Universidad Nacional Autónoma de México
Escuela Nacional
Colegio de Ciencias y Humanidades

Programas de Estudio
Área de Matemáticas
Cálculo I–II

Índice

Presentación

Las asignaturas del Área de Matemáticas correspondientes a los semestres de quinto y sexto del Plan de Estudios del CCH incluyen dos cursos optativos de Cálculo Diferencial e Integral, con la perspectiva de brindar al estudiantado que opte por ellos la oportunidad de construir los conceptos y procedimientos básicos del cálculo, a la vez que completan su formación en esta disciplina al reforzar el empleo de estrategias, la capacidad de resolución de problemas, el desarrollo de habilidades y de diversas formas de razonamiento, como el inductivo, el deductivo y el analógico.

Los cursos de Cálculo, al impartirse en los dos últimos semestres, constituyen la culminación de la formación matemática del ciclo del bachillerato. En ellos se retoman y aplican conocimientos de los cursos obligatorios anteriores, conforme se van incorporando los conceptos y técnicas del cálculo. Para el bachiller es el primer acercamiento a esta importante rama de las matemáticas. El nivel de conocimiento que adquiera enriquecerá la formación de su pensamiento matemático y así enfrentará con éxito los estudios superiores que realice.

En concordancia con el Modelo Educativo del Colegio, donde el aprendizaje del alumnado es la actividad rectora, se propone como idea sustantiva darle significado a los conceptos, técnicas y procedimientos con base en el estudio de situaciones problemáticas en diferentes contextos de aprendizaje, en las que el cálculo es una herramienta fundamental para su comprensión, análisis, y solución, con el propósito de que sea capaz de resolver problemas, abstraer, establecerconjeturas y encontrar el sentido de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral.

Dada la creciente importancia de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) y las Tecnologías del Empoderamiento y la Participación (TEP) como un medio para la construcción de ambientes de experimentación en el aula, es conveniente sean consideradas para la puesta en práctica de los programas de estudio; esto contribuirá al desarrollo del pensamiento matemático desde otras perspectivas y proporcionará al alumnado experiencia en el manejo de herramientas tecnológicas y digitales.

Finalmente, la formación que se adquiere con base en los procesos de enseñanza y de aprendizaje que le dan identidad a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, debe contribuir a la construcción sólida de las bases conceptuales que permitan a los egresados continuar sus estudios universitarios.

Relaciones con el Área y con otras asignaturas

El apropiarse de los conceptos, técnicas y procedimientos propios del Cálculo Diferencial e Integral permitirá al alumno enriquecer el análisis de diversas situaciones, tanto en el ámbito matemático como el de otras disciplinas como la física, la química, la biología, la econo- mía, la administración, entre otras. En las licen- ciaturas de corte científico y técnico el Cálculo Diferencial e Integral forma parte de su requisito curricular.

Con respecto a la apropiación de los concep- tos, técnicas y procedimientos propios del Cálculo Diferencial e Integral, estas asigna- turas permitirán al alumnado, al percibirlas como herramientas, enriquecer el análisis de diversas situaciones de otras disciplinas como la física, la química, la biología, la economía, la administración, entre otras, así como profundizar su sentido y significado como disciplina científica. Las técnicas y habilidades de pensamiento desarrolladas en el estudio del Cálculo se pueden relacionar de manera significativa con otras áreas científicas, por ejemplo, en física se pueden emplear en ramas como la cinemática o dinámica, en biología para modelar poblaciones, en química para estudiar tasas de recciones y en economía para optimizar costos.

Es necesario que haya una apropiación de los apren- dizajes señalados en los cursos de Matemáticas I-IV, pero esencialmente se considera necesario, por una parte, disposición y conocimiento para una interacción entre las diferentes representaciones de las funciones polinomiales, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, así como para la manipulación algebraica de los diferentes sistemas de números y de ecuaciones.

En cuanto al desarrollo del pensamiento matemático, podrá profundizar en el uso de diferentes representaciones, la resolución de problemas y la importancia de argumentar sus afirmaciones. Adicionalmente, estas asignaturas contribuirán a consolidar los conocimientos matemáticos que el alumnado requiere para afrontar con éxito las licenciaturas de corte científico y técnico donde el Cálculo Diferencial e Integral forma parte del requisito curricular.

Enfoque de la materia

Introducción:

El conocimiento científico, en particular el matemático no se desarrolla de manera lineal y ordenada, su sistematización y transmisión se da en un momento posterior, cuando se hace una reflexión específica para ordenarlo, ya sea por un individuo o un grupo de personas que pertenecen al campo de estudio en cuestión, es decir, una comunidad epistémica. Para la sistematización de tales conocimientos la comunidad epistémica opta por diferentes formas de reconstrucción: histórica, lógica, teórica, tecnológica, económica, etc., es decir, decide qué aspectos resaltar para ordenar y encadenar el desarrollo de la disciplina, por ejemplo los momentos históricos más relevantes, la consistencia y el rigor interno de la teoría, los cambios tecnológicos, entre otros.

Históricamente en los programas de estudio en matemáticas se han utilizado reconstrucciones lógicas, éstas tienen la intención de sistematizar la disciplina enfatizando la completez, el rigor y la formalidad. Además, la mayoría de las veces se utilizan cortes sincrónicos al organizar los contenidos, sin considerar su evolución histórica, por ejemplo en el Prefacio de Hairer y Wanner (2008) se explica que tradicionalmente, un primer curso riguroso en análisis avanza (más o menos) en el orden: conjuntos, mapeos, límites, funciones continuas, derivadas, integrales. Por otra parte, el desarrollo histórico de estos temas ocurre en orden inverso.

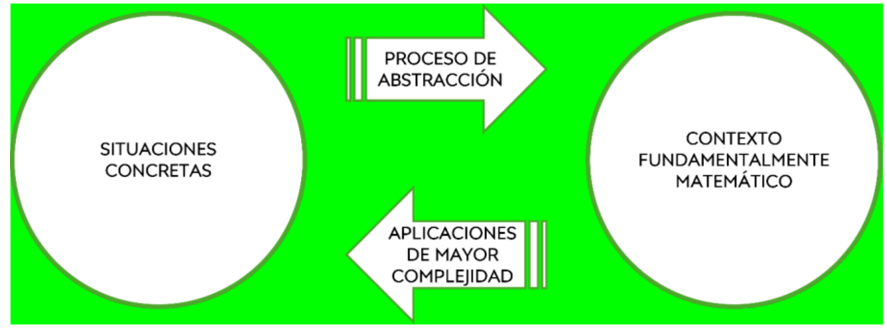
Figura 1. Tipos de reconstrucciones, adaptado de Hairer y Wanner (2008)

Cuando la intención es promover el aprendizaje entonces la comunidad epistémica correspondiente, la cual en nuestro caso es la colegialidad y ha dado como resultado al claustro de profesores unidos bajo los Principios y el Modelo Educativo del Colegio, proponen una Reconstrucción Didáctica. En ésta el énfasis está en el aprendizaje, aunque no necesariamente sea la más tradicional, rápida de impartir, rigurosa, etc. En otras palabras, es una reconstrucción que se conceptualiza poniendo en el centro el aprendizaje, aunque no necesariamente enfatice la completez, el rigor y la formalidad.

De esta manera, nuestros programas indicativos tienen como propósito dar concreción y orientación a una *Reconstrucción Didáctica*, en ésta se puede apelar a elementos históricos, didácticos, resultados de investigación educativa, herramientas tecnológicas o cualquier otro elemento que contribuya a una sistematización que promueva el logro de los aprendizajes.

En particular, los elementos que se consideran para establecer la reconstrucción didáctica de este programa de Cálculo Diferencial e Integral, que se concretan en las cartas descriptivas, son los siguientes:

- Es un bachillerato general en la que las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral son optativas.
- El aprendizaje es la actividad rectora, por lo que el planteamiento sustantivo es darles sentido y significado a los conceptos, técnicas y procedimientos en diferentes contextos —hipotético real, matemático y real—en los que el Cálculo es herramienta fundamental.
- El ciclo de aprendizaje propuesto considera: a) iniciar con situaciones concretas y sencillas en los contextos hipotético real, matemático y real (cuando éste sea posible) para identificar las características del concepto y métodos que se propone analizar; b) para la aprehensión conceptual privilegiar las actividades cognitivas entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica para la aprehensión conceptual del concepto en estudio y c) concluir con situaciones más complejas en los contextos hipotético real, matemático y real (cuando éste sea posible) con herramientas más refinadas.



- Propiciar un ambiente que corresponda a características del trabajo como disciplina científica: la resolución de problemas, promoviendo un método inquisitivo.
- Considerando que el acceso a los conceptos matemáticos es por medio de sus representaciones, es importante propiciar actividades cognitivas entre los registros tabular, gráfico y algebraico de dichos conceptos, principalmente.
- Proporcionar las habilidades y conocimientos que le permitan el estudio formal y riguroso de conceptos que los estudios de nivel superior le demanden.
- Construir bases sólidas que le den identidad a las ideas rectoras de los constructos del Cálculo Diferencial e Integral: la variación y la acumulación.

Lo anterior se materializa en los siguientes esquemas.

Procesos infinitos y la noción de límite	⇒	El concepto de derivada: variación y razón de cambio	⇒	Derivada de funciones algebraicas	⇒	Comportamiento gráfico y problemas de optimización
Derivadas de funciones trascendentes	⇒	La integral definida	⇒	La integral indefinida	⇒	Modelos y predicción

Enfoque Disciplinario

Considerando que uno de los principales propósitos de las asignaturas del área de matemáticas es dotar al estudiantado de una manera de pensar donde puedan:

- comprender, utilizar y construir relaciones entre cantidades y formas espaciales;
- manejar diversos recursos para resolver problemas;
- percibir la necesidad de argumentar sus afirmaciones.

Las actividades a lo largo del curso deben encaminarse a fomentar el desarrollo de tales habilidades de pensamiento.

Por otra parte, en la selección de los conceptos, técnicas y métodos del Cálculo Diferencial e Integral para ser incorporados a los programas se consideran: el carácter propedéutico y terminal en la formación del alumnado, la concepción de la matemática como disciplina científica y la caracterización de los objetos de estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

En primer término, respecto a la formación del estudiantado, se toma en cuenta la necesidad de proporcionarle conocimientos suficientes para enfrentar con éxito sus estudios superiores; además de comprender y resolver con mejores recursos culturales diversas situaciones de la vida cotidiana y dotarlo de estrategias de aprendizaje y capacidades analíticas que le permitan superar las exigencias que el trabajo productivo demanda.

En segundo término, no menos importante para dicha selección, es la interpretación de las matemáticas como disciplina científica. Al respecto se considera que:

a) Las matemáticas son un cuerpo de conocimiento lógicamente estructurado que estudia las relaciones cuantitativas y de forma de objetos abstractos que surgen de analizar situaciones concretas mediante procesos y razonamientos cada vez más depurados.

b) En los procesos de descubrir y construir el conocimiento matemático se reconoce la importancia de la búsqueda intuitiva, los titubeos, el tanteo, las suposiciones, las dudas e incluso los errores.

c) Como área de conocimiento destaca que el carácter abstracto y general de conceptos y métodos le genera un gran potencial de aplicaciones.

d) En sus métodos y estructura aparece el rigor lógico como componente indispensable para aceptar como válidas sus afirmaciones, lo que obliga a proporcionar una rigurosa demostración de éstas.

e) En sus usos y aplicaciones se relaciona con otras ciencias lo que se manifiesta con una vinculación más estrecha con los procesos tecnológicos.

Un tercero y último aspecto, la caracterización de los objetos de estudio del cálculo diferencial e integral, considera que esta rama de las matemáticas se articula a partir de dos ideas fundamentales, la variación y la acumulación. Dos representaciones significativas de estas ideas, que le dieron origen, se refieren a la solución de problemas en los ámbitos geométrico y físico. En el aspecto geométrico, son la obtención de la recta tangente a una curva y la obtención del área bajo una curva; en el escenario de la física es la modelización de la velocidad cuando se conoce la distancia recorrida en un tiempo dado y la obtención de la distancia recorrida cuando se conoce la velocidad.

Para la concreción de estas dos ideas centrales, la variación y la acumulación, que se traducen en los conceptos fundamentales del cálculo, la derivada y la integral, se incorporan otros conceptos, técnicas y métodos que se describirán posteriormente al presentar los propósitos de cada curso; al respecto es pertinente hacer las siguientes precisiones:

- Si bien el concepto de función es el sustento para la derivada y la integral, no se incorpora como un tema de estudio de estos programas dado que, en cursos anteriores, principalmente en el curso de Matemáticas IV, se ha trabajado con amplitud y profundidad. Emplearlas en el contexto de los conceptos de derivada e integral permitirá profundizar en su comprensión.
- Se reconoce que el concepto de límite es fundamental para una construcción completa del cálculo, pero al considerar que es un primer acercamiento al estudio de esta disciplina y a la experiencia y conocimientos adquiridos en los primeros cuatro semestres, se optó por realizar un acercamiento a la idea esencial del límite a partir de procesos infinitos dado que permiten reconocer la tendencia, estabilización y la posibilidad de predicción de valores y comportamientos de las variables

involucradas, para enfrentar desde esta perspectiva el estudio de la derivada y la integral.

- Aun cuando la percepción intuitiva de la continuidad de una función ha permeado en el desarrollo de los cursos anteriores en forma intuitiva, al trabajar la representación gráfica de diferentes tipos de funciones,, este concepto no forma ha sido parte explícita de las temáticas.; la justificación Para este curso de Cálculo, el concepto de continuidad sí se incluye de manera explícita, sin embargo la intensión no es realizar un tratamiento riguroso o formal, lo que se pretende es que el alumnado sea capaz de interpretarla de manera intuitiva, utilizando distintos registros de representación, tendencias o discontinuidades. La razón obedece a que en este primer acercamiento a las ideas esenciales del cálculo es posible llevarlo a cabo con esa percepción intuitiva, lo cual posibilitará la apropiación formal de este concepto en cursos de cálculo en sus estudios en el nivel superior, si éstos así lo demandan.

Considerando que la materia de Cálculo Diferencial e Integral ofrece al bachiller un primer acercamiento sistemático a esta disciplina, y tomando en cuenta el propósito de su formación, las características de las matemáticas como disciplina científica y el objeto de estudio del cálculo diferencial e integral, la selección del contenido disciplinario se orienta bajo las siguientes premisas:

- Desarrollar el sentido del cálculo diferencial e integral mediante la comprensión de diferentes situaciones que se modelan con las herramientas de esta disciplina, así como el establecimiento de conexiones con otros contextos matemáticos y otras disciplinas científicas.
- Identificar el carácter abstracto de los conceptos de variación y acumulación, a partir de analizar diferentes contextos del ámbito matemático y de otras disciplinas en los que surgen dichos conceptos.
- Apropiarse de conceptos, técnicas y procedimientos propios del cálculo diferencial con el propósito de enriquecer el análisis de diversas situaciones tanto del ámbito matemático como el de otras disciplinas.
- Enriquecer el razonamiento matemático al desarrollar métodos que están presentes al aplicar los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral.

En resumen, la selección del contenido disciplinario se rige con la siguiente orientación general:

Con base en la identificación de las ideas de variación y acumulación, darle sentido a los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo diferencial e integral.

Enfoque didáctico

En este apartado se plantea un conjunto de consideraciones para organizar y dirigir la actividad cotidiana en el salón de clases. Inicialmente se identifican rasgos esenciales del aprendizaje de las matemáticas, en particular del cálculo, posteriormente se proporcionan elementos para interpretar a la resolución de problemas como método del pensamiento matemático que se debe privilegiar, se continúa señalando los atributos a tomar en cuenta para incorporar las TIC como herramienta de aprendizaje y se concluye con la identificación de elementos que permiten estructurar el proceso de enseñanza que posibilite la apropiación de los aprendizajes.

Para caracterizar el aprendizaje de los conceptos matemáticos, esencialmente se toma en cuenta que el Modelo Educativo del Colegio reconoce la importancia de que el estudiantado sea capaz de apropiarse y construir nuevos conocimientos, y que la matemática es una disciplina en constante desarrollo en la que aprender debe estar íntimamente relacionada con la participación activa del estudiantado en la construcción de resultados matemáticos; en dicha participación, es relevante la disposición de plantear y resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido a las ideas matemáticas, esto es, desarrollar matemáticas, proceso en el que es muy importante encontrar el sentido a las relaciones, separarlas y analizarlas para distinguir sus conexiones con otras ideas.

Aprender matemáticas, en particular cálculo diferencial e integral, es un proceso en el que se desarrolla una disposición y forma de pensar con el propósito de que el estudiantado desarrolle un pensamiento y lenguaje variacional a través de un proceso continuo de resolución de problemas, donde se busquen y exa- minen diferentes tipos de relaciones, planteen conjeturas y se argumente su validez, utilicen diferentes sistemas de representación, establezcan conexiones, y comuniquen sus resultados.

Al considerar que para la formación del estudiantado del bachillerato del CCH es relevante privilegiar la apropiación y construcción de los conceptos matemáticos, es conveniente insistir que el planteamiento y solución de problemas debe ser el hilo conductor para organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que es una forma de interactuar y pensar acerca de las sitúaciones (problemas o conceptos) que demandan, en los procesos de comprensión y solución, el empleo de recursos y estrategias matemáticas.

Para la puesta en práctica el método de la resolución de problemas, se propone el desarrollo de un método indagador o interrogativo, también conocido como inquisitivo,[1] que le permite al estudiantado conceptualizar a las matemáticas como un conjunto de dilemas o preguntas que se representan, exploran y responden a partir de recursos, estrategias y formas de razonar que son consistentes con el quehacer de la disciplina.

Para establecer los niveles de extensión y profundidad en la apropiación de los conceptos y procesos matemáticos implementando el método interrogativo (inquisitivo), es conveniente distinguir tres contextos de aprendizaje: a) contexto puramente matemático: el referente en donde se desarrolla la situación, involucra solamente aspectos matemáticos; b) contexto del mundo real: en esta situación, la comprensión del problema se relaciona con identificar a las variables involucradas en la situación real, y c) contexto hipotético: la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación.

El trabajo organizado con base en la resolución de problemas posibilitará al estudiantado el desarrollo de habilidades matemáticas, entre las que destacan: estimación (identificar el rango de valores en los que puede estar un resultado, redondear cantidades para facilitar operaciones y contar así con una apreciación del resultado de las mismas); generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); formalizar "material matemático (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); reversibilidad de pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); flexibilidad de pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); visualización espacial (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada).

El tercer aspecto por considerar en la organización y conducción de las acciones en el salón de clases de enseñanza es la incorporación de las TIC, TAC y TEP con el propósito de enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral. El acceso social a esta tecnología, en sus distintas manifestaciones, teléfonos celulares, tabletas electrónicas, computadoras, reproductores digitales de audio y video, servicios de la WEB, redes sociales o plataformas educativas, entre otras, nos lleva a considerar su incorporación al aula.

Además, resultados en el ámbito de la investigación educativa contribuyen a la consecución de dicho propósito. A continuación se señalan algunas consideraciones para utilizarla:

- La posibilidad de almacenar, compartir y presentar información en distintos formatos, voz, texto, imágenes datos, de manera simultánea, así como el procesamiento y transmisión de esta información en diferentes modalidades, libros electrónicos, apuntes interactivos, blogs, entre otros, permite acercamientos novedosos a los conceptos del cálculo.
- Ofrecer la posibilidad de formular y explorar hipótesis y conjeturas de tal suerte que la escuela no sea solamente un lugar donde los conocimientos se transmitan, sino esencialmente se construyan.
- Organizar actividades en el proceso de resolución de problemas que promueven el pensamiento matemático del estudiantado al tener la posibilidad de trabajar en la solución desde diferentes perspectivas.

[1] *Diccionario de la Real Academia Española:* "Que inquiere y averigua con cuidado y diligencia las cosas o es inclinado a ello".

- Representar objetos matemáticos dinámicamente a partir de la identificación de propiedades y relaciones de objetos particulares que son difíciles de pensar o identificar en aproximaciones que se realizan sin este recurso.
- La representación dinámica de objetos matemáticos permite explorar relaciones entre variables en una configuración geométrica, mediante diferentes aproximaciones (gráfica o numérica) sin que se tenga que establecer de forma explícita relaciones algebraicas entre las variables involucradas en el problema.

En resumen, la incorporación de las TIC permitirá promover las habilidades en el uso de la tecnología, favorecer la incorporación de los avances actuales en el ámbito escolar y enriquecer el método de resolución de problemas y la consolidación del pensamiento crítico en el estudiantado.

Finalmente, las consideraciones respecto a la interpretación del aprendizaje de las matemáticas privilegiando el proceso de resolución de problemas, sustentado en diferentes contextos de aprendizaje y el uso de las TIC para su concreción en el aula, es importante la implementación de las estrategias propuestas, considerándolas como actividades a realizar para el logro de los aprendizajes. Para llevar a cabo dicha implementación debe considerarse la organización del proceso de instrucción a partir de los siguientes aspectos:

a) La selección del contenido matemático, indicado en la temática y los procedimientos del pensamiento matemático, la resolución de problemas, las formas de razonamiento y argumentación, la comunicación de resultados, el establecimiento de conexiones y el uso de diversas representaciones. Además de la selección de los contextos de aprendizaje, puramente matemático, del mundo real e hipotético.

b) Los materiales e instrumentos a utilizar, de los cuales destacan, la selección de lecturas de un libro de texto, la aplicación de hojas de trabajo y la utilización de calculadoras o computadoras entre otros.

c) La selección, organización e implementación de las tareas para obtener los aprendizajes planteados en las que se enfatiza, la participación del estudiantado en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos, la presentación de los acercamientos del estudiantado a los problemas a toda la clase o grupo, la realimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución del estudiantado y la necesidad de aprender nuevos contenidos y la reflexión individual que permita al estudiantado incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades.

d) La evaluación de la apropiación de los aprendizajes, no únicamente como la aplicación de instrumentos, sino como parte del proceso de instrucción para enriquecer el aprendizaje al reflejar la matemática que los estudiantes deben conocer y ser capaces de hacer.

Concreción en la materia de los principios del Colegio: aprender a aprender, aprender a hacer, aprender a ser

La materia de Cálculo contribuye a los principios pedagógicos del Colegio de diversas maneras como las señaladas a continuación:

Aprender a aprender

Al trabajar los cursos mediante el esquema de una clase- taller, se fomenta en el alumnado el desarrollo de habilidades de pensamiento como la observación, el reconocimiento de patrones de comportamiento, el establecimiento de conjeturas, la capacidad de generalización, entre otras, lo que hace de la resolución de problemas, más que una práctica mental, una actividad generadora de conocimiento, propiciando un estudiantado autónomo en la adquisición de conocimientos.

Aprender a hacer

La materia de Cálculo Diferencial e Integral enfatiza en sus aprendizajes un conjunto de contenidos y métodos que caracterizan a la matemática como una disciplina científica. En su desarrollo se hace énfasis, por una parte, en las formas de razonamiento y argumentación y por otra, en el desarrollo de procedimientos que permiten analizar la variación y la acumulación, lo que genera una amplia gama de aplicaciones en otras disciplinas, tanto en las ciencias como en las humanidades.

Aprender a ser

Al realizar las diversas actividades de estos cursos, tanto de manera individual, por equipos o de manera grupal se fomenta el desarrollo del pensamiento crítico, el respeto a las ideas de otros y la discusión argumentada de estas, así como también se fortalecen habilidades como la capacidad del trabajo en equipo. Por otra parte, las habilidades de pensamiento matemático contribuyen a formas de trabajo y de actitudes que favorecen el éxito, tanto en el ámbito escolar como en el personal.

Evaluación

En este apartado, inicialmente se puntualiza el significado de evaluación como componente en la organización del proceso de instrucción. Posteriormente, se ofrece una interpretación de los métodos de evaluación como un elemento que permita la consecución de los objetivos de la materia y los propósitos de cada unidad. Se concluye con la descripción de algunos métodos de evaluación que permitirán enriquecer el proceso.

La evaluación, como una componente en la organización del proceso de instrucción, la interpretaremos como un proceso sistemático de obtención de información del logro de los aprendizajes del alumnado. Dicha información permitirá, por una parte, dar a conocer al alumnado los aprendizajes obtenidos y, por otra parte, al profesor, identificar las fortalezas y debilidades del estudiantado y de él mismo para modificar favorablemente sus propuestas de aprendizaje y de enseñanza.

En este proceso, tienen relevancia los métodos de evaluación que se utilicen. Deben considerarse los instrumentos de evaluación, los contenidos y contextos que propician los aprendizajes planteados, y los procesos del pensamiento matemático involucrados.

La concreción de los aprendizajes a evaluar, tienen como referentes los propósitos educativos de la materia, los propósitos de aprendizaje general y particular, indicados en cada una de las unidades. Esto es, el método de evaluación debe estar relacionado estrechamente con las orientaciones del curso y propósitos de las unidades.

Es recomendable que los métodos de evaluación que se utilicen sean diversos, así como acordes con los propósitos planteados, con la intención de que promuevan el compromiso del alumnado hacia la apropiación de los aprendizajes. A continuación se mencionan métodos de evaluación que permiten la obtención de información desde distintas perspectivas.

Proyecto de trabajo individual

Es la investigación de un tema o la solución de un problema, en la que el alumnado tiene que recurrir a diferentes fuentes de información y a diversos recursos digitales, lo cual le posibilitará desarrollar tanto su iniciativa, como un trabajo independiente. Se debe elaborar un reporte escrito y hacer una presentación de los resultados. La complejidad de la investigación o del problema permitirá estimar el tiempo que se debe invertir con trabajo extra–clase para su solución. En este sentido el proyecto puede atender a los conocimientos de todo el curso, a una unidad o aprendizajes específicos. Es conveniente indicarle al alumnado que significará un buen trabajo a través de un protocolo de evaluación, con la intención de que, en el desarrollo del proyecto, aprenda a realizar una investigación o resolver un problema no rutinario y presentarlo de manera convincente.

Proyecto de trabajo grupal

Este proyecto es similar al individual, adicionando la problemática de trabajar en equipo. Se recomienda que la investigación o el problema propuesto se desarrollen durante todo el semestre.

Variaciones sobre el examen escrito

Utilizar otras formas del examen escrito, restringido a un determinado tiempo durante la clase y generalmente sin incluir situaciones no rutinarias, son pertinentes para recabar otro tipo de información de los aprendizajes obtenidos. Destacamos los siguientes: examen a libro abierto; examen utilizando entornos de geometría dinámica o CAS; examen que involucre preguntas conceptuales.

Lecturas de comprensión

Consiste en proponerle la lectura del apartado de un libro o un artículo de divulgación para propiciar el estudio crítico y reflexivo, posibilitando evaluar el entendimiento de procesos matemáticos; es conveniente orientar el análisis mediante un cuestionario.

Resolución de problemas

Para la obtención de información del aprendizaje que surge en la resolución de problemas es recomendable diseñar actividades que capturen dicha información, de acuerdo considerando los siguientes aspectos:

a) La comprensión del problema: el estudiante debe mostrar que ha entendido el problema.

b) La habilidad del estudiante para seleccionar estrategias de resolución y llevarlo a cabo.

c) Lo razonable de la solución y la posible extensión del problema.

Se recomienda instrumentar estos aspectos en una actividad grupal y obtener la información mediante una entrevista que se desarrolle a partir de preguntas clave, que se pueden ampliar a partir de la participación de los estudiantes del equipo.

Contribución del cálculo al perfil del egresado

Con base en la adquisición de los contenidos y procesos matemáticos que le permitan enriquecer su formación en el ámbito de las matemáticas, será capaz de:

- Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- Utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas.
- En la resolución de problemas matemáticos, valorar la generalidad de la solución.
- Apreciar la resolución de problemas como generadora de conocimiento, más que como una actividad de ejercicio mental.
- Efectuar generalizaciones a partir del análisis de diferencias y similitudes, del reconocimiento de estructuras, de la identificación de analogías y de patrones de comportamiento.
- Proporcionar argumentos de validez sobre tópicos matemáticos y evaluar los de otros.
- Incorporar a su lenguaje y modos de sistematización y argumentación habituales diversas formas de representación matemática para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.
- Analizar y evaluar el trabajo matemático y las estrategias de otras personas.
- Reconocer y usar conexiones entre ideas matemáticas y éstas entre otras disciplinas.
- Reconocer conceptos, métodos y procedimientos comunes en las diversas áreas del conocimiento matemático.
- Usar las representaciones matemáticas pertinentes para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y biológicos, entre otros.

Propósitos generales de la materia

Al finalizar los cursos correspondientes a la materia de Cálculo Diferencial e Integral el alumnado será capaz de:

- Comprender el significado de un proceso infinito y su relación con los conceptos de límite, derivada e integral.
- Comprender y manejar el concepto de derivada, a través de sus diversas representaciones, utilizándolo para resolver problemas de rapidez de cambio y optimización.
- Analizar el comportamiento de una situación o fenómeno modelado mediante una función real de variable real.
- Comprender la relación entre derivada e integral, que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Relacionar la integral definida de una función con el área bajo la curva y obtener su valor, utilizando la antiderivada o mediante un proceso infinito de aproximaciones numéricas y aplicarla en problemas de diversos contextos.
- Construir modelos de situaciones o fenómenos, a partir de conocer el comportamiento de su rapidez de cambio, utilizar el modelo para obtener información sobre el fenómeno e incluso hacer predicciones y analizar algunas limitaciones del modelo generado.
- Valorar el potencial de aplicaciones del cálculo diferencial e integral, cuyos conceptos, técnicas y procedimientos permiten modelar y analizar situaciones y fenómenos de la naturaleza y la sociedad que involucran variación o acumulación.

Panorama general de las unidades

	Cálculo Diferencial e Integral	
	Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo Diferencial e Integral II
Unidad 1	Procesos infinitos y la noción de límite. 14 horas	Derivada de funciones trascendentes. 16 horas
Unidad 2	El concepto de derivada: variación y razón de cambio 14 horas	La integral definida. 16 horas
Unidad 3	Derivada de funciones algebraicas. 16 horas	La integral indefinida. 20 horas
Unidad 4	Comportamiento gráfico y problemas de optimización. 20 horas	Modelos y predicción. 12 horas

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Presentación de la asignatura Ubicación del curso

Esta asignatura representa el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del cálculo diferencial e integral. Para darle sentido a sus conceptos se ha considerado establecer el siguien- te ciclo de aprendizaje: iniciar con situaciones concre- tas, cuya modelación matemática no constituya inicial- mente gran complejidad, continuar el trabajo en un con- texto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas.La aplicación de estas etapas proporcionará las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

De manera general, en la primera unidad se analizan los procesos infinitos y la noción de límite, este último concepto se enriquecerá más adelante al analizar situaciones que involucren el concepto de derivada y el de integral. En la segunda unidad, mediante el análisis de la variación en funciones polinomiales, se hace un primer acercamiento al concepto de derivada, mismo que es analizado de manera sistemática en la tercera unidad al obtener y utilizar las reglas de derivación aplicables a funciones algebraicas. Finalmente, la cuarta unidad aproxima al estudiantado al campo de las aplicaciones de la derivada, al analizar problemas de optimización.

En la siguiente tabla se presentan tanto los propósitos como el número de horas de cada una de las unidades.

No	Nombre de la unidad	Propósito	Horas
1	Procesos infinitos y la noción de límite	Al finalizar la unidad el alumnado descubrirá intuitivamente el concepto de límite y sus propiedades, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos utilizando los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.	14
2	El concepto de derivada: variación y razón de cambio	Al finalizar la unidad el alumnado interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	14
3	Derivada de funciones algebraicas	Al finalizar la unidad el alumnado interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	16
4	Comportamiento gráfico y problemas de optimización	Al finalizar la unidad el alumnado contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.	20

Propósitos del curso

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades, procedimientos y a la comprensión de conceptos y métodos, el alumnado:

- Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al adquirir sistemáticamente técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucren variación.
- Adquirirá una visión del concepto de límite, a través de la manipulación de las representaciones tabular, gráfica y algebraica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- Relacionará a la derivada de una función con un proceso infinito que permita estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- Identificará de manera sistemática y fundada las diversas interpretaciones de la derivada y las utilizará para obtener y analizar información sobre una función.
- Aplicará la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

Evaluación

Las propuestas de los métodos de evaluación tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones, y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado. Un ejemplo de evaluación consiste en que el alumno elabore un portafolio que contenga las actividades llevadas a cabo, los exámenes, proyectos, trabajos, tareas, entre otros; realizados a lo largo del curso o por unidad. Por lo cual es indispensable que el alumnado se involucre en el trabajo en clase.

UNIDAD 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Presentación

La primera unidad del curso está dedicada al estudio de procesos infinitos y la noción de límite. Es importante que el alumnado reconozca las condiciones que caracterizan a un proceso infinito, esto es, que reconozca el patrón de comportamiento que se presenta en cada situación concreta, identificando las variables y las instrucciones que posibilitan establecer siempre un resultado más. Posteriormente, a partir de las representaciones tabular gráfica, numérica o algebraica de los procesos infinitos, construirá para sí un primer acercamiento al significado del concepto de límite, comprenderá la notación de límites y la manejará; el concepto de límite se enriquecerá, en la siguiente unidad, al interpretar situaciones concretas que involucren el concepto de derivada y posteriormente, en el siguiente curso, al abordar el concepto de integral.

Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: • Descubrirá intuitivamente el concepto de límite y sus propiedades, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos utilizando los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico.	**Tiempo:** 14 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El **alumnado**: • Reconoce características de un proceso infinito transitando al menos entre dos de estos registros de representación: numérico o tabular, geométrico, algebraico o gráfico. • Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito. • Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es. • Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución, procesos infinitos. • Utiliza las representaciones gráfica, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos.	**Procesos infinitos:** • Situaciones numéricas o tabulares, geométricas, gráficas o algebraicas que dan lugar a procesos infinitos. • Comportamiento de un proceso infinito: representación numérica, algebraica o gráfica. • Representación simbólica de procesos infinitos por medio de una función.	• Mostrar ejemplos que involucren procesos infinitos en los cuales se tiene un resultado que es posible determinar. • Plantear problemas que conduzcan a encontrar patrones numéricos o tabulares, geométricos, gráficos, algebraicos procesos infinitos como los siguientes: - Cálculo aproximado de áreas de regiones limitadas por curvas, como lagos, ciudades, etcétera, o gráficas de funciones a partir de rectángulos inscritos o circunscritos. - Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente. Calcular el área de cada sección e inferir hacia qué valor se acerca el área seccionada y hacia dónde se acerca la suma de las áreas seccionadas. - Inscribir polígonos regulares en un círculo y determinar el resultado límite, tanto de sus perímetros como de sus áreas, desde el punto de vista geométrico utilizando fórmulas de geometría elemental; inferir los valores numéricos de dichos límites, como se muestra en el portal académico. - Cálculo aproximado de volúmenes de vasos a partir de cilindros inscritos. - Representar $1/3$ en su forma decimal $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots$ - Estudio de algunos fractales como: triángulo de Sierpinski, árbol pitagórico, curva de Knoch, como se muestra en el portal académico. La implementación de alguna de las estrategias anteriores se puede reforzar con el uso de software y Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC): videos, simuladores, etcétera.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen. • Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe. • Interpreta el límite de un proceso infinito. • Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito. • Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso. • Establecer en forma intuitiva las propiedades de límites de una función y resolver algunos ejemplos haciendo uso de éstas.	**Noción de límite:** • Acercamiento al concepto de límite de una función. Notación de límite $\lim_{x \to a} f(x) = b$ • Propiedades de límites	• Presentar algunas actividades donde se tenga que distinguir un proceso infinito de uno que no es. • Hacer énfasis en el hecho de que una sucesión permite expresar de forma simbólica procesos infinitos discretos. • Como un primer acercamiento al concepto de límite de una función es conveniente trabajar ejemplos discretos para analizar los casos donde la función tiene un dominio en los naturales. • Considerar que las representaciones gráfica, algebraica o tabular de una sucesión, permiten expresar un proceso infinito que puede tener o no tener límite. • Considerar que la simbolización $f(x) \to L$ cuando $x \to a$, permite representar procesos infinitos que tienen un valor límite. • A partir de la trayectoria de un móvil, calcular su velocidad media entre dos puntos y aproximarse sucesivamente a la velocidad instantánea en un punto intermedio, a partir de la construcción de una tabla. • Proponer tareas donde se muestre que dado un número real, existen diferentes sucesiones cuyos términos permiten acercarse al punto dado de tres maneras: siempre con valores mayores, siempre con valores menores y con valores mayores y menores al número dado. • A partir de las representaciones tabular y gráfica de funciones en las cuales la relación entre sus variables establece procesos infinitos, dar significado a la simbolización. • A partir de gráficas de funciones en ramas (sin especificar la expresión algebraica de la función), el alumnado logre visualizar la existencia o no de un límite, tendencias. • Establecer las propiedades de límite en forma intuitiva, por ejemplo, utilizando representaciones tabulares, gráfica o alguna otra. Por ejemplo, haciendo uso de funciones como 2, x, $5x$, $x+1$, $3x-1$, $(x+1)(x-1)$, $\frac{x-1}{x+1}$. • Haciendo uso de funciones cuya representación algebraica son de la forma: x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\sqrt{x}$ ilustrar las propiedades de límite utilizando los registros tabular y gráfico.

Referencias

(Número del libro en el listado)

(1) Capítulo 1;

(2) Capítulo 2;

(9) Capítulo 1;

(11) Capítulo 2;

(15) Capítulo 2;

(17) Capítulo 12;

(18) Capítulo 2.

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas*. Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 2.

Larson, Ron, et al. (2010). *Cálculo 1*. Novena edición. México: McGraw–Hill. Cap. 1.

Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: cengage Learning. Cap 2.

Complementaria

Leithold, Louis. (1998). El cálculo. Séptima edición. México: Oxford University Press. Cap. Cap. 2.

Purcel, Edwin J. et al. (2007). Cálculo. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall. Cap. 2.

Stewart, James, et al. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. México: Cengage Learning. Cap. 12,

Para el profesorado

Azcárate, Carmen, et al. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis. Cap. 1.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

UNIDAD 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio

Presentación

El estudio del concepto de derivada se inicia en esta segunda unidad. Con base en el desarrollo de situaciones formuladas en contextos reales o hipotéticos, se analiza la variación de funciones polinomiales, de grado no mayor a tres, para dotar de significado, inicialmente, a la razón de cambio promedio y posteriormente, mediante la asociación del proceso infinito a la razón de cambio instantánea, construir el concepto de derivada. El ejemplificar el concepto de derivada con las funciones polinomiales mencionadas, sienta las bases para centrar el análisis de la relación entre la variación y el comportamiento gráfico.

Unidad 2. El concepto de derivada: variación y razón de cambio

Propósitos:	Tiempo:
Al finalizar la unidad el alumnado: Interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	14 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica qué es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas. • Reconoce y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones de cambio promedio.	**En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:** • Funciones polinomiales de grado no mayor a tres.	• Para la deducción de la derivada de cada una de las funciones es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular o algebraica, considerando lo siguiente: • Proponer problemas que se puedan modelar por una función lineal, resaltando que la intención del modelo es representar simbólicamente la correspondencia entre las variables involucradas en el problema y que la razón de cambio de una función lineal sea constante. • Plantear problemas cuyo modelo sea una función cuadrática para analizar la variación, la razón de cambio promedio y a través de un análisis numérico aproximarse a la razón de cambio instantánea. Por ejemplo: el movimiento de un objeto en caída libre, el área de un rectángulo con perímetro constante, entre otros. Recalcar que la razón de cambio instantánea de una función cuadrática es una función lineal y que el cambio del cambio de una función cuadrática es una constante. • Presentar problemas que se puedan modelar mediante una función polinomial de grado tres para analizar la variación, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea. Un ejemplo puede ser el volumen de un sólido con área fija. Recalcar que la razón de cambio instantáneo de una función cúbica es una función cuadrática y que la razón de cambio del cambio de una función cúbica es una función lineal. • Con el fin de enriquecer las actividades anteriores, utilizar una hoja electrónica de cálculo y obtener la razón de cambio promedio con intervalos cada vez más pequeños; para promover el uso de un proceso infinito y obtener la razón de cambio instantánea.

Aprendizajes	Temáticas	Estrategias sugeridas
• Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite. • Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio. • Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada. • Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes. • Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ • Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada en un valor a: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ con respecto a la representación anterior.	**Concepto de derivada:** • Notación. • Representación algebraica.	• En el planteamiento de las situaciones problema anteriores se sugiere hacer énfasis en que la representación simbólica, permite evaluar la magnitud del cambio de la variable dependiente con base en un cambio sufrido por la independiente. Así el cambio en la independiente se puede representar como $\Delta x = x_2 - x_1$ y a este le corresponde un cambio en la dependiente representada por $\Delta y = y_2 - y_1$ con base en la magnitud de estos cambios es posible caracterizar la pendiente o razón de cambio de la función lineal como el cociente de diferencias o razón de cambio $m = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ • El uso de gráficas poligonales de problemas reales o hipotéticos asociadosa funciones en contextos diversos, por ejemplo, las tarifas diferenciadas de acuerdo con el consumo de agua, de energía eléctrica las cuales son funciones discretas, para enfatizar la importancia de la continuidad, sin realizar un estudio exhaustivo. • Plantear problemas cuyo modelo sea una función cuadrática para analizar la variación, la razón de cambio promedio y a través de un análisis numérico aproximarse a la razón de cambio instantánea, por ejemplo: el movimientode un objeto en caída libre, el área de un rectángulo con perímetro constante, entre otros. Con el fin de enriquecer lo anterior utilizar una hoja electrónica decálculo y calcular la razón de cambio promedio con intervalos cada vez más pequeños; para promover el uso de un proceso infinito y obtener la razón de cambio instantánea. • Recalcar que la razón de cambio instantánea de una función cuadrática es una función lineal y que el cambio del cambio de una función cuadrática es una constante. • Presentar problemas que se puedan modelar mediante una función polinomial de grado tres para analizar la variación, la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea a través de los procesos descritos anteriormente, por ejemplo, el volumen de un sólido con área fija. • Recalcar que la razón de cambio instantáneo de una función cúbica es una función cuadrática y que la razón de cambio del cambio de una función cúbica es una función lineal.

Aprendizajes	Temáticas	Estrategias sugeridas
		• Destacar que las unidades relacionadas a la razón de cambio son las unidades de la variable dependiente, divididas entre las unidades de la variable independiente. Relacionar el signo asociado a la razón de cambio con el crecimiento o decrecimiento de la función. • En el análisis de la razón de cambio que definen las pendientes de las rectas secantes, es conveniente utilizar la noción de límite como una herramienta para definir la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado. Verificar gráficamente los resultados obtenidos. • Para definir la derivada en un punto retomar los problemas vistos anteriormente haciendo énfasis que se utilizó el mismo modelo: $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ y considerar la diferencia entre variable y parámetro.

Referencias

(Número del libro en el listado)

(1) Capítulo 2; (3) Lección 4; (7) Capítulos 1 y 2; (21) Capítulo 1; (22) Unidad 4.

Para el alumnado

Básica

Cruse, Allan B. et al. (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano. Lección 4.

Hughes, Deborah, et al. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap. 1 y 2.

Warner, Stefan, et al. (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson. Cap. 1.

Complementaria

Zill, Dennis G. et al. (2011). *Cálculo de una variable*. México: McGraw–Hill. Unidad 4.

Para el profesorado

Azcárate, Carmen, et al. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Editorial Síntesis. Cap. 2.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

UNIDAD 3. Derivada de funciones algebraicas.

Presentación

En esta unidad se considera la obtención de las derivadas de funciones algebraicas por medio de las fórmulas y reglas de derivación. Recuperando el concepto de límite, revisado en las unidades anteriores, el alumnado obtendrá las reglas elementales de derivación para estas funciones. El contexto de aprendizaje que se debe privilegiar para desarrollar las actividades de esta unidad es el puramente matemático; la justificación de las fórmulas y reglas de derivación puede realizarse a partir de procesos de inducción, basándose en analogías geométricas o en resultados previamente obtenidos, entre otros. Se privilegia la manipulación algebraica porque es necesario que el estudiantado adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas y reglas de derivación.

Unidad 3. Derivada de funciones algebraicas

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: Interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados, usando la definición en su representación: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ • Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores. • Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.	• Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ • Reglas de derivación para: - Función constante. - Función lineal. - Constante por una función. - Suma de funciones. - Producto de funciones. - Cociente de funciones. - Funciones del tipo $\left(f(x)\right)^n$ con $f(x)$ polinomial y n un número racional.	• Utilizar la definición de derivada $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para obtener derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ con n natural y $c = 1$, posteriormente con $c \neq 1$, para inferir la correspondiente regla de derivación. • Proponer ejemplos para identificar geométricamente la correspondencia entre diferentes notaciones: Δx como: $x - a$ o h Δy como: $f(x) - f(a)$ o $f(x+h) - f(x)$ • Proponer ejercicios utilizando ambos límites con el propósito de observar las condiciones que son necesarias para obtener su equivalencia. Pueden utilizarse funciones polinomiales de grado menor o igual a tres; una posible orientación se muestra en el portal académico. • Utilizar las propiedades necesarias de límites y definiciones de las operaciones con funciones para justificar algunas reglas de derivación, sin ser exhaustivo en el uso. • A través del cálculo de la derivada de polinomios con la definición, inferirlas reglas de derivación para: - Función constante. - Función lineal. - Producto de una constante por una función. - Suma de funciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas

• Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo $f(x)=cx^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.
• Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $\left(f(x)\right)^n$, para obtener las reglas de derivación correspondientes.
• Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.
• Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original.
• Identifica a la derivada de una función como una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.
		• Al calcular la derivada de la función $f(x)=mx+b$ identificar el comportamiento de la recta y hacer un análisis gráfico cuando *m* es positiva, negativa o cero.
		• Utilizar la definición para determinar la derivada de:
		$f(x)=cx^n$ con $n=\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
		para justificar que la regla de derivación encontrada también se cumple para los números enteros negativos y racionales.
		• Para orientar el planteamiento de la regla del producto utilizar un esquema basado en una representación rectangular, como se muestra en el portal académico.
		• Para ejemplificar que la derivada de un producto no es igual al producto de las derivadas, obtener la derivada de $f(x)=5x^2(x^3+4x)$ realizándola como el producto de las derivadas, es decir, sugerir que primero hagan la multiplicación y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un producto no se comporta de igual manera que la de la suma. Con el mismo ejercicio, guiarlo para que halle la regla correcta, combinando adecuadamente las funciones involucradas y sus derivadas.
		• La regla del cociente se puede obtener de las siguientes maneras:
		  • Mediante la definición.
		  • A partir de la regla del producto escribiendo el cociente como una multiplicación.
		  • Obteniendo primero la derivada de $\frac{1}{f(x)}$ y posteriormente utilizando la regla del producto.
		• Del mismo modo que con la multiplicación, se puede plantear la solución de la derivada de $f(x)=\frac{x^3+4x}{5x^2}$ realizándola como la división de derivadas; sugerir que realicen la división y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un cociente no se comporta de igual manera que la de la suma.
		• Usar ejemplos de funciones de la forma:
		$\left(f(x)\right)^n, n=2,3,\ldots$
		y $f(x)$ una función polinomial de primero o segundo grado para introducir su regla de derivación a partir de la regla del producto.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos. • Identifica de manera intuitiva la continuidad de una función en un punto, mediante su representación gráfica. • Reconoce en forma intuitiva que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad.	• Problemas de aplicación de razón de cambio instantánea, por ejemplo:cálculo de tangentes, cálculo de velocidades, entre otros. cálculo de tasa marginal. • Ejemplos sobre gráficas de funciones continuas y discontinuas. • Condición necesaria de continuidad para la derivabilidad.	• Enfatizar la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función algebraica para aplicar correctamente las reglas de derivación. • Proponer problemas que involucren la obtención de la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función. • Se sugiere utilizar la representación gráfica de la función y que el alumnado bosqueje la ecuación de la recta tangente calculada, para que verifique si es tangente a la función en el punto propuesto. (Puede verificarlo utilizando algún software). • Resolver problemas sobre velocidades y aceleraciones instantáneas de un móvil y de tasa marginal, entre otros. • Resolver ejercicios o problemas de la interpretación geométrica de la derivada de funciones algebraicas. • A partir de la gráfica de una función, obtener un bosquejo de la gráfica de su derivada mediante el análisis de las pendientes de las rectas tangentes. • Bosquejar la gráfica de una función y la de su derivada, buscando un primer acercamiento de la relación que existe entre ellas, por ejemplo, máximos o mínimos. • Presentar las diferentes notaciones usadas en fuentes de información para la representación de la derivada: $$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, D_x y, D_x[f(x)]$$ • Utilizando la noción intuitiva de que una función es continua si su gráfica puede trazarse sin levantar el instrumento de dibujo y que es discontinua si tiene saltos o están rotas en alguna parte de su gráfica, ilustrar con ejemplos concretos la continuidad y discontinuidad de funciones: polinomios, racionales, trigonométricas, exponenciales, valor absoluto, a trozos, etc. • Utilizar ejemplos concretos de funciones: $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{4}{5}}$, $\lvert x\rvert$, $\lvert x-1\rvert$, $\lvert x+1\rvert$, $\lvert x^2-1\rvert$, $\lvert x^2-4\rvert$, a trozos, etc., para ilustrar que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad.

Referencias: (Número del libro en el listado)

(2) Capítulo 3; **(9)** Capítulo 2; **(22)** Unidad 4

(3) Lección 12; **(10)** Capítulo 2;

(7) Capítulo 3; **(21)** Capítulo 3;

Referencias

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas*. Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 3.

Cruse, Allan B. et al. (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano. Lección 12.

Hughes, Deborah, et al. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap. 3.

Larson, Ron, et al. (2010). *Cálculo 1*. Novena edición. México: McGraw–Hill. Cap. 2.

Warner, Stefan, et al. (2002). Cálculo Aplicado. Segunda Edición. México: Thomson. Cap. 3.

Complementaria

Leithold, Louis. (1988). *Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales*. México: Alfaomega grupo editor. Cap. 2.

Zill, Dennis G. et al. (2011). *Cálculo de una variable*. México: McGraw–Hill. Unidad 4.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

UNIDAD 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización.

Presentación

La cuarta unidad representa un primer momento de síntesis de los aprendizajes adquiridos en las tres unidades previas. En primer lugar, con base en la manipulaciónalgebraica, se enriquece el análisis de la gráfica cartesiana de una función, con el propósito de profundizar en la comprensión de la relación existe entre la función original y su primera y segunda derivada. Por otra parte, se incrementa el entendimiento del concepto de derivada al extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas, en particular, al aplicarla a problemas de optimización; las actividades de aprendizaje se realizan principalmente en los contextos hipotéticos y reales.

Unidad 4. Comportamiento gráfico y problemas de optimización

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: • Contrastará la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización.	**Tiempo:** 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante. • Deduce a través de un análisis gráfico, la relación existente entre la gráfica de una función y su primera derivada: Asocia el signo de la primera derivada con los intervalos de crecimiento de la función y la derivada nula con los puntos críticos. • Deduce a través de un análisis gráfico, la relación existente entre la gráfica de una función y su segunda derivada: Relaciona el signo de la segunda derivada con los intervalos de concavidad y la segunda derivada nula con un posible punto de inflexión. • Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la función.	• Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas. • Comportamiento gráfico de una función. - Crecimiento y decrecimiento de funciones - Puntos críticos. Concavidad. Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivadas. • Puntos de inflexión. • Gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$ a partir de $f(x)$ y viceversa.	• Proponer la gráfica de una función polinomial (sin su regla de correspondencia) y a partir de la pendiente de la recta tangente determinar los puntos máximos o mínimos e intervalos donde la función es creciente, decreciente; establecer qué el signo de la derivada proporciona esa información. • Proponer funciones fácilmente factorizables, como: $f(x) = x^3 - 3x$ bosquejar la gráfica y a partir de ella, identificar las coordenadas de los puntos máximo o mínimo e intervalos, donde la función es creciente o decreciente. • Realizar un análisis gráfico del comportamiento por intervalos, tanto de la función como de la primera y segunda derivadas, para que con la primera derivada se analice el crecimiento o decrecimiento y con la segunda los cambios de concavidad de la función. • Construir el bosquejo de la gráfica de la derivada a través de la gráfica de la función y viceversa, ya que permite al alumnado (en el estudio posterior de la antiderivada) asociar la forma de la curva con el significado geométrico de la derivada. • Finalmente, hacer ver que dada la gráfica de una función o la de su derivada, adquiere información sobre el comportamiento gráfico de la otra.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión. • Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada. • Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada. • Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de *f*, *f'*, *f''*. • Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con el dominio determinado por la situación a modelar.	• Problemas de optimización.	• En cuanto a los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones de acuerdo con el contexto del problema. Lo cual permitirá al alumnado reforzar sus conocimientos acerca del dominio y contradominio de las funciones. • En los problemas que resuelvan el profesor y los estudiantes de manera conjunta, enfatizar la forma en que la condición que establece el problema entre las variables: ancho y largo; radio y altura, etcétera, permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente. Por ejemplo: - Dados dos números cuyo producto sea 72 y la suma del primero más el triple del segundo sea máxima. - El cálculo del volumen máximo de una caja que se forma a partir de un rectángulo haciendo cortes iguales en esquinas. - Minimizar el costo de una lata cilíndrica a partir de un volumen determinado. Con una o dos tapas de material de valor diferente o igual al del rectángulo envolvente del cilindro. - El problema de hallar el radio y altura de un cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en un cono circular recto de radio y altura conocidos. • Es importante no olvidar que la resolución de problemas es una metodología didáctica de los programas por lo que es conveniente que en este momento se retomen los elementos necesarios para la resolución de problemas, considerando, entre otros, a autores tales como George Polya, Alan Schoenfeld o Luz Manuel Santos Trigo.

Referencias

(Número del libro en el listado)			
(2) Capítulo 3; **(3)** Lección 1;	**(6)** Capítulo 5; **(7)** Capítulo 4;	**(11)** Capítulo 5; **(18)** Capítulo 4;	**(19)** Capítulo 1

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas*. Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 3.

Cruse, Allan B. et al. (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano. Lección 1.

Hughes, Deborah, et al. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap. 4.

Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: CENGAGE Learning. Cap 4.

Complementaria

Hoffmann, L. et al. (1995). Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales. Quinta edición. Cali, Colombia: McGraw Hill. Cap. 5.

Leithold, Louis. (1998). El cálculo. Séptima edición. México: Oxford University Press. Cap. Cap. 5.

Stewart, James, et al. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. México: Cengage Learning. Cap. 4,

Swokowski, Eart W. (1987). Introducción al Cálculo con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica. Cap. 1.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Presentación de la asignatura Ubicación del curso

En esta asignatura se concluye el primer acercamiento sistemático y organizado al estudio del cálculo diferencial e integral: se desarrolla el concepto de derivada de algunas funciones trascendentes y se concretan las ideas fundamentales del cálculo integral. Para darle sentido a sus conceptos, se ha considerado establecer el siguiente ciclo de aprendízaje: iniciar con situaciones concretas, cuya modelación matemática no constituya inicialmente gran complejidad, continuar el trabajo en un contexto fundamentalmente matemático y concluir con la modelación de situaciones concretas con el apoyo de herramientas conceptuales más refinadas. La aplicación de estas etapas proporcionará las bases para el estudio formal de dichos conceptos, cuando su estancia en el nivel superior lo requiera.

De manera general, la primera unidad de este curso amplía el estudio de la variación a algunas funciones trascendentes al obtener la derivada de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. En la segunda unidad, retomando los procesos infinitos y mediante el análisis de la acumulación en diferentes contextos, se aborda el concepto de integral definida y se presenta el Teorema Fundamental del Cálculo. Durante la tercera unidad se analiza la idea de antiderivada, se revisan las formas inmediatas de integración y los métodos de sustitución e integración por partes. Se finaliza este curso con el análisis de modelos, asociados a diversas situaciones en contexto, en los cuales la derivada y la integral desempeñan un importante papel en su obtención y solución, abriendo así nuevas perspectivas de las temáticas abordadas en esta materia.

En la siguiente tabla se presentan tanto los propósitos y como el número de horas de cada una de las unidades:

No	Nombre de la unidad	Propósito	Horas
1	Derivada de funciones trascendentes	Al finalizar la unidad el alumnado ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.	16
2	La integral definida	Al finalizar la unidad el alumnado interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.	16
3	La integral indefinida	Al finalizar la unidad el alumnado establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.	20
4	Modelos y predicción	Al finalizar la unidad el alumnado concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	12

Propósitos del curso

Al finalizar el curso de Cálculo Diferencial e Integral II, a través de diversas actividades orientadas al desarrollo de habilidades, procedimientos y a la comprensión de conceptos y métodos, el alumnado:

- Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al apropiarse de nuevas técnicas y herramientas que proporciona el cálculo, en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- Avanzará en la comprensión de la derivada, al analizarla en situaciones que es posible modelar con funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Comprenderá la relación entre la derivada y la integral de funciones, que se sintetiza en el teorema fundamental del cálculo.
- Manipulará adecuadamente las fórmulas de integración y los métodos de sustitución e integración por partes.
- Con la modelación de situaciones geométricas y de movimiento, entre otras, relacionará a la integral definida de una función, ya sea con el área bajo una curva o la descripción del comportamiento de un objeto en movimiento, y comprenderá que puede llevarse a cabo mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- Sistematizará las diversas interpretaciones de la integral y las utilizará en la resolución de problemas relacionados con variación y con acumulación.

Evaluación

Las propuestas de los métodos de evaluación, que tienen el propósito de obtener información del desempeño de los estudiantes en referencia a los aprendizajes logrados, para que estos identifiquen sus avances y limitaciones y el profesor enriquezca o modifique la forma de organización del proceso de instrucción utilizado. Un ejemplo de evaluación consiste en que el alumnado elabore un portafolio que contenga las actividades llevadas a cabo, los exámenes, proyectos, trabajos, tareas, entre otros; realizados a lo largo del curso o por unidad. Por lo cual es indispensable que el alumnado se involucre en el trabajo en clase.

UNIDAD 1. Derivada de funciones trascendentes

Presentación

En esta primera unidad de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II se extiende el estudio de la variación a algunas funciones trascendentes al obtener la derivada de funciones trígonométricas, exponenciales y logarítmicas; la justificación de estos resultados se realiza fundamentalmente con el análisis gráfico de la función y sus dos primeras derivadas. Con base en la modelación de diversos fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales, entre otros, se contribuye a una mejor comprensión de la derivada de las funciones antes mencionadas, a la vez que se enriquece el significado del concepto de derivada.

.

Unidad 1. Derivada de funciones trascendentes

<table>
<tr><td>Propósitos:
Al finalizar la unidad el alumnado:
• Ampliará su conocimiento de la derivada, a las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.</td><td>Tiempo:
16 horas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Aprendizajes</th><th>Temática</th><th>Estrategias sugeridas</th></tr>
<tr><td>El alumnado:
• Reconoce la variación de las funciones seno y coseno, a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos, en diversos contextos.
• Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica.
• Justifica las derivadas de las funciones seno y coseno de manera gráfica o algebraica.
• Obtiene las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, usando las derivadas de las funciones seno, coseno y reglas de derivación.</td><td>Derivada de funciones trigonométricas:
• Funciones trigonométricas y el estudio de su variación.
• Derivada de las funciones seno y coseno.
• Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.
• Regla de la cadena para funciones trigonométricas compuestas.
• Resolución de problemas en diversos contextos.</td><td>• Para la deducción de la derivada de cada una de las funciones es recomendable utilizar al menos dos de las representaciones gráfica, tabular o algebraica, considerando lo siguiente:
- Aprovechando el conocimiento obtenido en la Unidad IV de Cálculo I, realiza una primera conjetura de la gráfica de la derivada de las funciones seno y coseno.
- En la representación numérica se sugiere calcular la aproximación de la derivada, usando una tabla, para valores apropiados.
Presentar situaciones que se modelen mediante estas funciones para motivar la discusión de su variación. Por ejemplo:
- La profundidad del agua en el puerto de San Felipe B. C. está dada por la función:
$$y = 3 + 2.5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\ ;\ y \text{ está en metros}$$
Donde t es el número de horas desde la media noche.
Calcular la rapidez con que está cambiando el nivel del agua a las 6 horas.
• Calcular mediante una aproximación numérica los límites siguientes:
$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}$$
para encontrar la derivada de las funciones seno y coseno, mediante su definición. en $x = 0$.
• Presentar problemas que se puedan modelar mediante funciones circulares para el estudio de la variación de fenómenos periódicos, como: el péndulo simple, pistón oscilante, el movimiento de las mareas, etcétera.</td></tr>
</table>

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Obtiene la derivada de funciones trigonométricas compuestas usando la regla de la cadena. • Resuelve problemas en diversos contextos que involucran la derivada de funciones trigonométricas. • Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos. • Infiere la derivada de las funciones logarítmicas. • Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.	**Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas:** • Funciones exponenciales y logarítmicas y el estudio de su variación. • Derivada de las funciones: e^x, e^u, a^x, a^u. • Derivada de las funciones: $\ln(x), \ln(u), \log_a(x), \log_a(u)$. • Resolución de problemas en diversos contextos.	• Presentar situaciones que se modelen mediante funciones logarítmicas o exponenciales para motivar la discusión de su variación. Por ejemplo: - Se depositan cien mil pesos en un banco que paga 5% de interés anual compuesto de manera continua. Suponiendo que se reinvierte el capital más los intereses. Calcula lo que se solicita. ▪ Encuentra la cantidad total acumulada en 10 años. ▪ Con qué rapidez está creciendo el capital a los 10 años. • Promover que el alumnado, con el apoyo de la geometría dinámica, conjeture que la derivada de la función exponencial natural es la misma función. • Si se utiliza la definición de la derivada de la función exponencial sería conveniente calcular mediante una aproximación numérica este límite: $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)$$ • Resaltar la importancia de la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento. • Se sugiere que la derivada de la función logarítmica sea a través de la función $y = e^x$. • Enfatizar las aplicaciones a diversas disciplinas, como: el decaimiento radioactivo, crecimiento o decaimiento de poblaciones, la ley de enfriamiento, entre otras. Poner ejemplos de decaimiento de poblaciones de animales o plantas que pueden llevar a la extinción de estos. • Mostrar ejemplos donde se apliquen propiedades de los logaritmos que faciliten la obtención de las derivadas de funciones logarítmicas aplicadas a algunos productos, cocientes, potencias y exponenciales, por ejemplo $$f(x) = Ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right),\quad g(x) = Ln((x-2)^5 \cdot x^4)$$

Referencias

(2) Capítulo 4;
(3) Lección 16;
(9) Capítulo 5;
(11) Capítulos 2 y 5;
(15) Capítulo 6;
(18) Capítulos 2 y 3;
(21) Capítulo 4.

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 4.

Cruse, Allan B. *et al.* (1982). *Lecciones de cálculo*. México: Fondo Educativo Interamericano. Lección 16

Larson, Ron, *et al.* (2010). *Cálculo 1.* Novena edición. México: McGraw– Hill. Cap. 5

Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: Cengage Learning. Caps. 2 y 3

Warner, Stefan, *et al.* (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson. Cap. 4

Complementaria

Leithold, Louis. (1998). *El cálculo.* Séptima edición. México: Oxford University Press. Caps. 2 y 5

Purcel, Edwin J. *et al*. (2007). *Cálculo*. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall. Cap. 6

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

UNIDAD 2. La integral definida.

Presentación

En esta unidad se parte de la modelación de situaciones geométricas y de contextos, principalmente de movimiento, en las cuales se presenta la idea de acumulación y, con base en estas, se inicia el estudio del concepto de integral definida; es importante partir de los procesos infinitos para esbozar la definición de integral definida. Para la obtención de resultados de sumas infinitas debe recurrirse a las funciones constante y lineal, principalmente y, con base en estos resultados, aportar elementos para presentar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Unidad 2. La integral definida

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: • Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.	**Tiempo:** 16 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Asocia el área bajo una curva con la solución de problemas en diversos contextos de una situación dada. • Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos usando el extremo izquierdo o derecho de su base. • Reconoce que el método de aproximación numérica para calcular el área es un proceso infinito. • Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x) = kx^n, con\ k > 0$ como un límite de sumas infinitas para $n = 1, 2\ y\ 3$, en intervalos de la forma $[0, a]$. • Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0, x]$. y calcula con ella el área en el intervalo [a,b].	**El área bajo una curva:** • El área bajo la gráfica de una función positiva constante o lineal. • Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función positiva, mediante rectángulos. • Cálculo del área para funciones de la forma $f(x) = kx^n$ donde k es una constante positiva, para $n =$ 1,2,3. • Interpretación del signo de la integral con el área bajo la gráfica de una función positiva o negativa. **La integral definida:** • Definición. • Propiedades: distributividad de la suma y multiplicación por una constante.	• Introducir situaciones problemáticas en las que se conoce la velocidad o la tasa instantánea de cambio para motivar la discusión de la acumulación. • Desarrollar problemas que involucren el cálculo de distancia, trabajo o presión, entre otros los cuales se representen mediante una función constante o lineal para que, posteriormente, los analicen gráficamente y perciban que dichos problemas se pueden resolver al calcular el área bajo la gráfica de esa función, auxiliándose de la figura geométrica respectiva. • Determinar la función $F(x)$ del área bajo las funciones $f(x) = x^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$. En un intervalo $[0, a]$, donde $a = 0, 1, 2,3, \ldots, 10$, a partir de aproximar el área mediante rectángulos inscritos y circunscritos, con bases de igual longitud, haciendo uso de herramientas como software de geometría dinámica y la hoja de cálculo. Observando el patrón de comportamiento de la función $F(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$, determinar la función $F(x)$, para el área bajo la función $f(x) = x^n$. • Mejorar las aproximaciones numéricas del cálculo del área bajo la curva en un intervalo dado, proponiendo la gráfica de una función positiva (sin su representación analítica) en la que se obtenga una aproximación por medio de la suma de las áreas de figuras rectilíneas. • Utilizar ejemplos concretos para mostrar las propiedades de distributividad de la suma y multiplicación por una constante de la integral definida. En caso de que el profesor lo considere pertinente puede abordar otras propiedades.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Reconoce a la integral definida como el límite de sumas infinitas. • Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo, así como los elementos que lo sustentan. • Identifica las ventajas de usar una antiderivada para determinar la integral definida. • Identifica la función área como una antiderivada o primitiva. • Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida. • Utiliza las propiedades de la integral definida. • Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo. • Aplica el teorema fundamental del cálculo, resolviendo integrales definidas. • Identifica que los problemas propuestos se modelan considerando un proceso de acumulación al calcular el área bajo una curva.	**La función área como una antiderivada:** • Área bajo la gráfica de la función $f(t) = t^n$, para $n = 1,2,3$ en el intervalo $[0, x]$. **Formulación del Teorema Fundamental del Cálculo.** **Aplicaciones de la integral definida:** • Área comprendida entre dos funciones. • Cálculo de la distancia a partir de la velocidad. • Cálculo de una población a partir de su tasa instantánea de crecimiento o decrecimiento.	• Determinar el área bajo las funciones $f(x) = x^n\ para\ n = 1, 2, 3,$ en un intervalo $[0, a]$, mediante rectángulos de bases regulares, usando el extremo izquierdo o derecho de las bases para acotar el área. Se puede iniciar con $n = 4$ y calcular su área, continuar con $n = 5, 6$, etcétera y observar el patrón de comportamiento del área conforme n crece. • Realizar el cálculo con particiones más finas utilizando una hoja electrónica de cálculo. Complementar y verificar los valores obtenidos con el uso de software dinámico, observando gráficamente cómo se pueden obtener mejores aproximaciones. • Señalar que las unidades asociadas a la integral definida es el producto de las unidades de la variable dependiente y las unidades de la variable independiente. • Calcular de manera exacta el área de la curva a analizar, analizar el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para determinar si tiene un valor límite y cuál es éste. • Incorporar la notación $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ en la representación del área desde a hasta x bajo la gráfica de $f(t)$. • Resaltar la importancia de la continuidad de las funciones para aplicar el TFC , a partir de que analicen una formulación de integral como: $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$$ • Analizar la relación entre: la función área, la antiderivada y la integral definida al formular el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). • Proponer problemas que incluyan - cálculo de áreas de la región entre las gráficas de dos funciones - cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad, - aplicaciones relacionadas con extinción de especies, propagación de plagas - apoyándose en el trazo de las gráficas correspondientes.

Referencias

(2) Capítulo 5;
(5) Capítulo 5;
(7) Capítulo 5;
(10) Capítulo 7;
(15) Capítulo 4;
(18) Capítulo 5;
(19) Capítulo 17;
(21) Capítulo 6.

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 5.

Hughes, Deborah, *et al*. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap 5.

Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: Cengage Learning. Cap. 5.

Warner, Stefan, *et al.* (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson. Cap. 6.

Complementaria

Goldstein, L. J. *et al.* (1990). *Cálculo y sus aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana. Cap. 5.

Leithold, Louis. (1998). *El cálculo.* Séptima edición. México: Oxford University Press. Cap. 7.

Purcel, Edwin J. *et al*. (2007). *Cálculo*. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall. Cap. 4.

Swokowski, Eart W. (1987). *Introducción al Cálculo con geometría analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica. Cap. 17.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

UNIDAD 3. La integral indefinida.

Presentación

Esta unidad inicia con la presentación del desarrollo inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función a partir de conocer su rapidez de cambio. Para la comprensión de las ideas de antiderivada, condición inicial e integral indefinida, el trabajo con funciones polinomiales debe ser el punto de partida. Se prepara al alumnado en el manejo algorítmico al resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas, para concluir con los métodos de sustitución e integración por partes. Al retomar los resultados que presenta el Teorema Fundamental del Cálculo resuelve problemas de mayor complejidad, que requieren utilizar la integral definida.

Unidad 3. La integral indefinida

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: • Establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración.	**Tiempo:** 20 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Reconoce el carácter inverso de las operaciones de derivación y antiderivación. para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Interpreta la relación existente entre una antiderivada y la integral indefinida, así como su notación. • Construye una tabla de integrales inmediatas de funciones algebraicas y trascendentes. • Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren en una constante. • Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada.	**Antiderivada (primitiva) de una función.** **Definición de integral indefinida.** **Fórmulas inmediatas de integración de funciones:** • Algebraicas: polinomiales, racionales y con radicales. • Trascendentes: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales. **Relación entre la condición inicial y la constante de integración.**	• Usar la idea de que la derivada y la integral son operaciones inversas para obtener las fórmulas inmediatas de integración. • Retomar el análisis gráfico como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de funciones y resaltar el papel que juega en ella la constante de integración. Se recomienda utilizar algún software graficador. • Para ilustrar el método de cambio de variable se sugiere realizar modificaciones a la función a integrar y solicitar al alumnado identifique la diferencial para obtener la integral de una forma inmediata.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Resuelve una integral realizando operaciones algebraicas pertinentes para transformar la integral a una forma inmediata. • Resuelve integrales realizando el cambio de variable apropiado. • Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones. • Resuelve integrales empleando el método de integración por partes. • Resuelve problemas en diferentes contextos usando el método de integración apropiado.	**Métodos de integración:** • Cambio de variable. • Integración por partes. **Problemas de aplicación en diferentes contextos.**	• Mostrar ejemplos en donde sea de utilidad realizar operaciones algebraicas previas a la integración como: $\int \frac{x^2-3x}{5x}dx\,, \int (x+5)^2 dx$ • Proponer ejemplos que se integren por el método de cambio de variable donde la diferencial esté completa y algunos donde haga falta una constante para completarla. $\int 2x(x^2+3)\,dx, \int x(x^2+3)\,dx$ • Realizar algunos ejercicios de integración por partes en donde se propongan sugerencias sobre la elección de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{dv}$; posteriormente presentar ejemplos en donde se invierta la elección para determinar cuál de ellas es la más conveniente, por ejemplo: $\int xsin(2x)dx, \int x^2e^x dx$ • Proponer ejemplos de integrales donde haya un producto de funciones donde se observe que no todos los productos de funciones se integran por el método de integración por partes, como por ejemplo $\int \cos(x)sin(x)dx\,, \int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ • Realizar ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. • Retomar algunos de los problemas sobre distancia, trabajo o presión resueltos en la unidad anterior y proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.

Referencias

(2) Capítulo 5;

(7) Capítulo 7;

(9) Capítulo 4;

(18) Capítulo 18.

Para el alumnado

Básica

Bittinger, Marvin. (2002). *Cálculo para ciencias económico–administrativas.* Séptima edición. Colombia: Addison Wesley. Cap. 5.

Hughes, Deborah, *et al*. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap. 7.

Larson, Ron, *et al.* (2010). *Cálculo 1.* Novena edición. México: McGraw– Hill. Cap. 4.

Stewart, James. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. Séptima edición. México: Cengage Learning. Cap. 18.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

Unidad 4. Modelos y predicción.

Presentación

La cuarta unidad del segundo curso de Cálculo Diferencial e Integral presenta, tanto la conclusión de los dos cursos, como perspectivas de desarrollo de los métodos y conceptos estudiados. Consolida la comprensión, manejo y aplicación de la derivada y la integral al construir el modelo asociado a diversas situaciones, en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como crecimiento de una población, desintegración radioactiva, ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo o la propagación de una enfermedad.

Unidad 4. Modelos y predicción

Propósitos: Al finalizar la unidad el alumnado: • Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.	**Tiempo:** 12 horas

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
El alumnado: • Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, su modelo es de la forma: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ • Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos. • Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de C.	• Situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ • Método de separación de variables. • Condiciones iniciales aplicadas al modelo $P(t) = Ce^{kt}$	• Propiciar que el alumnado, explore en forma numérica, gráfica o algebraica el comportamiento de diversas situaciones. Por ejemplo, en el crecimiento de una población, orientarlos a que propongan los elementos que intervienen en su crecimiento, al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, arribar a la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Por lo cual, se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante la ecuación diferencial: $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ • Otros problemas que el profesor podría abordar son: interés compuesto, cantidad de medicamento en el cuerpo. • Analizar la familia de funciones al cambiar los parámetros en la solución del modelo $P(t) = Ce^{kt}$, utilizando un graficador. • Analizar la rapidez de crecimiento poblacional de una especie y verificar si es proporcional a la misma, haciendo uso de simuladores gratuitos como PhET (https://phet.colorado.edu/es/simulations/natural-selection). Dadas las condiciones iniciales generar un modelo que se ajuste al crecimiento de la población y utilizar el modelo para generar predicciones sobre el comportamiento de la población.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
• Obtiene una solución particular del tipo $$P(t) = P_0 e^{kt}$$ que representa a una situación dada, considerando las condiciones iniciales. • Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. • Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $P(t) = P_0 e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. • Reconoce la importancia de las herramientas del cálculo diferencial e integral en la solución del modelo $$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$$ para realizar predicciones.		• Mencionar, al presentar el método de separación de variables, que dt es un incremento muy pequeño, el cual nunca es cero y es posible multiplicar en ambos lados de la igualdad. • Realizar predicciones con el modelo $P(t) = Ce^{kt}$, después de resolver la ecuación diferencial. • Utilizar bancos de datos de fácil acceso, por ejemplo, los del INEGI del último censo sobre la tasa de crecimiento de la población del país. • Proponer problemas como la cantidad de medicamento en el cuerpo transcurrido el tiempo, la datación de un fósil mediante carbono 14, la depreciación de un objeto o la ley de enfriamiento de Newton, para los casos en que k es negativa. • Otra situación que se puede abordar cuando k es positiva, además del crecimiento poblacional, es la de un capital invertido en interés compuesto, modelos simplificados de propagación de enfermedades.

Referencias

(5) Capítulo 10;

(6) Capítulo 7;

(7) Capítulo 10;

(9) Capítulo 6;

(21) Capítulo 7.

Básica

Hughes, Deborah, *et al*. (2002). *Cálculo aplicado*. Segunda Edición. México: CECSA. Cap. 10.

Larson, Ron, *et al.* (2010). *Cálculo 1.* Novena edición. México: McGraw– Hill. Cap. 6.

Warner, Stefan, *et al.* (2002). *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición. México: Thomson. Cap. 7.

Complementaria

Goldstein, L. J. *et al.* (1990). *Cálculo y sus aplicaciones*. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana. Cap. 10.

Hoffmann, L. *et al*. (1995). *Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. Quinta edición. Cali, Colombia: McGraw Hill. Capítulo 7.

Electrónicas

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

Referencias

Para el alumnado

Básicas

Bittinger, Marvin. (2002). Cálculo para ciencias económico–administrativas. Séptima edición. Colombia: Addison Wesley.

Cruse, Allan B. et al. (1982). Lecciones de cálculo. México: Fondo Educativo Interamericano.

Hughes, Deborah, et al. (2002). Cálculo aplicado. Segunda Edición. México: CECSA.

Larson, Ron, et al. (2010). Cálculo 1. Novena edición. México: McGraw– Hill.

Stewart, James. (2012). Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. Séptima edición. México: cengage Learning.

Warner, Stefan, et al. (2002). Cálculo Aplicado. Segunda Edición. México: Thomson.

Complementarias

Goldstein, L. J. et al. (1990). Cálculo y sus aplicaciones. Cuarta edición. México: Prince – Hall Hispanoamericana.

Hoffmann, L. et al. (1995). Cálculo aplicado a la administración, economía, contaduría y ciencias sociales. Quinta edición. Cali, Colombia: McGraw Hill.

Leithold, Louis. (1988). Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales. México: Alfaomega grupo editor.

Leithold, Louis. (1998). El cálculo. Séptima edición. México: Oxford University Press.

Mochón, Simón. (1994). Quiero entender el Cálculo. Un enfoque diferente basado en conceptos y aplicaciones. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Purcel, Edwin J. et al. (2007). Cálculo. Novena edición. México: Pearson educación Prentice Hall.

Stewart, James, et al. (2012). Precálculo: Matemáticas para el cálculo.

Swokowski, Eart W. (1987). Introducción al Cálculo con geometría analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Thompson, Silvanus P. et al. (2012). Cálculo diferencial e integral. México: McGraw–Hill.

Zill, Dennis G. et al. (2011). Cálculo de una variable. México: McGraw– Hill.

Para el profesorado

Azcárate, Carmen, et al. (1996). Cálculo diferencial e integral. España: Editorial Síntesis.

Filloy, Eugenio, et al. (2003). Matemática Educativa. “El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial”. México: Fondo de Cultura Económica.

Imaz, Carlos. (2010). La génesis y la enseñanza del cálculo. México: Trillas.

Natanson, I. P. (1984). La suma de cantidades infinitamente pequeñas. México: Limusa–Willey.

Polya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas.

Shilov, G. E. (1980). Cómo construir gráficas: Los problemas más sencillos de máximos y mínimos. México: Limusa

Sexta edición. México: cengage Learning.

Referencias electrónicas:

Universidad Nacional Autónoma de México. (2017). *Red Universitaria de Aprendizaje*. https://www.rua.unam.mx/.

Khan Academy. (2024). Differential Calculus. https://www.khanacademy.org/math/differential-calculus

Universidad Nacional Autónoma de México. (2013). *Lecciones de cálculo diferencial e integral*. http://objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_calculo.html

Para la elaboración de este Programa se agradece la participación de: Jesús Aguilera García, Alejandra Georgina Bravo Ortiz, Daniela Flores Sánchez, Andrés José Hernández López, Salvador Lara Núñez, Alma Delia Luna Hidalgo, Jaime Licea Durán, David Martínez Gómez, José Alberto Monzoy Vásquez, María del Socorro Nava Covarrubias, Héctor Pérez Aguilar, René Ramírez Ruiz, Marco Rojas Rivas, Roberto Suárez Huerta, María Teresa Velázquez Uribe, Gerardo Vélez Cárdenas.

1971 2016

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades