La tutoría y la asesoría en la escuela

Y se definen los aprendizajes esperados como indicadores de logro que, en términos de la temporalidad establecida en los Programas de Estudio, definen lo que se espera de cada alumno en **términos de**

saber, saber hacer y saber ser; además, le dan concreción al trabajo docente al hacer constatable lo que los estudiantes logran, y constituyen un referente para la planificación y la evaluación en el aula.

También se especifica que **los aprendizajes esperados gradúan progresivamente los conocimientos, las habilidades, las actitudes y los valores que los alumnos deben alcanzar para acceder a conocimientos cada vez más complejos**, al logro de los Estándares Curriculares y al desarrollo de competencias.

Estos dos últimos párrafos hablan de que en el Nivel Básico se está tomando en cuenta los tres principios educativos y el concepto de Cultura Básica del Colegio.

Otro concepto que vale la pena resaltar es el de Evaluar para Aprender, se dice que la evaluación de los aprendizajes es el proceso que permite obtener evidencias, elaborar juicios y brindar retroalimentación sobre los logros de aprendizaje de los alumnos a lo largo de su formación; por tanto, es parte constitutiva de la enseñanza y del aprendizaje.

Este concepto coincide en mucho con el de Evaluación Alternativa definido en el CCH por el Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Plantel Sur: la evaluación se entiende como la recopilación de información en el aula, mediante el desarrollo de actividades de enseñanza, con el objetivo de retroalimentar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje (SEAM-Paquete de Evaluación, 2010).

Más adelante en el mismo Acuerdo, se definen las siguientes competencias para la vida:

- Competencias para el aprendizaje permanente
- Competencias para el manejo de la información
- Competencias para el manejo de situaciones
- Competencias para la convivencia
- Competencias para la vida en sociedad

Estas competencias sirven para concretar los principios pedagógicos del Plan de Estudio del Nivel Básico.

Lo que aquí se plantea está en total concordancia con los planteamientos educativos del Colegio.

El currículo está organizado en Campos de Formación para la Educación Básica, de éstos se dice: *Los campos de formación para la Educación Básica organizan, regulan y articulan los espacios curriculares; tienen un carácter interactivo entre sí, y son congruentes con las competencias para la vida y los rasgos del perfil de egreso. Además, encauzan la temporalidad del currículo sin romper la naturaleza multidimensional de los propósitos del modelo educativo en su conjunto.*

Los Campos de Formación vienen a ser el equivalente a las Áreas del Colegio, estos son: Lenguaje y comunicación; Pensamiento Matemático; Exploración y Comprensión del Mundo Natural y Social; y Desarrollo Personal y Para la Convivencia.

Con respecto a Pensamiento Matemático se dice:

El campo Pensamiento matemático articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para presentarla.

El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos puedan utilizarlo de manera flexible para solucionar problemas. De ahí que los procesos de *estudio van de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos. La actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización.*

El énfasis de este campo se plantea con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para explicar sus resultados y en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. En síntesis, se trata de pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica.

Como ejemplo del carácter interactivo de los Campos entre sí, lo que se dice en el Campo de Exploración y Comprensión del Mundo Natural y Social en el nivel preescolar:

En preescolar, el campo formativo se centra en el desarrollo del pensamiento reflexivo, y busca que los niños pongan en práctica la observación, formulación de preguntas, resolución de problemas y la elaboración de explicaciones, inferencias y argumentos sustentados en las experiencias directas; en la observación y el análisis de los fenómenos y procesos perceptibles que les ayudan a avanzar y construir nuevos aprendizajes sobre la base de los conocimientos que poseen y de la nueva información que incorporan.

Esto es, se plantea reforzar la parte del razonamiento lógico-deductivo del pensamiento matemático con la formación de inferencias y su validación en campos diferentes al de Pensamiento Matemático.

Esta interactividad entre los campos no se tiene en el Colegio. Por tanto habría que buscar este tipo de consistencia transversal entre las áreas.

Por su parte, en el Nivel Medio Superior (SEP, 2010), se tienen las siguientes competencias genéricas (comunes a todas las áreas y las materias)

- Se autodetermina y cuida de sí
- Se expresa y comunica
- Piensa crítica y reflexivamente
- Aprende de forma autónoma
- Trabaja en forma colaborativa
- Participa con responsabilidad en la sociedad

El alumno que egresa de la Educación Media Superior debe ser analítico, creativo, crítico, informado, comunicador, autónomo, auto reflexivo, responsable, cooperativo, tolerante, solidario, sistemático y trabajador.

Se dice que *el entorno educativo debe ser un laboratorio en permanente actividad y no continuar con entornos estáticos y pasivos. Se sugiere utilizar la informática y la lúdica como apoyo, variar la metodología, no saturar el currículo con contenidos no significativos, dar tiempo al estudiante para que logre adquirir el conocimiento dar más importancia al aprendizaje que a la nota, tomar el error como oportunidad de aprendizaje, generar ambientes de cooperación y no de rivalidades, usar problemas reales como material de trabajo, hacer trabajo en equipo, promover platicas magistrales de temas puntuales, utilizar métodos de enseñanza en espiral donde se vuelve varias veces a los mismos temas, entre otras estrategias metodológicas que promuevan el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias.*

Y más adelante se reiteran los principios pedagógicos de la Educación Básica, definidos ahora como ámbitos: Saber, Saber Hacer, Saber Ser o Estar.

Las competencias disciplinares de Matemática son (SEP Acuerdo 486, 2009):

> ***1.*** *Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.*
>
> ***2.*** *Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.*
>
> ***3.*** *Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.*
>
> ***4.*** *Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.*
>
> ***5.*** *Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.*
>
> ***6.*** *Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.*
>
> ***7.*** *Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.*
>
> ***8.*** *Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.*

Es evidente que el currículo de Matemática del Nivel Básico y del Medio Superior de la SEP, a pesar del enfoque por competencias, está mucho más cercano a los planteamiento del Colegio que con las reformas anteriores, y esta cercanía se haría más evidente aún, si se reestructuran los principios educativos del Colegio de modo que exista un único principio, *aprender a aprender* que englobe a otros tres: *aprender a saber, aprender a hacer y aprender a ser*, como se ha insinuado en algunos documentos oficiales (CCH, 2009).

La Enseñanza de la Matemática en el CCH

Los planteamientos dados en esta sección corresponden al tercer Nivel de Concreción Teórica mencionado más arriba.

El currículo de Matemática del Colegio de Ciencias y Humanidades debe estructurarse de modo que tenga consistencia interna (en el Área misma) y una consistencia externa (con respecto a las otras áreas), y refleje claramente los tres principios educativos del Colegio.

Principios fundamentales del Colegio en el área de Matemática

El CCH se define a sí mismo como un bachillerato de Cultura Básica, entendida como el conjunto de principios y elementos productores de saber y hacer, cuya utilización permite adquirir mayores y mejores conocimientos y prácticas. Una primera cuestión sería determinar qué es la Cultura Básica desde la perspectiva de la enseñanza de la matemática.

En el Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática (SEAM) del Plantel Sur se ha estado trabajando la evaluación en el aula desde la perspectiva de un modelo de enseñanza conocido como *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (AMHM, Flores 2007, 2010). En este modelo se define la Cultura Básica en Matemática de la forma siguiente:

Diremos que un individuo con una Cultura Básica en Matemática es aquel que posee (Flores y Gómez, 2009):

- Pensamiento matemático que le permite reconocer patrones y generalizar; justificar resultados mediante argumentos matemáticos; y utilizar las representaciones de un mismo objeto matemático.

- Habilidades de resolución de problemas que le permiten usar su pensamiento matemático para plantear y resolver problemas dentro y fuera del ámbito matemático (la modelación matemática juega un papel importante en este punto).

- Competencia en el uso de tecnología que le permite utilizar las tecnologías que tiene a su alcance para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de su conocimiento.

- Actitudes positivas hacia las tareas matemáticas que le permiten plantear problemas y argumentar su resolución como una responsabilidad propia que redundará en su beneficio y en beneficio de los demás. Implica la capacidad para comunicar ideas y para escuchar las ideas de los demás.

- Valores humanos que le permitan una mejor convivencia con sus semejantes y el ambiente que le rodea.

Los primeros tres elementos de la Cultura Básica corresponden a aspectos cognitivos del desarrollo del estudiante y los últimos dos a aspectos de actitud y axiológicos. Los Principios Educativos del Colegio se atienden a través de estos cinco aspectos: *aprender a aprender* se atiende con los primeros tres; *aprender a hacer* está contemplado en el segundo, tercero y cuarto aspectos; mientras que *aprender a ser* se atiende a través de los dos últimos.

El modelo se ha probado en cursos regulares en el Colegio de Ciencias y Humanidades, y en cursos de formación de profesores en el propio Colegio y en el extranjero. Además, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* ha sido utilizado como marco teórico para el desarrollo de trabajos de tesis en Educación Matemática (Ávila, 2011; Cruz, 2011; Santos y Ruiz, 2011; López, 2012). Y abarca todos los niveles escolares, desde la educación hasta la educación superior.

Esta definición de Cultura Básica en el Área de Matemática del CCH puede servir para determinar los Objetivos y las habilidades de Pensamiento Matemático, y definir los Ejes de Desarrollo Cognitivo y Actitudinal que estructure el currículo matemático.

Consistencia Externa

La consistencia externa tiene que ver con la relación de las materias de Matemática con las de las otras áreas y el tomar en cuenta el eje transversal de Pensamiento Reflexivo. Por ejemplo, el Pensamiento Reflexivo (Dewey, 1910) implica la explicación de una situación que ha puesto en duda las creencias, esta explicación, a su vez, involucra una habilidad de comunicación. Tanto la comunicación escrita como la oral son una parte importante para determinar el grado de adquisición del conocimiento del estudiante, por tanto un eje transversal podría ser el de Comunicación (el área de Matemática puede contribuir en este sentido con la producción de ensayos sobre temas matemáticos, la lectura de textos y artículos en inglés y el desarrollo de esquemas de argumentación en Matemática, entre otros).

Con respecto a la relación con otras materias, es necesario hacer un análisis de los aprendizajes de las otras materias con respecto al conocimiento matemático que se necesita, por ejemplo, en Física I se estudia tiro parabólico que se modela con funciones cuadráticas que se ven también en segundo semestre. Por tanto este tema podría ser un apoyo para la materia de Física.

También es posible abordar temas de Matemática a partir del análisis de casos que implican situaciones sociales, éticas o históricas a la manera del Aprendizaje Basado en Problemas.

Consistencia Interna

La consistencia interna se lograría definiendo de manera mucho más específica los siguientes Ejes de Desarrollo Cognitivo y Procedimental.

Pensamiento Matemático que incluye

- Pensamiento numérico que implica la comprensión de los números y su representación (aquí entrarían algunos temas de Estadística Descriptiva).
- Pensamiento Geométrico que implica una percepción espacial de los objetos que nos rodean y con los cuales se está en contacto de manera constante (Temas de Geometría Euclidiana, Trigonometría y Geometría Analítica).
- Pensamiento Algebraico que implica el entendimiento de los procesos de generalización y las relaciones funcionales (Temas de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo)
- Pensamiento Probabilístico que implica la comprensión de los procesos estocásticos y de cálculo de probabilidades (Temas de Estadística Inferencial y de Probabilidad)

- Resolución de Problemas que incluye
    - Problemas de Exploración, Formación y Validación de Conjeturas
    - Problemas de Modelación Matemática
    - Problemas No Rutinarios

- Uso de Tecnología que incluye

    - Software de Matemática Dinámica (*The Geometer´s Sketchpad, GeoGebra, Autograph, etcétera*)

    - Software CAS (calculadoras con sistema CAS, *Derive*, entre otros)

    - Acceso eficiente a Internet y a plataformas de educación virtual como Moodle

    Con respecto al software de Matemática Dinámica en el ámbito escolar de todo el mundo se ha estado imponiendo el uso exclusivo de GeoGebra. La única ventaja visible de este paquete con respecto a los demás es su condición de gratuidad. Con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, es altamente recomendable utilizar dos o tres programas de este tipo, pues tienen filosofías de construcción y concepciones de aprendizaje diferentes.

Los aprendizajes se definirían con respecto a estos ejes y su ubicación en el currículo se establecería de acuerdo con criterios de seriación de la temática y tomando en cuenta las necesidades de materias de otras áreas.

Con respecto a los otros dos aspectos de la Cultura Básica, Actitud Matemática y Valores Humanos, éstos se fomentarían con la creación de un Medio-Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje (MAE) que propicie el **trabajo cooperativo** en un ambiente de **respeto** y **tolerancia** (Flores, 2010, SEAM, Paquete de Evaluación sin publicar).

Sobre la Evaluación

Como se comentó, la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es un aspecto que debe ser trabajado a conciencia en el Colegio de Ciencias y Humanidades; de hecho, en los programas vigentes de Matemática del Colegio no hay indicaciones sobre evaluación, éstas se remontan a los programas anteriores [véase la sección sobre evaluación de este mismo Diagnóstico].

En el SEAM se han definido instrumentos de evaluación alternativos a los exámenes y las tareas (que se utilizan de manera tradicional); estos instrumentos se clasifican en Cognitivos, que dan información sobre el desarrollo del conocimiento del estudiante; Metacognitivos que proporcionan datos sobre formas de aprendizaje del estudiante y, en cierta medida, sobre el desempeño del profesor y la efectividad de las actividades propuestas; y Afectivos, que informan sobre la concepción del estudiante sobre su participación en el aula y sus relaciones con el profesor y sus compañeros.

Los instrumentos de evaluación definidos en el SEAM coinciden mayoritariamente con los propuestos por la SEP para la evaluación de los Niveles Básico y Medio Superior. También se pueden utilizar como instrumentos para ordenar y analizar la información en proyectos de investigación educativa en el aula.

Si la evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje se hace conforme a un modelo de enseñanza emanado de la filosofía educativa del Colegio de Ciencias y Humanidades, sus resultados podrían contrastarse con los del EDA y, así, tener una evaluación más confiable.

Propuesta de instrumentación

En el Anexo se presenta una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del tema Funciones Trigonométricas, correspondiente a la tercera unidad de Matemáticas IV.

La secuencia se inscribe en el Modelo de Enseñanza *Aprender Matemática*, *Haciendo Matemática*. La secuencia representa el Tercer Nivel de Concreción del que se habla en párrafos anteriores.

El primer nivel queda contemplado en la construcción del Medio Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje, en éste se propone que las actividades se hagan en equipos (en particular se recomienda que sea en parejas), se permita el libre tránsito de información entre los equipos y entre el profesor y los estudiantes. Esto con el fin de propiciar la comunicación y el desarrollo de patrones de acción, comunicación y validación definidos en la teoría de las Situaciones Didácticas (segundo nivel de concreción). Se recomienda el uso de recursos computacionales, como *software* de Matemática Dinámica (primer nivel de concreción), para facilitar el desarrollo de las actividades y propiciar un entendimiento más completo de los conceptos y los procesos al poder intercambiar entre registros de representación con facilidad (Segundo Nivel de Concreción).

Las actividades se refieren tanto a la resolución de problemas mediante la modelación matemática (conexiones con otros ámbitos del conocimiento) como a construcciones teóricas.

Por último, se presentan algunos instrumentos para las actividades de evaluación y algunos resultados de su práctica en grupos del Colegio, esto como ejemplo de cómo sería la evaluación con instrumentos diferentes a los exámenes, y el tipo de información que arroja (que servirá para retroalimentar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje).

Referencias

Ávila, L., (2011). *La modelación en el entendimiento del concepto de función en estudiantes de bachillerato*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, CIP- Universidad Popular Autónoma del estado de Puebla.

CCH, (2005). Orientación y Sentido del Área de Matemática, México, UNAM.

Colegio de Ciencias y Humanidades (1996), Plan de Estudios Actualizado. México, Universidad Nacional Autónoma de México.

Colegio de Ciencias y Humanidades (1996), Programas de estudio del área de matemática. México, Universidad Nacional Autónoma de México.

Colegio de Ciencias y Humanidades (2009). El proyecto curricular del Colegio: continuidades y cambios en el plan y los programas de estudios. Cuadernillo Num. 7. México, UNAM.

Cruz, M. (2011) *Esquemas de Argumentación y Demostración Matemática en Estudiantes de Bachillerato*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana.

Delors, J., 1996, El Correo de la UNESCO, Abril, pp. 6-11.

Dewey, J. (1910). How we think. New York: D.C. Heath & Co. Publishers.

Dewey, J. (1953). Democracia y Educación: una introducción a la filosofía de la educación, Argentina, Editorial Losada.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5: 37-65 (IREM de Strasbourg).

Flores, A. H. (2007). Prácticas argumentativas y esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. México, México: Cinvestav-DME. (Tesis de doctorado no publicada.)

Flores, A. H., (2007). *"Aprender Matemática, Haciendo Matemática"*, Acta Scientiae, vol. 9, no. 1.

Flores, A. H., (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. Educaçao Matemática e Pesquisa. v. 12, n. 1, 76-87.

Flores, C. Gómez, A. y Flores, A. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. Acta Scientiae, 12(2), 22-42.

Flores, H. y Gómez, A. (2009) Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. Educación Matemática. Vol. 21 Núm. 2.

Godino, J., (2003). Funciones Semióticas: un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. España, Universidad de Granada, recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/, el 10 de marzo de 2012.

López, J. (2012). *Modelación Matemática en la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana (en revisión).

NCTM (2000), Principles and Standards for the School Mathematics, Reston, VA.

Pisa, (2003). *Assessment Framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. OCDE

Santos, E. y Ruiz. L. A., (2011) *Taller de modelación matemática para profesores de nivel medio superior y superior*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, CIP-Universidad Popular Autónoma del estado de Puebla.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (19 de agosto de 2011). Acuerdo 592. Diario Oficial de la Federación, págs. 1-112 (Secciones segunda a quinta).

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2010). Las competencias genéricas en el estudiante del bachillerato general. Recuperado el 4 de febrero de 2012, de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/pdf/cg-e-bg.pdf

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (30 de abril de 2009). Acuerdo 486. Diario Oficial de la Federación, págs. 74-77 (Primera sección).

Secretaría de Planeación (2011). Informes 2009-2: EDA. México, Colegio de Ciencias y Humanidades. UNAM.

ANEXO

DIAGNÓSTICO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS PARA LA ACTUALIZACIÓN DEL PLAN Y LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES DE LA UNAM

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SECUENCIA DIDÁCTICA

Proceso de Actualización del Plan y los Programas de Estudio

Mayo, 2012

Introducción

El tema de Funciones Trigonométricas corresponde a la tercera unidad de la asignatura de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades. Según el programa, los propósitos de esta unidad son:

> *Extender el concepto de razones trigonométricas e iniciar el estudio de las funciones trascendentes a través de las funciones circulares, cuya variación periódica permite modelar fenómenos cíclicos muy diversos. Reforzar el análisis de las relaciones entre grafica y parámetros que se ha venido realizando, resaltando la importancia de ajustar los parámetros para construir el modelo que se ciña a un fenómeno determinado.*

Se proponen 20 horas para su desarrollo, lo cual significa que hay que cubrir la Unidad en 4 semanas.

La presente secuencia didáctica es una propuesta para abordar la temática y los aprendizajes propuestos en el programa a partir del Modelo de Enseñanza, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*.

En este Modelo de Enseñanza se priviliegia, entre otras cosas, el estudio de la matemática a través de problemas de modelación. Por consiguiente, la mayoría de las actividades serán de este tipo.

Otra característica del Modelo es que los estudiantes trabajan en equipos (de preferencia en parejas) y se permite una absoluta libertad de comunicación entre los equipos. El profesor debe fungir como un guía en la resolución de los problemas; debe observar lo que hacen en cada equipo, animarlos a trabajar los problemas y ayudarlos en su resolución dándoles sugerencias de cómo proceder cuando se vean con dificultades para continuar.

Lo importante, aquí, es que los estudiantes no se sientan presionados y tengan la oportunidad de trabajar en un ambiente relajado y con la ayuda de sus compañeros y del profesor.

En *Aprender Matemática, Haciendo Matemática,* la evaluación se entiende como la recopiación de información y evidencias en el aula sobre el desempeño del estudiante y del profesor con el propósito de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante una retroalimentación. De manera colateral, se pueden usar los resultados de la evaluación para asignar una nota al estudiante con fines de acreditación. En nuestro Modelo usamos instrumentos alternativos de evaluación como Listas de Cotejo, Matrices de Resulltados y rúbricas, entre otras. Estos instrumentos se aplican a las respuestas que los estudiantes consignan en hojas de trabajo.

Las actividades que presentamos están divididas en tres secciones. La primera corresponde a un repaso sobre razones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos; la segunda son una serie de actividades que tratan sobre funciones periódicas en un círculo unitario, esto sirve de introducción a las actividades de la cuarta sección que corresponde al estudio de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Siguiendo la estructura de impartición de clases de matemática del CCH, las hojas de trabajo están diseñadas para llevarse a cabo en dos sesiones de dos horas aproximadamente y una de una hora (que corresponde a la clase de los viernes). En *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*, a las actividades que se hacen dentro del aula se les llama actividades de enseñanza-aprendizaje. Algunas de ellas son actividades de evaluación, que se distinguen de las otras solamente en su forma de llevarlas a cabo: mientras que las primeras sirven para que el estudiante aprenda –por ello el profesor está monitoreando el trabajo de los equipos y les ayuda cuando es necesario-, mientras que las segundas sirven para evaluación y su desarrollo corre a cargo exclusivamente de los estudiantes. Pueden proceder de manera habitual, la única diferencia es que no tienen la ayuda del profesor.

Con las actividades de evaluación es posible que el profesor obtenga información sobre el desempeño del grupo como tal y del logro de los aprendizajes. Dependiendo de la interacción que tenga el profesor con su grupo, es posible, incluso, que no haya que hacer actividades extra (como exámenes o tareas a casa) para asignar una calificación.

Para cada sección se presentarán los aprendizajes que se proponen y su clasificación según la taxonomía de Bloom. Se presentan también los instrumentos de evaluación correspondientes a las actividades de los viernes: lista de cotejo y matriz de resultados; y la rúbrica que ubica el nivel de entendimiento de las funciones trigonométricas y los conceptos relacionados con ellas.

La secuencia se probó con algunos grupos del CCH-Sur de ambos turnos en el marco del proyecto **Infocab PB100111**, a cargo del **Seminario de Evaluación Alternativa en Matemática** (SEAM) del CCH. A partir de los resultados de su puesta en práctica se hicieron algunas modificaciones a las actividades originales.

Recomendamos a los profesores resolver todos los problemas antes de aplicarlos a sus estudiantes. Esto es fundamental para tener una idea clara del tipo de conocimiento que se necesita y lo que se está pidiendo a los estudiantes. Se recomienda, también, desarrollar las actividades, siempre que sea posible, con la ayuda de un software de Matemática Dinámica. De preferencia, las actividades deberían llevarse a cabo en una sala de cómputo en la que se tenga acceso a este tipo de software.

En el *blog* del SEAM (http://seam.wikispaces.com/) se encuentran dos documentos que explican con amplitud tanto el Modelo de Enseñaza como su propuesta de evaluación en el aula. Uno de ellos es el artículo en PDF que se encuentra en la sección AMHM y el otro es un paquete de evaluación (SEAMPaqueteEvaluación.pdf) que se encuentra en la sección Evaluación Alternativa en Matemática).

Profr. Ángel Homero Flores

Sección 1. Razones Trigonométricas

Con respecto al aprendizaje de Razones Trigonométricas, el programa dice lo siguiente:

> Recuerda el significado de las razones trigonométricas para ángulos agudos en particular, seno, coseno y tangente.

Ubicamos este aprendizaje en el nivel de Comprensión: "*el individuo entiende el significado de instrucciones y problemas; puede traducirlos, interpolarlos e interpretarlos*."

En consecuencia, el propósito de las siguientes actividades va un poco más allá del aprendizaje propuesto y se pretende que el estudiante no sólo recuerde, sino que comprenda los conceptos y resuelva problemas o por lo menos que los interprete.

Actividades de la primera sesion (2 horas)

Problema 1

Un grupo de topógrafos deben calcular la altura de una montaña. Para ello, desde un cierto punto en el nivel del suelo, miden el ángulo de elevación a la cima de la montaña, éste ángulo fue de 21.7°. Después se acercan 500 m a la montaña y vuelven a medir el ángulo de elevación, éste fue de 35.9.

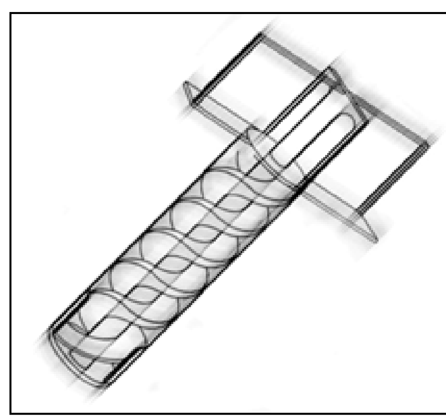
Problema 2

La entrada principal del Ayuntamiento de una ciudad está a un metro de altura y se accede a ella mediante una escalinata. Se quiere construir una rampa de acceso para sillas de ruedas. Por disposiciones legales el ángulo de inclinación debe ser de 4.5°. ¿Cuál es la distancia mínima a la entrada en donde debe empezar la rampa?

Actividades de la segunda sesión (2 horas)

Problema 3

El tornillo de Arquímides es un dispositivo que se usa para sacar agua de un estanque. Consiste en un tornillo insertado en un cilindro. Un extremo del cilindro está dentro del agua y el otro fuera, de modo que al girar el tornillo, el agua empieza a subir por el cilindro hasta salir por el otro lado. Este aparato es bastante eficiente si se le coloca a un ángulo de 25° con respecto a la horizontal. Si el cilindro debe extraer agua a una profundidad de 2.7 metros, ¿qué longitud debe tener?



Problema 4

Los estudios exploratorios de una compañía minera detectan un depósito de ópalo a 37 metros de profundidad en una propiedad privada. La compañía posee la propiedad contigua y quiere excavar en ella de modo que llegue al ópalo y poder extraerlo. Si el punto en donde piensan empezar la excavación está a 122 metros del punto de la superficie justo encima donde fue detectado el depósito, ¿con qué ángulo deben hacer la excavación para llegar al ópalo? ¿Qué distancia deben excavar?

Actividades de la tercera sesión (1 hora)

Problema 5

Si tienes un triángulo rectángulo, ¿cómo defines el seno, el coseno y la tangente de uno de sus ángulos?

Problema 6

Un granjero desea pasar un tubo de agua a través de una colina. El granjero ata una cuerda de 14.5 metros en el punto de entrada del tubo a la colina y otra de 11.2 metros en el punto de salida. Cuando jala las cuerdas completamente tensas, de modo que se sus extremos libres se unan, las cuerdas forman un ángulo de 58° entre sí, ¿cuál debe ser la longitud del tubo para que pase a través de la colina?

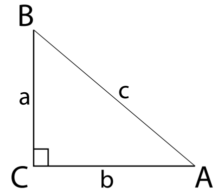
Explica qué se necesita para resolver este problema y cómo lo harías.

Instrumentos de Evaluación Problema 5

Lista de cotejo

Aspectos	Equipos				
	1	2	3	4	5
Dibuja un triángulo rectángulo y sus elementos					
Identifica correctamente catetos e hipotenusa					
Identifica correctamente los catetos opuesto y adyacente a un ángulo agudo del triángulo					
Define el seno de uno de los ángulos agudos como el cateto opuesto a ese ángulo entre la hipotenusa					
Define el coseno de uno de sus ángulos agudos como el cateto adyacente a ese ángulo entre la hipotenusa					
Define la tangente de uno de sus ángulos como el cateto opuesto a ese ángulo entre el cateto adyacente.					

Matriz de resultados

Problema	Respuesta esperada	Respuesta obtenida	Observaciones
Si tienes un triángulo rectángulo, ¿cómo defines el seno, el coseno y la tangente de uno de sus ángulos?	 sen A = a/c; sen B = b/c cos A = b/c; cos B = a/c tan A = a/b; tan B = b/a		

Instrumentos de Evaluación Problema 6

Lista de cotejo

Aspectos	Equipos				
	1	2	3	4	5
Hace un diagrama de la situación.					
Identifica el triángulo formado por las cuerdas, y la entrada y la salida del tubo.					
Se da cuenta de que no es rectángulo y no se pueden aplicar las razones trigonométricas directamente.					
Divide el triángulo en dos rectángulos.					
Aplica lo que sabe de razones trigonométricas a los triángulos rectángulo.					
Explica qué puede hacer para resolver el problema.					

Matriz de resultados

Problema	Respuesta esperada	Respuesta obtenida	Observaciones
Un granjero desea pasar un tubo de agua a través de una colina. El granjero ata una cuerda de 14.5 metros en el punto de entrada del tubo a la colina y otra de 11.2 metros en el punto de salida. Cuando jala las cuerdas completamente tensas, de modo que se sus extremos libres se unan, las cuerdas forman un ángulo de 58° entre sí, ¿cuál debe ser la longitud del tubo para que pase a través de la colina? Explica qué se necesita para resolver este problema y cómo lo harías.	1) Uso de la ley de cosenos; longitud = $11.2^2 + 14.5^2 – 2(11.5)(14.5)\cos(58^\circ)$ 2) Se divide el triángulo acutángulo en dos triángulos rectángulos y se aplica en éstos lo que se sabe de las razones trigonométricas.		

Sección 2: Funciones Periódicas

Con respecto a los aprendizajes de Funciones Periódicas, el programa dice lo siguiente:

a) Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa.
b) Calcula algunos valores de la razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el circulo unitario.
c) Generaliza el concepto de razón trigo-nométrica de un ángulo agudo a un ángulo cualquiera
d) Expresa las razones trigonométricas como funciones con los ángulos medidos en radianes.

Los aprendizajes (a), (b) y (d) quedan situados en el nivel de Aplicación: “El individuo usa un concepto en una situación nueva; o utiliza de manera espontánea una nueva abstracción. Aplica lo aprendido a situaciones nuevas”.

Y el aprendizaje (c) queda en el nivel de Análisis: “El individuo separa materiales o conceptos en sus componentes, de modo que pueda entender su estructura organizacional. Puede diferenciar entre hechos e inferencias”.

Actividades de la primera sesión (2 horas)

Problema 1

Una rana se adhiere fuertemente al borde de la rueda de un molino de agua de un metro de radio cuyo centro está exactamente en la superficie del agua. De manera inmediata, la rana es sacada del agua y gira junto con la rueda. La rueda gira en dirección contrahoraria de modo que da una vuelta completa cada 6 minutos.

a) ¿Cuántos grados gira la rana cada minuto y cada segundo? A la cantidad de grados que recorre la rana por cada segundo o cada minuto se le llama rapidez angular de la rana.

b) Si la rana ha recorrido 20°, ¿a qué altura de la superficie del río estará? Si en ese preciso momento la rana se dejara caer directamente hacia el agua, ¿a qué distancia del centro de la rueda caería? Explica tu respuesta

c) Si la rana se queda pegada al borde de la rueda, ¿para qué grados estará a 20 cm de altura del agua? Explica tu respuesta.

d) Si la rana se queda pegada al borde de la rueda, para que grados estará a una distancia horizontal de 75 cm del centro de la rueda?

e) ¿Para que grados la rana estará bajo el agua? Explica tu respuesta.

f) Si empezamos a contar el tiempo en el instante en que la rana sale del agua, ¿en cuánto tiempo llegará de nuevo al agua y que distancia habrá recorrido? Explica tu respuesta.

g) Si la rana permanece 5 horas en la rueda, ¿cuántas vueltas dio y que distancia recorrió? Explica tu respuesta.

Actividades de la segunda sesión (2 horas)

1. Supón que tienes un círculo de 11 cm de radio. ¿Cuánto mide su circunferencia? ¿Cuantos radios caben en la circunferencia? Explica tu respuesta.
2. Si en el círculo anterior, recorres sólo media circunferencia, tres cuartos de circunferencia, 6/7 de circunferencia ¿que distancia se recorre? ¿Cuántos radios caben en cada una de estas distancias? Explica tu respuesta.
3. Supón ahora que tienes un círculo de 7 cm de radio. Repite el ejercicio anterior. ¿Las respuestas son las mismas? ¿Por qué?
4. Las distancias que se recorren sobre la circunferencia de un círculo se llaman longitudes de arco, si comparas estas longitudes de arco con el radio del círculo, decimos que se está midiendo la longitud en unidades de radio o radianes. Así, una circunferencia completa mide 2π unidades de radio o radianes (que se abrevia rad).

Si 2π rad o 6.2831 (si sustituimos el valor de π, 3.14159) corresponde a una vuelta completa al círculo quiere decir que corresponde a recorrer un ángulo de 360°. Esto se puede usar para hallar la correspondencia de cualquier longitud de arco con los grados que se recorren.

Da la medida en grados correspondiente a cada una de las longitudes de arco siguientes:

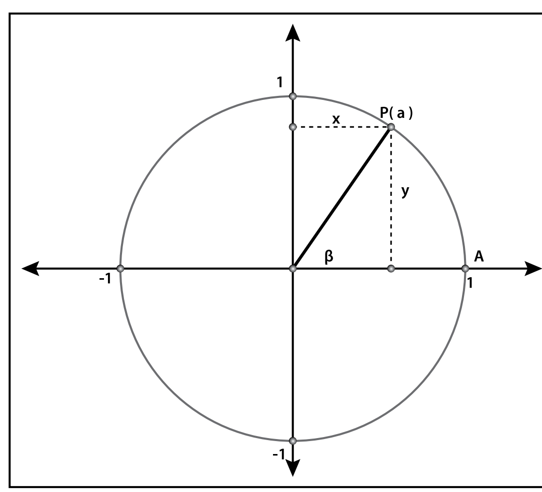
a) 2π; b) 5.3455; c) 0.47; d) 5.4π; e) 18π; f) 425.39; g) 400π

Da la medida en radianes correspondiente a la medida de los ángulos siguientes:

a) 90°; b) 12°; c) 125°; d) 45°; e) 40°; f) 155°; g) 387°

Actividades de la tercera sesión (1 hora)

1. En la figura se muestra un círculo unitario que se define como el círculo cuyo radio es la unidad de medida.



En un círculo unitario las longitudes de arco se miden en radianes o unidades de radio.

El punto de partida para medir longitudes de arco es el punto *A* cuyas coordenadas son (1, 0). Las longitudes de arco son positivas si se miden en dirección contrahoraria y negativas si se miden en la dirección opuesta.

El punto *P*(*a*) es el punto de la circunferencia que está en el extremo del arco *a*. Decimos que *P*(*a*) es el punto correspondiente al arco *a*.

Como se puede ver en la figura, a cada arco *a* le corresponde un ángulo ß formado por el radio y la parte positiva del eje *x*.

Así, los arcos de un círculo unitario y los ángulos que forman están en correspondencia uno a uno. Los ángulos se miden en grados y los arcos en radianes.

a) Dibuja el triángulo rectángulo que se forma con el punto P(a), la distancia *y* y la parte positiva del eje *x*.

b) Aplicando lo que sabes sobre razones trigonométricas en triángulos rectángulos, calcula el valor de *x* y el valor de y del triángulo que dibujaste. Explica tu respuesta.

c) Si en lugar de tener el seno o el coseno del ángulo (en grados) cambias al valor correspondiente en longitudes de arco, es decir el seno o el coseno de un arco medido en radianes, los valores cambian. La ventaja de calcular seno y coseno en términos de longitudes de arco es que pueden servir para cualquier longitud. Construye una tabla del seno y el coseno de un arco para longitudes de arco entre 0 y 2π, en incrementos de 0.5 radianes y grafica los puntos (recuerda que debes determinar primero cuál es la variable independiente y cuál la dependiente).

Instrumentos de Evaluación Tercera Sesión

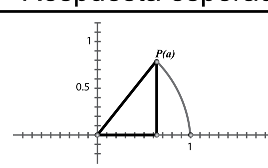
Lista de cotejo

Aspectos	Equipos				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Dibuja el triángulo correctamente					
Llega a la conclusión de que *x* = cos(*a*) y que *y* = sen (*a*)					
Da una explicación satisfactoria de su resultado					
Da una explicación					
Construye correctamente la tabla					
Construye correctamente las gráficas					

Matriz de resultados

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Respuesta esperada</th><th>Respuesta obtenida</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>a) Dibuja el triángulo rectángulo que se forma con el punto P(a), la distancia y y la parte positiva del eje x.

b) Aplicando lo que sabes sobre razones trigonométricas en triángulos rectángulos, calcula el valor de x y el valor de y del triángulo que dibujaste. Explica tu respuesta.

c) Construye una tabla del seno y el coseno de un arco para longitudes de arco entre 0 y 2π, en incrementos de 0.5 radianes y grafica los puntos (recuerda que debes determinar primero cuál es la variable independiente y cuál la dependiente).</td><td>

x = cos(ß); y = sen(ß)

Construye la tabla con los valores indicados, usando una caculadora.

Construye las gráficas de seno y coseno del arco.

Construye la con la longitud de arco en la primera columna, los valores de seno y coseno correspondientes a las longitudes de arco.

Grafica las funciones seno y coseno.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Sección 3: Funciones Trigonométricas

Con respecto a este tema, los aprendizajes propuestos son:

a) Identifica en las funciones del tipo:

$f(x) = a \operatorname{sen}(bx+c)+d$

$f(x) = a \cos(bx+c)+d$

La frecuencia, la amplitud, el periodo y ángulo de desfasamiento. Los utiliza para dibujar directamente la grafica. De igual manera, es capaz de identificar en la grafica estos parámetros para proporcionar la expresión algebraica correspondiente.

b) Conoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración o de los latidos del corazón, estudio de las mareas, fenómenos ondulatorios, etc.

Ambos aprendizajes fueron ubicados en el nivel de Aplicación: “El individuo usa un concepto en una situación nueva; o utiliza de manera espontánea una nueva abstracción. Aplica lo aprendido a situaciones nuevas”.

Actividades de la primera sesión (2 horas)

1. Considera la gráfica del seno de un arco. La amplitud de la función se puede definir como la distancia que va del eje *x* al punto máximo de la curva; y la longitud de onda de la función es la distancia medida en *x* entre dos máximos o dos mínimos de la curva.

   a) ¿Qué amplitud y longitud de onda tienen las funciones seno y coseno?
   b) ¿Qué tendrías que hacer a la función para desplazar su gráfica 3 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia la izquierda?
   c) ¿Qué tendrías que hacer para alargar o acortar su longitud de onda?
   d) ¿Qué tendrías qué hacer para aumentar o disminuir su amplitud?

2. Una función senoidal general tiene la forma $y = C + A \operatorname{sen}(Bq + D)$. Donde q es una longitud de arco. ¿Qué efecto tiene cada una de las constantes *A*, *B*, *C* y *D* en la forma de la gráfica? Explica tu respuesta.

Actividades de la segunda sesión (2 horas)

Problema 1

La profundidad del agua en una playa varía con el tiempo debido al fenómeno de las mareas. En una determinada playa se tiene una marea alta cada 12 horas y la profundidad del agua a 15 metros de la playa varía de 1.5 a 2.10 metros.

a) Modela la profundidad del agua con respecto al tiempo con una función trigonométrica.
b) ¿Qué amplitud tiene el modelo matemático anterior? Explica tu respuesta.
c) Si definimos el periodo de la función (o del modelo en este caso), como el tiempo que se tarda en recorrer una longitud de onda. ¿Cuál es el periodo de de tu modelo matemático?
d) ¿En qué momentos la profundidad del agua será de 1.70 m?
e) ¿Qué profundidad tendrá el agua a 5 horas de una marea baja? ¿A 17 horas? Explica tu respuesta.

Actividades de la tercera sesión (1 hora)

Problema 2

El péndulo de un reloj tiene 70 cm de largo. En cada oscilación recorre 30˚ hacia cada lado del punto más bajo y el recorrido desde el punto más alto de un lado al punto más alto del otro lo hace en 3 s.

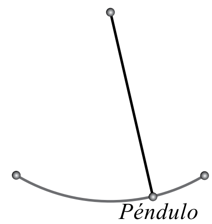
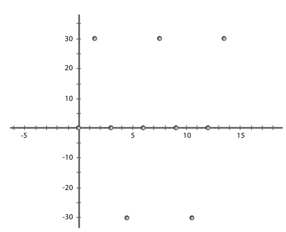
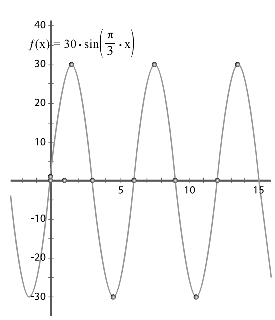
a) Encuentra un modelo matemático que describa los grados recorridos (medidos a partir del punto más bajo) con respecto al tiempo.
b) Da la amplitud, la longitud de onda y el periodo de tu modelo.
c) ¿Cuál es la velocidad angular de la bola del péndulo?

Instrumentos de Evaluación Tercera Sesión

Lista de cotejo

Aspectos	Equipos					
	1	2	3	4	5	6
Hace un diagrama de la situación						
Considera la posición 0 en el punto más bajo.						
Toma valores del ángulo como negativos hacia la izquierda del cero y positivos hacia la derecha.						
Forma una tabla con los valores extremos y el cero, para varios ciclos.						
Grafica los valores de la tabla						
Se da cuenta de que se trata de un seno de 30 de amplitud, longitud de onda 6 y periodo 6						
Da el modelo como 30sen[(π/3)t]						
Da la velocidad angular como la variación del ángulo con respecto al tiempo; w = 60/3 = 20 grados por segundo.						

Matriz de resultados

Problema	Respuesta esperada	Respuesta obtenida	Observaciones
El péndulo de un reloj tiene 70 cm de largo. En cada oscilación recorre 30° hacia cada lado del punto más bajo y el recorrido desde el punto más alto de un lado al punto más alto del otro lo hace en 3 s. a) Encuentra un modelo matemático que describa los grados recorridos (medidos a partir del punto más bajo) con respecto al tiempo. b) Da la amplitud, la longitud de onda y el periodo de tu modelo. c) ¿Cuál es la velocidad angular de la bola del péndulo?	 Empezamos a medir el tiempo en el punto más bajo; hacia la derecha los valores son positivos y hacia la izquierda negativos. El punto más alto es 30, por tanto la amplitud es 30, y el periodo del modelo es 6. Los puntos graficados son:  De la gráfica y los datos que se tienen podemos establecer el modelo como ß = 30sen((π/3)t) La gráfica del modelo pasa exactamente por todos los puntos de la gráfica. 		

Actividades de la cuarta sesión (2 horas)

Problema 3

Un ciclista da 16 vueltas a una pista circular de 250 m de circunferencia con una rapidez promedio de 50 km/h.

a) ¿En cuánto tiempo recorre las 16 vueltas?

b) Encuentra un modelo matemático que represente la distancia del ciclista con respecto al punto de partida.

c) ¿En qué momentos el ciclista estará a 100 m del punto de partida?

Actividades de la quinta sesión (2 horas)

Problema 4

La Rueda de la Fortuna más alta del mundo está en Singapur, tiene 163 metros de diámetro. Supón que la parte más baja de la rueda está a 7 metros del piso. Y que la rueda hace una vuelta completa en 37 minutos.

a) Encuentra un modelo matemático que dé la altura de una de las cabinas en función del tiempo. Para un intervalo de 0 a 2 hrs.

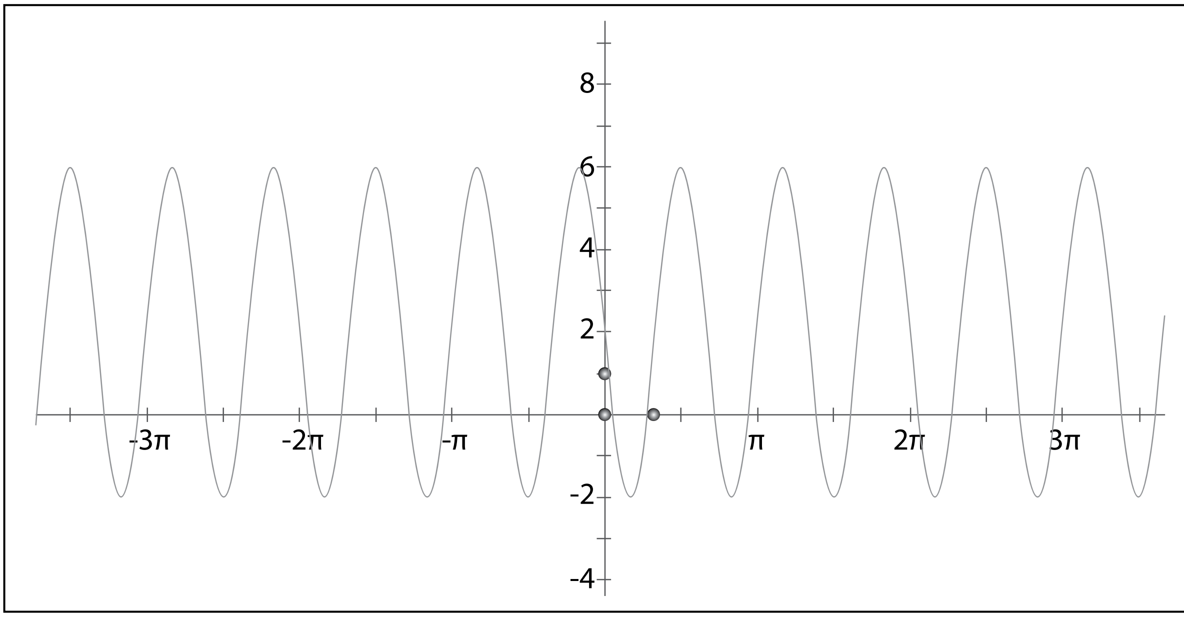
b) Utiliza el modelo para determinar la altura que tendrá una de las cabinas a 45 minutos del punto más bajo. Explica el procedimiento que seguiste.

c) ¿En qué momentos estará a 100 m de altura? Explica tu respuesta.

Actividades de la sexta sesión (1 horas)

1. Encuentra la función cuya gráfica se da a continuación.

a) ¿Cuál es su amplitud? ¿Qué longitud de onda tiene? Explica tu respuesta.



2. Sin tabular, dibuja la gráfica de la siguiente función, explica tu respuesta. *f(x) = 3+ 5cos(x – 3π)*

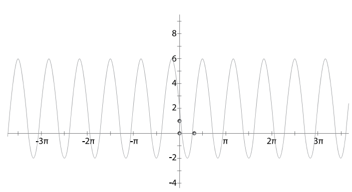
Instrumentos de Evaluación Actividad 1

Lista de cotejo

Aspectos	Equipos				
	1	2	3	4	5
Identifica la función como un seno o un coseno.					
Ubica a la gráfica como un coseno desplazada dos unidades hacia arriba.					
Determina que la amplitud de la función es 4					
A partir de la función f(x) = 2 + 4cos(Cx + D), y de los valores conocidos de la gráfica (f(0) = 2 y f(π/2) = 6 se obtienen los valores de C y D como 3 y π/2, respectivaente.					
Ubica a la gráfica como un seno desplazada dos unidades hacia arriba y con amplitud 4.					
A partir de la función f(x) = 2 + 4sen(Cx + D), y de los valores conocidos de la gráfica (f(0) = 2 y f(π/2) = 6 se obtienen los valores de C y D como 3 y π.					
Ubica los valores de A y B de la función correctamente sin efectuar cálculos					
Ubica los valores de C y D de la función correctamente sin efectur cálculos					

Aspectos	Equipos				
	1	2	3	4	5
Comprueba sus resultados.					
A partir del modelo determina que la longitud de onda es 5π/6					
Determina correctamente la longitud de onda a partir de la gráfica.					

Matriz de resultados

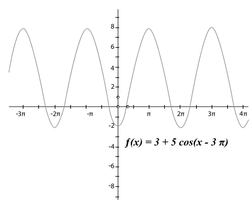
Problema	**Respuesta esperada**	**Respuesta obtenida**	**Observaciones**
Encuentra la función cuya gráfica se da a continuación.  a) ¿Cuál es su amplitud? ¿Qué longitud de onda tiene? Explica tu respuesta.	De la gráfica se determina que la función puede ser un seno o un coseno. Tomando la función coseno, ésta tiene la forma: A+Bsen(Cx+D) en donde A = 2 y B = 4. Al examinar la gráfica se tiene que f(0) = 2 y f(π/2) = 6. Con estos valores tenemos: e tienen las siguientes ecuaciones: 2 = 2+4cos(D) y 6 = 2+4cos(πc/2+D) De la primera ecuación se tiene: cos(D) = 0 por lo que D = π/2 Por tanto, la amplitud de la función es la distancia del punto medio al punto más alto o más bajo, en este caso es 4. La longitud de onda se define como la distancia que hay entre dos máximos consecutivos, en este caso, si usamos la función coseno se tiene:		

Instrumentos de Evaluación Actividad 2

Lista de cotejo

Aspectos	Equipos				
	1	2	3	4	5
Ubica los puntos máximos en –π, π, 3π, 5π, etcétera.					
Coloca los puntos máximos en 8					
Coloca el punto medio en 3					
Coloca los puntos mínimos en -2					
Traza la gráfica correctamente					

Matriz de resultados

Problema	Respuesta esperada	Respuesta obtenida	Observaciones
Sin tabular, dibuja la gráfica de la siguiente función, explica tu respuesta. *f(x) = 3+ 5cos(x – 3π)*			

Rúbrica: Entendimiento del concepto de funciones seno y coseno, y conceptos relacionados

	Aprendiz	Medio	Avanzado	Experto
Razones trigonométricas	Recuerda las razones pero no las relaciona con triángulos rectángulo ni como dependientes de un ángulo.	Las relaciona con triángulos rectángulos, pero no se da cuenta de que dependen de un ángulo agudo del triángulo. Usando las razones, puede calcular los lados del triángulo, pero no sus ángulos.	Puede resolver triángulos completamente, usando tanto las razones trigonométricas como el teorema de Pitágoras.	Además de resolver correctamente triángulos rectángulos, puesde aplicar las razones en la resolución de problemas fuera de la geometría y en problemas no rutinarios.
Ángulos y radianes	Considera el ángulo como la medida de la abertura de dos segmentos de recta que se cruzan. No conoce el concepto de radián.	Conoce el concepto de radián como una unidad alternativa a los grados, puede convertir sin mucha dificultad entre unos y otros.	Cono el radián como una unidad que mide longitudes de arco en unidades de radio, a diferencia de los ángulos.	Aplica el concepto de radián correctamente y sabe cuándo utilizarlo en lugar de los grados. Tiene conocimiento de que ambas unidades miden cosas diferentes, pero que existe una correspondencia uno a uno entre ángulos y longitudes de arco.

	Aprendiz	Medio	Avanzado	Experto
Razones trigonométricas	Confunde razones y funciones trigonométricas. No tiene claro el concepto de función periódica.	Sabe que una función trigonométrica es una función periódica y define seno y coseno como coordenadas de un punto en la circunferencia unitaria.	Conoce las funciones seno, coseno y tangente y puede graficarlas. Resuelve algunos problemas de modelación usando las funciones.	Resuelve con eficiencia problemas de modelación con funciones trigonométricas. Puede deducir la expresión algebraica de una función trigonométrica (en particular seno o coseno) a partir de su gráfica; y esbozar la gráfica de una función a partir de su expresión algebraica sin realizar cálculos (excepto para verificar su solución).

Consideraciones Finales

La rúbrica que presentamos a continuación fue obtenida en la puesta en práctica de la secuencia; se muestra el resultado de 10 Equipos (tomados al azar) de dos grupos de Matemáticas IV. Los Equipos 1 a 5 son del turno vespertino y los Equipos 6 a 10 corresponden al matutino.

	Aprendiz	Medio	Avanzado	Experto
Razones trigonométricas		E2, E8, E9 y E10	E1, E3, E4, E5, E6 y E7	
Ángulos y radianes		E6, E7, E9 y E10	E1, E2, E3, E4, E5, E8,	
Funciones trigonométricas		E8 y E10	E1, E2, E3, E4, E6, E7 y E9	E5

En ella vemos que la mayoría de los equipos se sitúan en el nivel avanzado y sólo uno en el nivel experto.

El nivel Experto implica que, además de que el estudiante (en este caso organizado en equipos de entre 2 y 4 estudiantes) es capaz de modelar situaciones con funciones seno y coseno, también puede pasar de un registro gráfico a uno analítico y viceversa. Este proceso entra de lleno en el ámbito de la matemática abstracta y es el siguiente paso en el entendimiento de los conceptos matemáticos.

Dado este resultado, se recomienda que el profesor ponga más énfasis en el análisis de las gráficas (obtenidas en los problemas de modelación) y en el efecto que tienen los parámetros en la regla de correspondencia de las funciones seno y coseno, en particular aquellos que afectan la longitud de onda, el desfazamiento y el periodo de la función.

Otro de los resultados que arroja la aplicación de la secuencia, es que el desempeño de los estudiantes depende en cierta medida de la experiencia que tenga el profesor en la metodología del Modelo *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*. Esto se refleja en el hecho de que los equipos del turno matutino (E6 a E10), cuyo grupo fue atendido por un profesor con poca experiencia en el Modelo, son los que más se ubican en el nivel medio, sobre todo en cuanto a razones trigonométricas y ángulos y radianes.

Por consiguiente, recomendamos a los profesores que aplicarán la Secuencia que tengan paciencia. La organización de la forma de trabajo y la conformación de los equipos debe ser tal que el profesor se sienta cómodo y con confianza de poder guiar las actividades adecuadamente. Es muy importante que se permita el libre flujo de información entre los estudiantes y que éstos se sientan relajados y a gusto cuando desarrollen las actividades; es decir, se debe propiciar un medio ambiente de enseñaza de convivencia y cooperación en el cual todos contribuyan al logro de los aprendizajes.

Finalmente, la instrumentación de *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*, eventualmente llevará al profesor a ejercer una docencia más completa y profesional y lo acercará a la figura de profesor-investigador. En nuestra concepción, el profesor-investigador es el profesional de la docencia que tiene los recursos necesarios para hacer investigación en el aula a través de una evaluación sistemática; los resultados de dicha investigación, a través de su socialización, contribuirán a mejorar la propia docencia y la de otros profesores.

En la medida que se vayan formando profesores-investigadores que trabajen de manera colegiada, será posible que sea el mismo profesor quien proponga los cambios curriculares necesarios para mejorar el aprendizaje y la educación de nuestros estudiantes.

Colegio de Ciencias y Humanidades

Mayo de 2012