Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades

Área Matemáticas

Programas de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II

INDICE

PROGRAMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I Y II

PRESENTACIÓN

ORIENTACIONES GENERALES DE LOS CURSOS

Las asignaturas del Área de Matemáticas correspondientes a los semestres quinto y sexto del Plan de estudios del CCH, incluyen dos cursos optativos de Cálculo Diferencial e Integral, con la perspectiva de brindar a los alumnos que opten por ellos los conceptos y procedimientos básicos de esta importante rama de las matemáticas, a la vez que completan su formación en esta disciplina al reforzar el empleo de estrategias, la capacidad de resolución de problemas, el desarrollo de habilidades y de diversas formas de razonamiento, como son el inductivo, el deductivo y el analógico.

Los cursos de cálculo, al impartirse en los dos últimos semestres, constituyen la culminación de la formación matemática del ciclo del bachillerato. En ellos se retoman y aplican conocimientos de los cursos obligatorios, conforme se van incorporando los conceptos y técnicas del cálculo que permiten trascender las limitaciones de la temática de los cinco ejes que estructuran los cuatro primeros semestres[1], en el estudio y análisis de situaciones y fenómenos que involucran variación.
Ambos cursos conforman un todo en su conjunto, de modo que tanto en cada una de las unidades como de un semestre a otro, se recuperan los conocimientos adquiridos y se enriquecen, entrelazando con crecientes grados de complejidad, las relaciones existentes entre los conceptos estelares del cálculo, como son *el límite, la derivada y la integral*.

En cuanto a la orientación global de ambos cursos, dado que es el primer contacto del alumno con esta rama de la matemática, el enfoque se centra en iniciar con situaciones y fenómenos de variación (de diversos contextos) que se modelan con una función real de variable real, para estudiarlos a través de su representación tabular, gráfica y algebraica, y con ello, dar significado a los conceptos, técnicas y procedimientos del cálculo que permiten otro nivel de análisis. Con esta orientación, no se pone el énfasis en la memorización de fórmulas y algoritmos (que constituyen una herramienta pero, por sí solos, no proporcionan una visión del poder del cálculo), ni en el tratamiento formal que corresponde a otro nivel de estudios.

A diferencia de muchos cursos de cálculo que otorgan un espacio importante a las técnicas algebraicas para obtener el límite de una función, en éstos, se ha optado por centrar la atención en *la esencia* del difícil concepto de límite, por lo cual, se inicia con el estudio de procesos infinitos, su tendencia, estabilización y las posibilidades de predicción de valores y comportamientos, para enfrentar después, en esta perspectiva, el estudio de la derivada y la integral en cualesquiera de sus interpretaciones.

En cuanto a las fórmulas y reglas para obtener derivadas e integrales, se presentan y manejan como formas más generales, eficientes y económicas de encontrar respectivamente, la función que proporciona la rapidez de cambio o bien, conociendo a ésta, la función que modela la situación o problema involucrado.

En ambos cursos, se les otorga también un papel importante a las aplicaciones, de modo que en el transcurso de las unidades temáticas, una vez que se han obtenido los conceptos y procedimientos respectivos a partir del estudio de algunas situaciones de aplicación, se presentan otras, en las que el estudiante utilizará las nuevas herramientas. De esta manera, constantemente se cubre un ciclo que abarca: **situación de inicio** ?? ? **conceptos**, **técnicas y procedimientos** ?? ? **situaciones diversas.**

Por otra parte, los programas se han estructurado de modo que conforme el estudiante va adentrándose en los conocimientos relativos a todas y cada una de las unidades que los integran, también deberá ir avanzando paulatinamente **en el manejo de procesos infinitos, en el análisis de la variación y en la construcción e interpretación de modelos**, además de reforzar su desempeño en las líneas de desarrollo metodológico correspondientes a los cuatro semestres previos, mismas que son: aproximaciones al método de resolución de problemas; dominio del pensamiento algebraico; análisis lógico de argumentos;

[1] Los cinco ejes de desarrollo temático para los cuatro cursos obligatorios son: Álgebra, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones.

construcción de razonamientos; planteamiento de conjeturas a partir de descubrir patrones de comportamiento; manejo de transformaciones geométricas en el plano cartesiano (desplazamientos, contracciones, estiramientos, cambios de escala); e identificación de algoritmos y de relaciones entre algoritmos.

Como consecuencia de todo lo anterior, y en concordancia tanto con los principios educativos del Colegio, como con las pretensiones de los cuatro cursos previos, más que privilegiar la memorización de un cúmulo de contenidos matemáticos (subdivididos en muchas ocasiones en múltiples casos y fórmulas especiales) y la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el significado y manejo de conceptos y procedimientos, en el empleo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas; entre las que están: ***Generalización*** (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); ***Formalizar "Material Matemático"*** (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); ***Reversibilidad de Pensamiento*** (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); ***Flexibilidad de Pensamiento*** (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); ***Visualización Espacial*** (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada).

Para lograrlo, resulta importante que los alumnos interactúen de forma activa (organizando, sistematizando, comparando, clasificando, analizando, explorando, argumentando, aplicando, etc.) con la temática que van a conocer, de modo que además de favorecer una mejor comprensión de la misma, se les dote de herramientas intelectuales. Para ello, es de gran utilidad el uso de calculadoras graficadoras y de diversas versiones de software, entre las que destacan *Excel, Derive, Cabri, Geometer Sketch Pad*; mediante los cuales pueden diseñarse estrategias de aprendizaje que contribuyen a la búsqueda de significados, a la sistematización, a la exploración, a la formulación de conjeturas y al desarrollo de la imaginación espacial, entre otros. Cobra entonces relevancia, describir los aspectos fundamentales que deberá adquirir el alumno respecto a la temática; es decir, cuáles son los aprendizajes considerados como relevantes.

Precisamente para resaltar la trascendencia de la actividad intelectual del alumno en el proceso de su aprendizaje, en el formato de presentación de cada una de las unidades que conforman un curso, bajo el título de **aprendizajes**, se pone énfasis en lo que el alumno debe de ser **capaz de hacer o de saber** al término de la misma. En la columna de **estrategias,** se incluyen algunas **sugerencias** de cómo favorecer la adquisición de los aprendizajes descritos, o bien, indicaciones para precisar el nivel de profundidad o la orientación que tienen los contenidos. La última columna, enuncia la **temática** que se trabajará en esa unidad.

Para completar la visión general de los dos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, se incluye a continuación los enfoques disciplinario y didáctico de las matemáticas que se adoptan en todos los programas del Área de Matemáticas, la contribución de la materia al perfil del egresado y, finalmente, un cuadro que sintetiza las unidades que se estudian en dichos cursos.

ENFOQUE DE LA MATERIA

ENFOQUE DISCIPLINARIO

Muchos de los contenidos temáticos de los Programas del Área Matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades, y en particular en los programas de cálculo, por su naturaleza, forman parte del currículo de cualquier institución educativa del nivel medio superior del país. Sin embargo, la forma de enfocarlos, presentarlos y trabajarlos con el estudiante, es lo que hace la diferencia y atiende a los principios educativos que persigue cada institución.

De esta manera, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, la concepción de la matemática conlleva una intención del ***para qué*** queremos enseñarla, ***y cómo*** contribuye a la formación de un sujeto capaz de buscar y adquirir por sí mismo nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y constructiva.

Por ello, en el CCH se concibe a la matemática como una disciplina que:

- **Posee un carácter dual:** Es una ciencia y una herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad; ya que es el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías, a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber tanto humanístico, como científico y tecnológico.

- ✍ **Manifiesta una gran unidad**. No obstante la gran diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas presentan métodos, principios y estrategias comunes. Muchos de los conceptos y procedimientos de una cualesquiera de sus ramas, se vinculan, complementan, o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.
- ✍ **Contiene un conjunto de simbologías propias** fuertemente estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, gráfica, algebraica, por ejemplo) que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones, comportamientos, leyes, etcétera. Aspecto que contribuye, a avanzar en su construcción como ciencia, y a extender el potencial de sus aplicaciones.

ENFOQUE DIDÁCTICO

Como en el CCH un aspecto fundamental es la búsqueda del desarrollo de habilidades de pensamiento (en contraposición al estudio de un gran cúmulo de contenidos) que permitan al estudiante adquirir por su cuenta nuevos conocimientos, se plantea que en la puesta en práctica de estos programas, la enseñanza considere:

- ✍ Introducir el estudio de contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que **no** contemplen de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.
- ✍ Analizar los enunciados de los diferentes problemas planteados, de manera conjunta estudiante-profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera paulatinamente esta habilidad y con el tiempo sea capaz de realizarla de manera independiente.
- ✍ Proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para que el alumno atienda el desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y entienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.

- ✍ Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente, con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos. Las precisiones teóricas se establecerán cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión.
- ✍ Propiciar el tránsito entre distintas formas de representación matemática, enfatizando los procesos algorítmicos de la representación algebraica a través de la manipulación de los registros tabular y gráfico para que la algoritmia tenga mayor significado.
- ✍ Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la matemática.
- ✍ Fomentar el trabajo en equipos para: la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada; la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados.

CONTRIBUCIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS AL PERFIL DEL EGRESADO

Por lo anterior, se busca que el estudiante sea el principal actor en el proceso de su aprendizaje, adquiera un desempeño satisfactorio en la comprensión y manejo de los contenidos y desarrolle:

- ✍ El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo (sistemático, especulativo y riguroso) particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.
- ✍ La adquisición de aprendizajes de manera independiente.
- ✍ La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos matemáticos correspondientes al nivel bachillerato.
- ✍ La capacidad para realizar análisis y establecer relaciones mediante la identificación de semejanzas y el uso de analogías.
- ✍ La capacidad para formular conjeturas, construir argumentos válidos y aceptar o refutar los de otros.
- ✍ La capacidad de aprender tanto de los aciertos como de los errores.

- La capacidad para efectuar generalizaciones a partir del establecimiento y análisis de similitudes y el uso de razonamientos inductivos o deductivos.
- La habilidad para el manejo de estrategias de resolución de problemas.
- La incorporación a su lenguaje y modos de argumentación habituales, de distintas formas de expresión matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica, algebraica).
- La aplicación de conocimientos en distintos ámbitos de su actividad, con actitudes de seguridad en sí mismo y de autoestima.
- El interés por la lectura y comprensión de textos científicos, tanto escolares como de divulgación.
- La valoración del conocimiento científico en todos los campos del saber.

Los diversos cursos del Área de Matemáticas, incluyendo los de Cálculo Diferencial e Integral, contribuyen de este modo, a la formación del bachiller del Colegio de Ciencias y Humanidades.

SECUENCIA DE UNIDADES POR SEMESTRE

Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo Diferencial e Integral II
1. Procesos Infinitos y la Noción de Límite. ***12 horas***	1. Derivada de Funciones Trascendentes. ***16 horas***
2. La Derivada: Estudio de la Variación y el cambio. ***16 horas***	2. La Integral como Antiderivada. ***16 horas***
3. Derivación de Funciones Algebraicas. ***16 horas***	3. La Integral Definida. ***20 horas***
4. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización. ***20 horas***	4. Modelos y Predicción. ***12 horas***

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

UBICACIÓN DEL CURSO

En el Cálculo Diferencial e Integral, los conceptos de aproximación y límite están inmersos en el estudio de la variación, de la medida de la rapidez de cambio y de la suma continua de cambios acumulados; por ello, en el programa de este curso que representa el primer contacto del alumno con esta rama de la matemática, rica fuente de aplicaciones en muy diversos ámbitos, se sientan las bases para la gestación de los conceptos de derivada e integral, sin llegar al aspecto formal de los mismos.

El inicio del curso está dedicado a explorar, mediante el tratamiento tabular y gráfico, varios ejemplos de situaciones en las que intervienen procesos infinitos para que a través del reconocimiento de patrones, el alumno pueda describir su comportamiento, empiece a construir para sí el significado del concepto de límite y comprenda y maneje su notación. Los procesos infinitos constituyen uno de los ejes temáticos, por lo que se retoman paulatinamente en el estudio de la derivada y posteriormente de la integral, en el siguiente semestre.

En la segunda unidad, se inicia el estudio de la derivada a partir del análisis de la variación de funciones polinomiales, enfatizando el significado de razón de cambio. Mediante un proceso infinito ligado al cociente de Fermat, se llega a la derivada como la función que proporciona la razón de cambio instantánea. La intención de presentar la construcción de la derivada con funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, no sólo radica en que éstas son más sencillas y más conocidas por los alumnos, sino que a la vez, permiten avanzar en el estudio de la variación y del análisis gráfico. Así, en la función lineal, sobresale la invariabilidad de la pendiente (asociada a la razón de cambio) y el porqué su derivada es una función constante; en la cuadrática, la segunda variación permite analizar la concavidad; y la cúbica, se presta para estudiar los cambios de concavidad vinculados con la existencia de puntos de inflexión.

La tercera unidad está destinada a obtener las derivadas de funciones algebraicas por medio de las reglas y fórmulas de derivación. Éstas se introducen a través de ejemplos que permiten al estudiante entender cómo surgen y valorarlas como formas simplificadas de carácter general. Además, al integrar la algoritmia al estudio de la derivada como una función en sí misma, se amplían las posibilidades de aplicación a situaciones concretas y se enriquecen los recursos para recabar información sobre las características de la variación y la rapidez de cambio de la función que modela una situación o problema. Si bien, en todas las unidades se le da una presencia al manejo del registro algebraico, en ésta, cobra mayor relevancia ya que es necesario que el estudiante adquiera destreza en la aplicación de las fórmulas para obtener la derivada de funciones algebraicas.

La cuarta unidad representa un primer momento de síntesis. Recupera el aspecto algebraico y enriquece el análisis geométrico para profundizar en la comprensión de la relación existente entre una función y sus derivadas. Además, refuerza el concepto de derivada y permite extender el campo de sus aplicaciones a situaciones más complejas o nuevas, en particular, al campo de los problemas de optimización.

Con respecto al concepto de continuidad, éste subyace a lo largo del curso aún cuando no forma parte explícita de la temática; por lo cual debe trabajarse intuitivamente (sobre todo en las funciones que presentan discontinuidades) para propiciar la formulación de dicho concepto en cursos posteriores de cálculo.
Por último, no obstante que en el programa no existe una unidad destinada al estudio de la integral, en las dos últimas, se sientan las bases de este concepto, al utilizar la o las derivadas de una función para obtener información sobre la función misma.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el primer curso de cálculo, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucran variación.
- ✍ Adquiere una visión del concepto de límite, a través del análisis de la representación tabular y gráfica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.
- ✍ Relaciona a la derivada de una función con un proceso infinito que permite estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.
- ✍ Maneja de manera integrada las diversas interpretaciones de la derivada y las utiliza para obtener y analizar información sobre una función.
- ✍ Utiliza adecuadamente las técnicas de derivación y ubica a las fórmulas como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.
- ✍ Aplica la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la unidad	Horas
I	Procesos Infinitos y la Noción de Límite	12
II	La Derivada: Estudio de la Variación y la Razón de Cambio	16
III	Derivación de Funciones Algebraicas	16
IV	Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización	20

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

Bittinger, Marvin. *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. Séptima edición, Addison Wesley, Colombia,2002.

Goldstein, L. J. *et. al. Cálculo y sus aplicaciones*, Prince - Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Hughes, Deborah *et. al. Cálculo Aplicado*, CECSA, México, 2002.

Salinas, Patricia, *et. al*. *Elementos del Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

Stewart, James, *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*, Thomson – Learning, Cuarta Edición, 2001.

Stein, Sherman y BARCELLOS, A. *Cálculo y Geometría Analitíca*. *1*, McGraw – Hill, Colombia, 1995.

Warner, Stefan y COSTENOBLE, Steven. *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

LECTURAS EDUCATIVAS

Filloy, Eugenio *et. al*. *Matemática Educativa*. Fondo de Cultura Económica, México, 2003.

"*El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje del límite y continuidad de funciones y tangencia, contacto y la diferencial*".

Cantoral, Ricardo. *Matemática Educativa*. *Un Estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

EVALUACIÓN

En estos programas no se incluyen aspectos relativos a la evaluación porque la comisión encargada de su elaboración, considera que el problema de la evaluación en las asignaturas de matemáticas requiere de una mayor reflexión y tiempo del que se dispuso para revisar y ajustar los programas, de modo que fuera posible plantear sugerencias que realmente incidan en esta problemática.

UNIDAD I. PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

Propósitos:

- Explorar diversos problemas que involucren procesos infinitos a través de la manipulación tabular, gráfica y simbólica para propiciar un acercamiento al concepto de límite.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Utiliza procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos. ? Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: material concreto, diagramas, gráficas, tablas o explicaciones verbales. ? Reconoce un proceso como una acción que produce un resultado, este proceso será infinito cuando se pueda producir siempre un resultado más. ? Distingue un proceso infinito de uno que no lo sea.	? Mostrar ejemplos que involucren procesos infinitos en los cuales se tiene un resultado límite que es posible predeterminar. ? Es conveniente plantear problemas que conduzcan a encontrar patrones numéricos, geométricos o simbólicos de procesos infinitos como los siguientes: - Problema del saltamontes (mitad del segmento, después la mitad, . . .) - Representar $\frac{1}{3}$ en su forma decimal $\frac{1}{3}$? 0.3 ? 0.03 ? 0.003 ? ... ? Dividir un cuadrado de área uno a la mitad, tomar una mitad y nuevamente dividirla a la mitad, y así sucesivamente. Calcular las áreas de cada sección e inferir hacia qué valor se acerca el área seccionada y hacia dónde se acerca la suma de las áreas seccionadas.	**PROCESOS INFINITOS** Situaciones que dan lugar a procesos infinitos. Comportamiento de un proceso infinito: Representación tabular y gráfica. Representación simbólica de procesos infinitos: ? *Discretos*. ? *Continuos*. **NOCIÓN DE LÍMITE** Acercamiento al concepto de límite de una función. Notaciones de límite: - $f(x)$? L x ? ? - $f(x)$? L x ? a - $\lim f(x) = L$ x ? a

? Resuelve problemas de diversos contextos que involucran en su solución, procesos infinitos. ? Utiliza las representaciones gráfica, tabular y algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanto a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, qué tan parecidos son y a la larga, cómo son éstos. ? Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen. ? Interpreta la representación simbólica de procesos infinitos discretos y continuos como una forma de expresar la solución exacta de dichos procesos.	? Inscribir polígonos regulares en un círculo y determinar el resultado límite tanto de sus perímetros como de sus áreas desde el punto de vista geométrico; inferir los valores numéricos de dichos límites. ? Resolver ecuaciones de la forma $a^x = b$ a través de un proceso infinito que aproxima el valor de la solución ? Hacer énfasis en el hecho de que una sucesión permite expresar de forma simbólica procesos infinitos. ? Como un primer acercamiento al concepto de límite de una función, es pertinente trabajar ejemplos discretos para analizar los casos en donde $n ?\ 8$. ? Es útil considerar la manipulación de sucesiones como un objeto que permite expresar un proceso infinito discreto que puede tener o no tener límite. ? Considerar que la simbolización $\lim_{n? ?} a_n ? b$ permite representar procesos infinitos discretos que tienen un valor límite. ? Conviene proponer tareas que muestren que dado un número real, existen diferentes sucesiones cuyos términos permiten acercarse al punto dado de tres maneras: siempre con valores mayores, siempre con valores menores y con valores mayores y menores al número dado.	

	? Darle significado a la simbolización $f(x) ? L$ cuando $x ? ?$ a partir de las representaciones tabular y gráfica de funciones en las cuales la relación entre sus variables establecen procesos infinitos que corresponden a la simbolización mencionada. ? A partir de la construcción de relaciones que surgen con base en las variables de una función que modela una situación real, establecer procesos infinitos. Por ejemplo, la velocidad instantánea a partir de la relación distancia – tiempo; la distancia a partir de la relación velocidad – tiempo; como consecuencia dar significado a la simbolización $f(x) ? L$ cuando $x ? a$. ? Propiciar que la simbolización de $\lim_{x ? a} f(x) ? L$ se interprete como la noción dinámica de que los valores de una función se aproximan a un valor límite cuando los valores en el dominio se aproximan a algún valor dado.	

UNIDAD II. LA DERIVADA: ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO.

Propósitos:

- Analizar la variación y la razón de cambio mediante problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primer, segundo o tercer grado para construir el concepto de derivada con apoyo de procesos infinitos y la noción de límite.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explica el significado de la pendiente de una función lineal en el contexto de un problema dado. ? Elabora una tabla, dibuja la gráfica y construye una expresión algebraica asociadas al estudio de problemas cuyos modelos sean funciones polinomiales de primero, segundo o tercer grado. ? Identifica que una función lineal tiene variación constante, en intervalos del mismo tamaño. ? Identifica que en una función cuadrática, el cambio del cambio es constante en intervalos del mismo tamaño.	? Presentar problemas cuyo modelo sea una función lineal con el objetivo de estudiar el significado de la pendiente, éstos pueden ser de velocidad, temperatura, costo, entre otros. Los problemas podrán modelarse a través de una tabla, su gráfica y su forma algebraica. ? En la representación tabular es conveniente tomar valores de la variable independiente igualmente espaciados, para calcular la diferencia de las imágenes y establecer relaciones con la representación gráfica y la algebraica. ? En la representación tabular, para modelos cuadráticos y cúbicos, calcular las diferencias de las diferencias, hasta que por primera vez sean constantes y establecer relaciones con las representaciones gráfica y algebraica.	Estudio de la variación ? Situaciones que se modelan con funciones polinomiales de 1°, 2° y 3° grado. ? La representación de su variación en forma tabular, gráfica y algebraica. ? Comparación de la razón de los cambios en intervalos del mismo tamaño. ? Cambios de los cambios. Razón de cambio, medición de la variación.

? Infiere que el n- ésimo cambio es constante para funciones polinomiales de grado n. ? Calcula la razón de cambio de una función polinomial, en un intervalo dado. ? Utiliza procesos infinitos como un camino para obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite. ? Identifica a la derivada de una función polinomial de primer, segundo y tercer grado en un punto, como el límite de las razones de cambio promedio. ? Calcula la derivada de funciones polinomiales usando: $f'(a) = \underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.	? A través de problemas como el de caída libre, iniciar el análisis de la velocidad promedio en un intervalo de tiempo y con ayuda de los procesos infinitos aproximarse a la velocidad instantánea en un punto; la gráfica de la función y su tabla ayudará al análisis de dichos problemas. ? En problemas cuyo modelo sea una función de segundo grado, analizar su razón de cambio en un intervalo, y posteriormente calcular la razón de cambio instantánea. En el análisis de la razón de cambio instantánea es conveniente utilizar la noción de límite como una herramienta. ? Analizar la razón de cambio en un intervalo y la razón de cambio instantánea en problemas que se modelen con funciones polinomiales de tercer grado, por ejemplo; la razón de cambio del volumen en una caja. ? Una vez que se haya realizado el análisis de la razón de cambio en diferentes problemas y haber trabajado las razones de cambio instantáneas como un proceso infinito, definir la derivada de una función y calcular derivadas para polinomios.	? La pendiente de la función lineal como razón de cambio constante en el contexto del problema. ? Razón de cambio promedio en intervalos del mismo tamaño de funciones polinomiales de segundo y tercer grado. ? La razón de cambio promedio en el contexto del problema. ? La razón de cambio instantánea en el contexto del problema. ? Concepto y notación de derivada. ? Representación algebraica. $\underset{x \to a}{lím} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

UNIDAD III. DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Propósitos:

- Continuar el estudio del concepto de derivada a través del manejo de su representación algebraica, buscando que el alumno reconozca a las reglas de derivación como un camino más eficaz de obtener la derivada de una función.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	**ESTRATEGIAS**	**TEMÁTICA**

El alumno:
 	
- Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° o 3° grado usando la definición:
 	
$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
 	
- Identifica el patrón de comportamiento de las derivadas obtenidas con el límite del cociente de Fermat, y encuentra la fórmula de la derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$.
 	
- Calcula la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación.
	- Se sugiere utilizar la fórmula
	
	$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
	
	para calcular derivadas de funciones del tipo $f(x) = cx^n$. Es conveniente iniciar con ejemplos en los que $c = 1$ y posteriormente dar otros valores.
	
	- Proponer ejercicios de cálculo de la derivada de potencias y de polinomios; propiciar que el alumno infiera una forma económica de calcular dichas derivadas.
	
	- A través del cálculo de la derivada de polinomios conjeturar las reglas de derivación para:
	    - Suma de funciones
	    - Producto de una constante por una función.
	    - Función constante.
	
	- Usar ejemplos de potencias de polinomios de primer y segundo grado para introducir la regla de la cadena.
		Derivada de funciones del tipo $f(x) = cx^n$.
		
		Reglas de derivación
		Constante por una función
		- Suma
		- Producto.
		- Cociente.
		- De la cadena con funciones del tipo (f(x))n con f(x) un polinomio.
		
		Notación.
		
		Problemas de aplicación.
		- Cálculo de tangentes.
		- Cálculo de velocidades.

? Reconoce la jerarquía de las operaciones involucradas en la regla de correspondencia de una función para aplicar correctamente las reglas de derivación. ? Identifica las relaciones existentes entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada. ? Obtiene la velocidad instantánea como la derivada de la función de posición y la aceleración como la derivada de la velocidad. ? Obtiene la ecuación de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función. ? Da significado a la derivada de una función en el contexto de un problema.	? Mediante productos de polinomios se puede introducir la regla del producto; por ejemplo, se puede pedir que obtengan la derivada de $x(x^2+3x)$. Si por similitud con la suma lo realizan como el producto de las derivadas, sugerir que primero hagan la multiplicación y luego deriven para corroborar que no obtuvieron lo mismo y así evidenciar que la derivada de un producto no se comporta de igual manera que la de la suma. Con el mismo ejercicio guiarlos para que hallen la regla correcta. ? La regla del cociente se puede obtener a partir de la del producto, escribiendo el cociente. como una multiplicación. ? Proponer ejemplos de la interpretación de la derivada cuyos modelos no sean polinomios, y resolverlos usando las técnicas de derivación. ? Dibujar la gráfica de una función y la de su derivada para hacer comparaciones; buscando una primera aproximación de la identificación de las relaciones entre ambas. Por ejemplo: máximos y mínimos de la función, intervalos donde la función es creciente o decreciente.	

UNIDAD IV. COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Propósitos:

✍ Analizar las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizar dicha información para resolver problemas de optimización.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Infiere a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociada con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad. ? Bosqueja la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma. ? Determina gráfica y algebraicamente los intervalos en donde una función es creciente, decreciente o constante.	? Es conveniente aprovechar el conocimiento adquirido en los cursos anteriores sobre las funciones cuadráticas. En particular, las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$ ayudan a comprender tanto lo que es un punto máximo ó mínimo, al vincular el comportamiento gráfico de la función (creciente o decreciente) con el signo de la pendiente de las tangentes (positivo, negativo), como la noción de punto crítico (derivada cero). Esto ayuda a establecer el criterio de la primera derivada. ? Con la función $f(x) = x^3$ se muestra la insuficiencia de la condición de que un punto critico debe ser máximo o mínimo; lo que permite introducir el concepto de punto de inflexión. ? Es conveniente después de analizar, identificar y definir gráficamente punto crítico y concavidad, obtener máximos, mínimos y puntos de inflexión en forma algebraica.	Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas. Comportamiento gráfico de una función. ? Crecimiento y decrecimiento de funciones ? Puntos críticos. ? Concavidad. ? Máximos y mínimos, criterio de la 1ª y 2ª derivada. ? Puntos de inflexión. ? Gráfica de f (x) a partir de las gráficas de ,f ’(x) y f ’’(x) y viceversa

? Determina los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o inflexiones. ? Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada. ? Grafica una función analizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada. ? Comprende que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de *f, f '* y *f ''.* ? Resuelve problemas que involucran máximos y mínimos de una función.	? Una vez que el alumno ha comprendido el significado de máximo, mínimo y punto de inflexión, a través de la primera derivada, es conveniente para estudiar la concavidad, utilizar alguna función de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo, por ejemplo $f(x) = x^3 - 12x$. Realizar el análisis gráfico del comportamiento por intervalos tanto de la función como de la primera y segunda derivada para obtener las relaciones entre todas ellas y concluir con el criterio de la segunda derivada. Mostrar con este tipo de ejemplos (polinomios de grado tres o mayor) que el criterio de la segunda derivada es más práctico que el otro. ? Conviene construir el bosquejo de la gráfica de la derivada a través de la gráfica de la función y viceversa, ya que permite al alumno (en el estudio posterior de la antiderivada) asociar la forma de la curva con el significado geométrico de la derivada. ? Finalmente, hacer ver que dada la gráfica de una función o la de su derivada, se obtiene información sobre el comportamiento gráfico de la otra. ? En cuanto a los problemas de optimización, es conveniente iniciar con problemas cuyo modelo no sea difícil de representar como una función real de variable real, y utilizar en primera instancia, su gráfica para hacer predicciones. ? También es útil, enfatizar en los ejemplos que resuelva el profesor, la forma en que la condición que establece el problema entre las variables (por ejemplo ancho y largo; radio y altura, etc.) permite que la función a optimizar se transforme en una función con una sola variable independiente.	Problemas de optimización.

PROGRAMA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

UBICACIÓN DEL CURSO

En el segundo curso de Cálculo Diferencial e Integral, al incorporar el estudio de la integral y culminar su relación con la derivada a través del Teorema Fundamental del cálculo, se completa el panorama de lo que estudia esta importante rama de la matemática. La orientación del curso, al igual que el anterior, se centra en propiciar el significado de los conceptos a través del manejo de sus diversas representaciones (tabular, gráfica y algebraica), en lograr el desempeño algorítmico a partir de la comprensión de los procedimientos y el uso adecuado de las fórmulas, y finalmente, en utilizar los conocimientos del Cálculo para obtener e interpretar información sobre situaciones de variación que pueden modelarse con una función real de variable real.

En la primera unidad se extiende el estudio de la derivada a un nuevo tipo de funciones, las trascendentes, al analizar ahora la variación y la rapidez de cambio de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas que modelan diversos fenómenos físicos, químicos, biológicos y sociales, entre otros. Se retoma en análisis gráfico sobre las relaciones de una función y sus dos primeras derivadas, para propiciar una mejor comprensión.

El estudio de la integral se inicia propiamente en la segunda unidad de Cálculo II[2], cuando se trabaja el proceso inverso a la derivación con problemas que plantean obtener la función que los modela a partir de conocer su rapidez de cambio. Las funciones polinomiales nuevamente son el punto de partida, ya que facilitan tanto gráfica como algebraicamente, la comprensión de los conceptos de integral, antiderivada y condición inicial, estrechamente vinculada con la existencia de una familia de funciones y con la constante de integración. Se prepara a alumno en cuanto al manejo algorítmico para resolver una diversidad de ejercicios de integración a través de las formas inmediatas y concluir con los métodos de sustitución e integración por partes.

---

[2] Aunque en Cálculo I no hay una unidad destinada al estudio de la integral, en las dos últimas unidades, se sientan las bases para la comprensión de este importante concepto al estudiar las relaciones de una función con su derivada y utilizar la información que proporciona ésta para conocer aspectos del comportamiento de la función dada.

En la unidad tres, la integral definida se introduce por medio de la función-área asociada a diversas situaciones que se modelan con funciones constantes y lineales, con la intención de darle una presentación más natural que favorezca su significado y su relación con la antiderivada. Este tratamiento ayuda a comprender lo que establece el Teorema Fundamental del Cálculo y su aplicación en el cálculo del área bajo otro tipo de curvas. La unidad termina, con un nuevo camino para calcular el área a través de aproximaciones numéricas, cuando no es posible o no es sencillo encontrar una antiderivada; camino que retoma la noción de proceso infinito y constituye los cimientos de la integral de Riemann.

Por último, la cuarta unidad representa la culminación de ambos cursos. Consolida la comprensión, manejo y aplicación, tanto de la derivada como de la integral en la construcción del modelo asociado a diversas situaciones, en las que la derivada de una función es proporcional a ésta, como son: crecimiento de una población, desintegración radiactiva, Ley de enfriamiento de Newton, asimilación de un medicamento en el organismo, propagación de una enfermedad.

PROPÓSITOS DEL CURSO

Al finalizar el segundo curso de Cálculo Diferencial e Integral, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- ✍ Incrementa su capacidad de resolver problemas al adquirir nuevas técnicas y herramientas que proporciona el cálculo; en particular, la representación y predicción de situaciones y fenómenos que involucran variación.
- ✍ Avanza en la comprensión y manejo de la derivada, al estudiarla en funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- ✍ Comprende la relación entre la derivada y la integral que se sintetiza en el Teorema Fundamental del Cálculo.
- ✍ Utiliza adecuadamente las fórmulas de integración, así como los métodos de sustitución e integración por partes.
- ✍ Relaciona a la integral definida de una función con el área bajo una curva y comprende que puede obtenerse mediante la antiderivada o con un proceso infinito de aproximaciones numéricas.
- ✍ Integra las diversas interpretaciones de la integral y las utiliza para resolver problemas relacionados con la rapidez de cambio y con el cálculo del área bajo una curva.

CONTENIDOS TEMÁTICOS

No.	Nombre de la Unidad	Horas
I	Derivadas de Funciones Trascendentes.	16
II	La Integral como Antiderivada	16
III	La Integral Definida	20
IV	Modelos y Predicción.	12

BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA.

Bittinger, Marvin. *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. Séptima edición, Addison Wesley, Colombia, 2002.

Goldstein, L. J. *et. al. Cálculo y sus aplicaciones*. Prince - Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Hughes, Deborah *et. al. Cálculo aplicado*, CECSA, México, 2002.

Salinas, Patricia, *et. al*. *Elementos del Cálculo*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

Stewart, James, *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*, Thomson – Learning, Cuarta Edición, 2001.

Stein, Sherman y BARCELLOS, A. *Cálculo y Geometría Analítica 1*, McGraw – Hill, Colombia, 1995.

Warner, Stefan y COSTENOBLE, Steven. *Cálculo Aplicado*. Segunda Edición, Thomson, México, 2002.

LECTURAS EDUCATIVAS.

Cantoral, Ricardo. *Matemática Educativa*. *Un Estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

EVALUACIÓN

En estos programas no se incluyen aspectos relativos a la evaluación porque la comisión que los elaboró consideró que el problema de la evaluación en las asignaturas de Matemáticas requiere de una mayor reflexión y tiempo del que se dispuso para revisar y ajustar los programas, de modo que se pudieran plantear sugerencias que realmente incidan en esta problemática.

UNIDAD I. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

Propósitos*:*

✍ Reforzar y extender el conocimiento de la derivada a través del estudio de la variación de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales para cubrir situaciones que se modelan con funciones trascendentes. Retomar las relaciones entre las gráficas de una función y su derivada.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Analiza las gráficas de las funciones seno y coseno y a partir de ellas, bosqueja la gráfica de su respectiva derivada. ? Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones seno y coseno. ? Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas también involucran variación periódica. ? Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.	? Es conveniente iniciar el tema presentando problemas que involucren el uso de la variación de funciones periódicas. ? Conviene utilizar los modelos gráficos para obtener o relacionar la derivada del seno con la función coseno y la relación recíproca respectiva. ? Se propone el análisis tabular de los límites $\lim_{x \to 0} \frac{sen x}{x}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, en la obtención de la derivada de las funciones trigonométricas seno y coseno, para reforzar el análisis gráfico. ? Se sugiere obtener las derivadas de las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de las derivadas de las funciones seno y coseno, las reglas de derivación e identidades trigonométricas. ? Proponer ejercicios de cálculo de derivadas de funciones trigonométricas cuyo argumento sea a su vez, una función algebraica de x.	**Derivadas de funciones trigonométricas** Situaciones que dan lugar a funciones trigonométricas y al estudio de su variación. Construcción gráfica y tabular de la derivada de las funciones seno y coseno. Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Regla de la cadena para funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x.

? Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas cuyo argumento es función de x. ? Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas diversos. ? Analiza las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial y a partir de ellas bosqueja las gráficas de sus derivadas. ? Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones logarítmica y exponencial. ? Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones logarítmica y exponencial cuyo argumento es función de x. ? Aplica las derivadas de funciones logarítmica y exponencial a problemas diversos.	? Se sugiere emplear la derivada de las funciones circulares para el estudio de fenómenos periódicos, tales como el péndulo simple, pistón oscilante dentro de la Física, o bien, de diversos fenómenos periódicos como son, el ritmo cardiaco, duración de la luz solar diaria, el movimiento de las mareas, el ciclo de la respiración. ? Es útil, mostrar ejemplos y problemas que involucren el crecimiento exponencial y su variación, para iniciar el estudio de su derivada. ? Se propone revisar el comportamiento gráfico, tabular y simbólico de las funciones logarítmica y exponencial para el análisis y obtención de sus derivadas. ? Se sugiere emplear la derivada de la función exponencial como modelo de situaciones de crecimiento, decrecimiento, así como de problemas de interés compuesto. ? Proponer, graduando la dificultad, ejercicios diversos de cálculo de derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales, cuyo argumento sea a su vez función de x. Es conveniente enfatizar las aplicaciones a diversas disciplinas más que los desarrollos teóricos extensos. ? Se sugiere dar a conocer y aplicar el método de la derivación logarítmica. Resaltar el hecho de que al aplicar primeramente el logaritmo en ejercicios de derivadas de productos, cocientes, potencias y exponenciales, y posteriormente derivar, esto se reduce a aplicar las reglas de la derivación de la suma, resta y el producto por un número real.	Aplicaciones de las derivadas de funciones trigonométricas. **Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas**. Situaciones que den lugar a funciones logarítmicas o exponenciales y su variación. Construcción gráfica y tabular de las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica. Derivada de las funciones: e^x, e^u, a^x y a^u Derivada de las funciones: $\ln x, \ln u, \log_a x$, y. $\log_a u$ Aplicaciones de las derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales.

UNIDAD II. LA INTEGRAL COMO ANTIDERIVADA.

Propósitos:

- Introducir el concepto de integral indefinida, a partir de analizar situaciones de variación en las que sólo se conoce su razón de cambio e inducir las primeras fórmulas para aplicarlas junto con los dos métodos de integración.

TIEMPO: 16 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora a través de tablas, gráficas o análisis del comportamiento de la variación, situaciones o problemas cuya solución lleva a encontrar la antiderivada de una función constante o lineal. ? Establece la relación funcional que permite resolver el problema. ? Encuentra la función cuya derivada es de la forma $f'(x) = c$ ó $f'(x) = ax + b$. ? Utiliza la condición inicial del problema para encontrar la solución particular.	? Para iniciar la unidad, se sugiere que se utilicen situaciones o problemas en los que se conoce que la rapidez de cambio está dada por una función constante o lineal, y aprovechar el contexto de la situación para que resulte natural al alumno encontrar la función cuya derivada es la que se proporciona. Con ello, se propicia la significación del concepto de antiderivada. ? Para clarificar el papel que representa la condición inicial en la solución particular, es conveniente introducir una variante en el problema y solicitarle al alumno que encuentre la nueva solución particular. Para reforzarlo, es útil plantear el camino inverso; es decir, cambiar el parámetro relativo a la condición inicial en el modelo hallado, y pedir al estudiante que modifique la redacción del problema para que concuerde con esa modificación	Situaciones en las que se desconoce la función que las modela y se conoce su razón de cambio. La antiderivada. Primer acercamiento a la solución de ecuaciones de los tipos: $f'(x) = c$ $f'(x) = ax + b$ $f'(x) = ax^n$ La integral indefinida de una función. ? Concepto de integral indefinida. ? Relación entre la condición inicial y la constante de integración.

? Identifica que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante. ? Explica el significado de condición inicial y antiderivada. ? Conoce la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida. Maneja la notación respectiva. ? Induce la fórmula de $\int ax^n dx$? Utiliza una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales. ? Avanza en el reconocimiento de estructuras al identificar la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para obtener una integral dada. ? Identifica las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata. ? Mejora su desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.	? También es conveniente, retomar el análisis gráfico que se realizó en la unidad 4 de Cálculo I, como apoyo para visualizar que el proceso de integración da lugar a una familia de soluciones y resaltar el papel que juega en ella, la constante de integración. ? Una vez que los alumnos saben encontrar la antiderivada de funciones constantes y lineales, es útil introducir la notación de la integral y plantear ejercicios graduados de funciones del tipo $f(x) = cx^n$ para que a través del reconocimiento de patrones, induzcan la fórmula de integración correspondiente. Para obtener las propiedades: $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ y $\int audx = a\int udx$ se sugiere introducir polinomios sencillos. De manera natural los alumnos integrarán cada término y mediante una reflexión guiada por el profesor, llegarán a la regla general. ? Para introducir el método de sustitución, se sugiere incorporar pequeñas modificaciones a algunas integrales inmediatas e invitar al alumno a hacer “ajustes” para obtener la solución. También es útil, que el profesor muestre este método como la “inversión” de la regla de la cadena para el caso particular de potencias de funciones. Esto ayudará a que identifiquen la ***u*** comprueben si tienen ***du*** ó, en su caso, qué tipo de “ajuste” requieren para tenerla y procedan a aplicar la sustitución.	Fórmulas y métodos de integración. ? Integrales inmediatas. ? Cambio de Variable (sustitución). ? Integración por partes.

? Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades de integrar productos de funciones y sabe que se desprende de la derivada de un producto. ? Utiliza el método de integración por partes.	? Se sugiere que el profesor muestre el método de integración por partes como el proceso inverso de la regla para calcular la derivada de un producto. Darles algunas sugerencias para la elección de ***u*** y ***v***, a través de los ejercicios que se realicen en clase, presentar algún ejemplo invirtiendo la elección y analizar con ellos qué sucede y porqué. ? Para finalizar, es útil hacerlos reflexionar sobre la dificultad para calcular integrales (a diferencia de lo que pasaba con las derivadas) y comentarles que existen por ello, otros métodos de integración.	

UNIDAD III. LA INTEGRAL DEFINIDA

Propósitos:

- ✍ Introducir el concepto de integral definida como una función-área para construir su significado. Relacionar los conceptos de derivada e integral en la formulación del teorema Fundamental del Cálculo.

TIEMPO: 20 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Asocia el área bajo una curva con la solución a una situación dada. ? Calcula el área bajo la gráfica de funciones constantes y lineales, auxiliándose de la figura geométrica respectiva. ? Obtiene la función-área, que proporciona el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma ? *0 , x* ?, ? *a , x* ?, ? *a , b* ?. ? Relaciona la antiderivada de una función con la función?área asociada. ? Interpreta el área bajo una curva de la forma $f(x) = x^n$,	? Se sugiere que los alumnos conozcan algunas lecturas sobre el desarrollo histórico del cálculo de áreas y sobre el surgimiento de la integral. ? Se propone iniciar con problemas que involucren el cálculo de distancia, trabajo, presión, entre otros, de modo que los alumnos analicen la gráfica de la función constante o lineal asociada y perciban que dichos problemas se resuelven al calcular el área bajo la gráfica de esa función. ? Se sugiere que se proceda a calcular el área bajo la gráfica de funciones del tipo $f(t) = c$, $f(t) = t$, $f(t) = at + b$ en intervalos cerrados de la forma ? *0 , x* ?, ? *a , x* ?, ? *a , b* ?, para encontrar la función?área asociada. ? Presentar por ejemplo, el problema de caída libre y preguntar por la distancia recorrida con el objetivo de interpretar la solución como un área. Con respecto a la representación del área desde a hasta x bajo la gráfica de f(x), se sugiere incorporar la notación $A(x)\ ?\ \int_a^x f(t)dt$	Situaciones que se representan mediante áreas. ? El área bajo la gráfica de una función constante o lineal. ? El área como una función A(x). ? La función área como una antiderivada. ? Interpretación de áreas bajo la curva de funciones polinomiales. La integral definida. ? Aproximación numérica al cálculo del área bajo la gráfica de una función, mediante rectángulos. ? Definición. ? Propiedades.

? Reconoce a la aproximación numérica como un método general para calcular el área bajo una curva. ? Asocia el método de aproximación numérica para calcular un área con un proceso infinito. ? Analiza el comportamiento del proceso infinito asociado a la aproximación numérica para conocer si tiene un valor límite y cuál es éste. ? Aproxima el área bajo una curva utilizando sumas de áreas. ? Valora las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida. ? Comprende la interrelación que se establece en el Teorema Fundamental del Cálculo. ? Aplica el Teorema Fundamental del Cálculo. ? Calcula el área entre dos curvas.	? Para iniciar la aproximación numérica, es útil proponer a los alumnos la gráfica de una función sin darles su representación analítica, pedirles que calculen el área bajo la curva en un intervalo dado e inducirlos para que obtengan una aproximación al área a través de la suma de las áreas de los cuadrados de la cuadrícula de su cuaderno. ? Conviene utilizar particiones que den lugar a segmentos de la misma longitud, en los ejemplos para el ilustrar el método de aproximación numérica al cálculo de áreas con funciones del tipo $f(x) = x^n$. ? En el proceso de aproximar áreas bajo la gráfica de funciones del tipo $f(x) = x^n$ es conveniente que los alumnos construyan una tabla y con base en ella, analicen la tendencia de las sumas de las áreas retomando la noción de proceso infinito visto en la unidad 1 de Cálculo I. Contribuye a esto, dejar de tarea que hagan el cálculo con particiones más finas utilizando *Excel*. ? Conviene utilizar un ejemplo que les permita visualizar la relación entre la función?área, la antiderivada y la integral como límite de sumas para enunciar (sin demostrar) lo que establece el Teorema Fundamental del Cálculo. ? A partir de la forma en que se ha llegado al Teorema Fundamental del Cálculo, le resultará claro al alumno interpretar a la integral definida como: $\int_a^b f(x)dx ? F(a) ? F(b)$, donde F es cualquier antiderivada de f	Teorema Fundamental del Cálculo. ? La función área como antiderivada. ? Justificación del Teorema Fundamental del Cálculo mediante la función área. ? Aplicaciones de la integral definida.

	? Es importante hacer ejercicios de aplicación que incluyan áreas entre curvas, trazar sus gráficas y calcular las integrales respectivas. También es útil, retomar alguno de los problemas sobre distancia, trabajo o presión, proponer variantes que den lugar a una función no lineal, y resolverlos con la integral definida.	

UNIDAD IV. MODELOS Y PREDICCIÓN

Propósitos:

✍ Culminar el estudio de la derivada y la integral con la construcción de un modelo que las involucra relacionado con situaciones de diversos contextos. Utilizar el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de las situaciones estudiadas.

TIEMPO: 12 horas

APRENDIZAJES	ESTRATEGIAS	TEMÁTICA
El alumno: ? Explora en forma numérica, gráfica o algebraica, las condiciones de una situación dada. ? Identifica que el comportamiento de la rapidez de cambio asociada a la situación, se puede modelar a través del esquema: $\frac{dF}{dt} ? kF$? Reconoce que para obtener la función que modela el problema tiene que recurrir a la integral para obtener una antiderivada.	? Para iniciar la unidad, es conveniente plantear a los alumnos el estudio de una situación “abierta”, por ejemplo, el crecimiento de una población, e invitarlos a que propongan los factores que intervienen en ella. Al sistematizar sus aportaciones y con preguntas dirigidas, es posible llegar a lo que significa la tasa de crecimiento y al hecho de que la rapidez de crecimiento de una población es proporcional al tamaño de la misma. Con ello, sólo se requiere usar la simbología para establecer la relación entre la función y su derivada, mediante el esquema: $\frac{dP}{dt} ? kP$? En esta etapa del curso, es muy probable que a los alumnos les quede claro que necesitan integrar para obtener $P(x)$, sin embargo, es necesario hacerles ver que requieren de un nuevo camino. Al presentar el método de separación de variables, es conveniente cuidar que no se queden con la idea errónea de que “dt pasa multiplicando”, pero sin caer en explicaciones teóricas que exceden los propósitos de este curso.	**Modelos y Predicción** Ejemplos de situaciones de variación cuya rapidez de cambio se comporta como: $\frac{dF}{dt} ? kF$? Método de separación de variables. ? Análisis del modelo $F(t) = P_0 e^{kt}$. ? Predicción del comportamiento de $P(t)$ en el contexto de la situación.

? Conoce el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dF}{dt}$? kF y lo a aplica en algunos ejemplos. ? Toma en cuenta las condiciones iniciales para obtener la solución particular que representa a la situación, y llega a un modelo del tipo $F(t) = F_0\ e^{kt}$. ? Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación. ? Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo F(t) = F0 ekt. dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas. ? Aprecia la importancia del modelo $P(t) = P_0\ e^{kt}$, al saber que se aplica en situaciones de índole diversa.	? Una vez hallada la solución $P(t) = e^{kt}$ se procedería a analizar su comportamiento general y a efectuar algunas predicciones de la población. Para ello, es conveniente contar con datos del INEGI del último censo (están disponibles en internet) tanto sobre la tasa de crecimiento, como del número de habitantes en el país y en el DF. Calcular el tamaño de la población en el futuro a través del modelo. Al hacerlo también para décadas pasadas y cotejar el resultado con los datos, contribuye a entender el papel que juega en él la constante de proporcionalidad (ligada a la tasa de crecimiento), ayuda a reflexionar sobre la importancia de los datos para alimentar los parámetros de un modelo y sobre la necesidad de construir modelos más refinados. ? Es importante plantear otras situaciones cuyo comportamiento es similar a la primera que se trabajó, de modo que aprecien la importancia de los modelos matemáticos cuyo énfasis se centra en el comportamiento de la situación modelada, y de ahí su carácter general. Entre otras situaciones que se estudian con $F(t) = F_0\ e^{kt}$. están: la desintegración radiactiva, la Ley de enfriamiento de Newton, la asimilación de un medicamento en el organismo, la propagación de una enfermedad. ? En los ejemplos de situaciones que se trabajen es importante utilizar el modelo para hacer predicciones. Los datos de la semivida del carbono 14 u otra sustancia radiactiva se incluyen en varios libros de la bibliografía, los de la propagación del sida, también son sencillos de conocer.	

COMISIÓN DE REVISIÓN Y AJUSTE DE LOS PROGRAMAS DE ESTUCIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I Y II

Rosario Preisser Rodríguez, Francisco Javier Hernández Velasco, Alma Delia Leos Hidalgo, Roberto Peña de la Rosa, Francisco Mendoza Cano**,** J. Alberto Monzoy Vásquez., Juana Castillo Padilla, Ildefonso Sánchez Torres, Alejandra G. Bravo Ortiz, Eulogio Aquino Vázquez, Socorro Nova Covarrubias, Hugo G. Mirón Shac, Emigdio Navarro Esquivel, Carlos Hernández Saavedra, Rafael García Álvarez, Héctor Pérez Aguilar, Edda S. Valencia Montalbán.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU