UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

SECRETARÍA ACADÉMICA

GUÍA DE ESTUDIO

PARA PRESENTAR EL EXAMEN DE CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES DISCIPLINARIAS PARA LA CONTRATACIÓN TEMPORAL DE PROFESORES DE ASIGNATURA INTERINOS DE

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I Y II

PROMOCIÓN XL

ENERO 2019

INTRODUCCIÓN

En esta guía se presentan diversos problemas de Cálculo Diferencial e Integral, algunos de ellos resueltos. En las soluciones se muestran estrategias para modelarlos y resolverlos. Algunos son sólo ejercicios, en los cuales se desarrollan algoritmos para llegar a su solución. También se presenta un listado de problemas no resueltos para que te ejercites y compruebes su solución.

OBJETIVOS

El objetivo de esta guía es mostrar una forma de resolver un problema, la manera de presentarlo, redactarlo de una manera sencilla, lógica y proporcionarte algunas ideas para enfrentar los problemas que contiene el examen.

MODO DE USO DE LA GUÍA

Estudia los temas ligados a los problemas que se proporcionan y resuelve los problemas de esta guía apoyándote en la bibliografía.

ACERCA DEL EXAMEN

El examen estará integrado por problemas similares a los presentados en esta guía y, para acreditarlo se deberá responder correctamente por lo menos el 80% de ellos. La calificación mínima requerida es ocho.

ASPECTOS PRINCIPALES QUE SE TOMARÁN EN CUENTA PARA TU EVALUACIÓN

a) CONTENIDOS CONCEPTUALES

- Definición de conceptos.
- Representación de conceptos matemáticos usando esquemas, diagramas, símbolos, etc
- Reconocer, transitar y manejar las diversas representaciones de un concepto: tabular, gráfica, analítica y verbal
- Utilización de diversas interpretaciones de un concepto
- Reconocer y aplicar propiedades de un concepto

b) CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

Resolución de problemas

- Desarrollo y aplicación de estrategias para la resolución de problemas de Cálculo
- Construir modelos matemáticos, generalizando comportamientos e identificando patrones.

Razonamiento

- Elaboración y comprobación de conjeturas
- Construcción y validación de argumentos
- Utilización de los razonamientos inductivo y deductivo

Comunicación o lenguaje

- Expresar en forma escrita los conceptos matemáticos y la relación entre ellos
- Utilización del lenguaje simbólico del Cálculo en la resolución de problemas

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Unidad 1. Procesos infinitos y la noción de límite

1. Una rana esta en un extremo de una tabla con un metro de longitud salta primero a la mitad de la tabla, luego salta a la mitad del tramo que tiene adelante y continúa saltando cada vez la mitad del tramo faltante generando con la longitud de sus saltos una sucesión. Suponiendo que la rana pudiera dar una infinidad de saltos determina:

   a) la distancia que ha saltado hasta el salto $n = 5$;

   b) el límite del salto cuando n tiende a infinito $(n \to \infty)$;

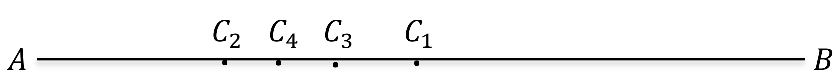
   c) el límite de la distancia total cuando n tiende a infinito $(n \to \infty)$.

   Respuestas: a) $\frac{31}{32}$ b) 0 c) 1

2. Una pelota se suelta desde una altura de un metro del suelo. En cada rebote alcanza 3/4 de la altura anterior (no se considera la fricción con el aire y con el suelo y el tiempo de contacto de la pelota con el suelo se desprecia) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?
   Respuesta: 7

3. El punto C_1 divide al segmento AB que tiene una longitud de 18 centímetros en dos partes iguales, el punto C_2 divide al segmento AC_1 en dos partes iguales también; el punto C_3 divide, a su vez, al segmento C_2C_1 en dos partes iguales, el C_4 hace lo propio con C_2C_3, y así sucesivamente. Determina el límite del punto C_n cuando n crece indefinidamente (tiende a infinito).

   Respuesta: Observemos en la figura



las igualdades siguientes

$$AC_1 = \frac{1}{2}AB,\ \ C_1C_2 = \frac{1}{4}AB,\ \ C_2C_3 = \frac{1}{8}AB,\ \ C_3C_4 = \frac{1}{16}AB$$

y así sucesivamente.

Por otra parte observemos que el punto C_2 se encuentra a la izquierda de C_1, el punto C_3 se encuentra a la derecha de C_2, el punto C_4 se encuentra a la izquierda de C_3, es decir, los puntos se van alternando de posición con respecto al anterior.

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(18)$$

$$C_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18)$$

$$C_3 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18)$$

$$C_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18)$$

$$C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \left(\frac{1}{32}\right)(18)$$

$$\vdots$$

$$C_n = \left(\frac{1}{2}\right)(18) - \left(\frac{1}{4}\right)(18) + \left(\frac{1}{8}\right)(18) - \left(\frac{1}{16}\right)(18) + \cdots + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n (18)$$

es decir:

$$C_n = (18)\left[\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Dentro del corchete se tiene una suma geométrica

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{3}$$

Como

$$C_n = (18)\left[\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 18S = 18\left(\frac{1}{3}\right) = 6$$

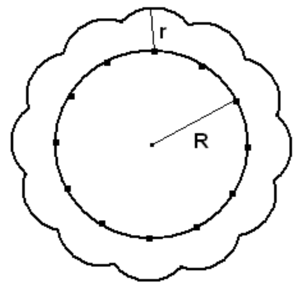
por lo tanto, la posición final del punto es de 6 unidades a partir del punto A.

4. Obtener

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

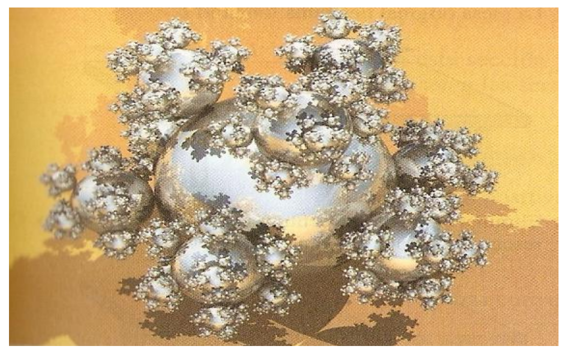
si $a_1 = \sqrt{6}$ y $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$

5. Una circunferencia cuyo radio es R está dividida por n puntos en partes iguales. Cada uno de los puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia de radio r, hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos. Halla el límite de la longitud del perímetro exterior cuando n crece infinitamente.



6.

Copo esférico*.* Un copo esférico (mostrado en la figura de la derecha) es un fractal generado por computadora creado por Eric Haines. El radio de la esfera grande es 1. A la esfera grande se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{3}$. A cada una de éstas se unen nueve esferas de radio $\frac{1}{9}$. Este proceso es infinitamente continuo. Demuestra que el copo esférico tiene una superficie de área no finita.



<u>Respuesta</u>: Denotemos por A el Área Superficial así que:

$$A = 4\pi(1^2) + 9\left(4\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + 9^2\left(4\pi\left(\frac{1}{9}\right)^2\right) + \ \ldots = 4(\pi + \pi + \pi + \cdots) = \infty$$

7. Para los procesos infinitos siguientes encuentra una función que los representa y determina (si es posible) su límite respectivo.

   a) $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \cdots$

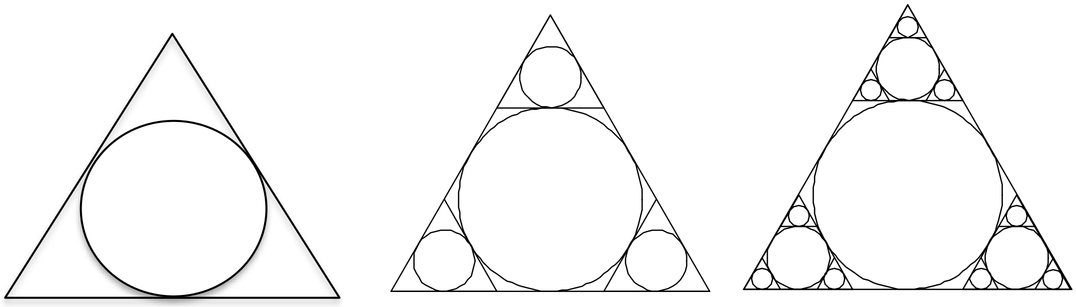
   b) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$

   c) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$

8. Si $h(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, ¿Por qué no existe $h(0)$? Demuestra que $\lim_{x\to 0} h(x)$ existe y calcúlalo. Apoya ambas respuestas gráficamente.

9. En un triángulo equilátero de lado 1 se inscribe la circunferencia de mayor área; con las tangentes a dicha circunferencia y paralelas a los lados del triángulo equilátero original, se forman tres nuevos triángulos equiláteros; en cada triángulo equilátero se vuelven a inscribir las circunferencias de mayor área, se vuelven a trazar las tangentes a cada circunferencia inscrita y paralelas a los lados del triángulo equilátero original, formándose en cada triángulo equilátero tres nuevos triángulos equiláteros; y así sucesivamente, como

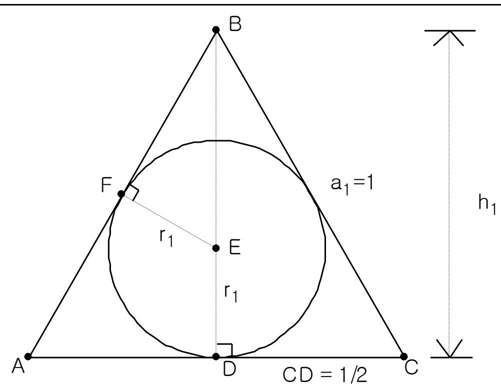
se muestra en la figura siguiente (se muestran los primeros tres pasos). Calcula la suma de las áreas de los círculos inscritos.



Paso 1 Paso 2 Paso 3

Solución: **1era. Iteración**

Se calcula el área del primer círculo inscrito de radio r_1:



En el triángulo equilátero ΔABC, la perpendicular BD divide a AC en su punto medio (probarlo), se aplica teorema de Pitágoras en ΔBCD para calcular h_1:

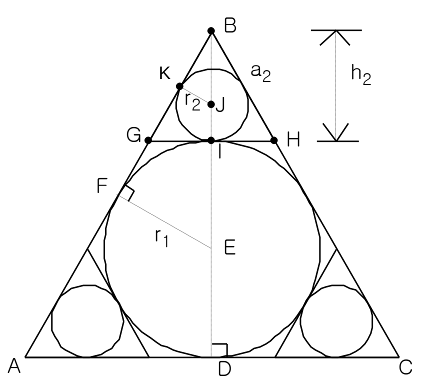
$$h_1 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ahora se calcula r_1, notando que los triángulos BCD y BEF son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos CBD y EBF son de 30^0 (probarlo), así que

$BE:EF::BC:BD$, luego

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_1}{r_1} = 2, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} - r_1 = 2r_1, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 3r_1, \qquad r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

2ª. Iteración



En el triángulo equilátero superior ΔBGH (es equilátero por tener los ángulos con vértice en G y H iguales a 60^0 pues ambos se forman entre paralelas GH y AC y transversales AB y BC y son correspondientes a los ángulos con vértice en A y C respectivamente y estos miden 60^0), la altura h_2 se calcula mediante:

$$h_2 = h_1 - 2r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

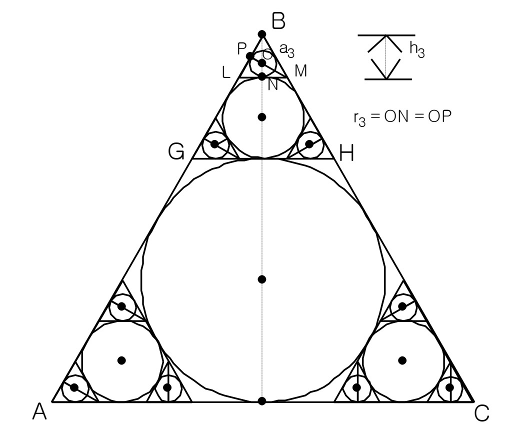
Como $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, el ΔBGH se redujo a la tercera parte del ΔABC, o sea, sus lados miden $1/3$, luego $a_2 = 1/3$.

Ahora se calcula r_2, notando que los triángulos BIH y BKJ son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos HBI y KBJ son de 30^0 (probarlo), así que

$BJ{:}KJ::BH{:}IH$, luego como I es punto medio del segmento GH, $IH = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{6}$, así

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - r_2}{r_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}, \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - r_2}{r_2} = 2, \qquad \frac{\sqrt{3}}{6} - r_2 = 2r_2, \qquad \frac{\sqrt{3}}{6} = 3r_2, \qquad r_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

3ª. Iteración



En el triángulo equilátero superior ΔBLM (es equilátero por tener los ángulos con vértice en L y M iguales a 60^0 pues ambos se forman entre paralelas LM y AC y transversales AB y BC y son correspondientes a los ángulos con vértice en A y C respectivamente, y estos miden 60^0), la altura h_3 se calcula mediante:

$h_3 = h_2 - 2r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} - 2\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}$ Como $\frac{h_3}{h_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{18}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, el ΔBLM se redujo a la tercera parte del ΔBGH, o sea, sus lados miden $(1/3)/3$, luego $a_3 = \frac{1}{9}$.

Ahora se calcula r_3, notando que los triángulos BNM y BPO son semejantes, ya que los dos tienen un ángulo recto y los ángulos MBN y OBP son de 30^0 (probarlo), así que

$BO{:}PO::BM{:}NM$, luego como N es punto medio del segmento $LM, NM = \frac{\frac{1}{9}}{2} = \frac{1}{18}$, así

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{18} - r_3}{r_3} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{18}}, \qquad \frac{\frac{\sqrt{3}}{18} - r_3}{r_3} = 2, \qquad \frac{\sqrt{3}}{18} - r_3 = 2r_3, \qquad \frac{\sqrt{3}}{18} = 3r_3, \qquad r_3 = \frac{\sqrt{3}}{54}.$$

Con las iteraciones anteriores ya se puede expresar la suma S de las áreas de los círculos inscritos:

$$S = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 3\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2 + 9\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{54}\right)^2 + \ \ldots = \pi\left(\frac{3}{6^2} + 3\cdot\frac{3}{6^2\cdot 3^2} + 9\cdot\frac{3}{6^2\cdot 9^2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{3\pi}{6^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \frac{3\pi}{6^2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{3\pi}{6^2}T,$$

en donde la suma

$$T = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right],$$

es una serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$, que se calcula en la forma

$$
\begin{array}{rl}
T_n = & \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
+ \\
-\frac{1}{3}\cdot T_n = & \quad -\left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \cdots - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\
\hline
\frac{2}{3}T_n = & \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \qquad\qquad\qquad\qquad - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}
\end{array}
$$

De donde

$$T_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2},$$

o sea

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2}\right] = \frac{3}{2}.$$

Así pues

$$S = \frac{3\pi}{6^2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\pi}{72}$$

10. Encuentra el valor de la serie siguiente

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Respuesta:

Observemos que la expresión

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

se puede descomponer en sumas parciales de la manera siguiente

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Vamos a obtener una fórmula para la n-ésima suma parcial, para esto vamos a ir escribiendo los sumandos en escalera y sumando estos “telescópicamente”.

Valor de k	**Sumando $k-$ésimo**
1	$1-\cancel{\frac{1}{2}}$
2	$\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}$
3	$\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}$
4	$\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{5}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}$
n	$\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$
Total	$1-\frac{1}{n+1}$

Es decir,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

de aquí se obtiene

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

11. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{8^{n-1}}$$

¿es convergente? ¿Cuál es su suma?

12. Determina

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

si se tiene que

$$a_1=2,\qquad a_n=\frac{1}{3-a_{n-1}},\qquad n>1$$

13. Calcula el valor de los límites siguientes

$a)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right]$

Respuesta:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}\right]=2$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}-x\right]$$

14. Un cuerpo al moverse con una velocidad v tiene una masa relativa m dada por la expresión siguiente,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz.

Halla:

$$\lim_{v\to 0} m=\lim_{v\to 0}\left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right]$$

Respuesta: m_0

15. Calcula los límite siguientes

$$a)\ \lim_{x\to o}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}\quad b)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x-3}-1}{\sqrt[4]{x-3}-1}\quad c)\ \lim_{x\to 5}\left[\frac{x-1}{x^2-4x-5}-\frac{2}{3x-15}\right]\quad d)\ \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{x^2+x-1}{2x+5}\right]$$

$$e)\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}\right]\quad f)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+bx-c}-\sqrt{16x^2-bx+c}\right)$$

16. Si

$$\lim_{x\to 2} f(x)=3$$

use las propiedades de los límites para calcular cada límite.

$$a)\ \lim_{x\to 2}[f(x)]^2\quad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{f(x)}\quad c)\ \lim_{x\to 2}\frac{[f(x)]^3-x^3}{f(x)+x}\quad d)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{3f(x)-2x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{[f(x)]^2+x^4}\quad f)\ \lim_{x\to 2}\left[x^2f(x)-\frac{6}{f(x)}\right]$$

17. Suponga que la función $f(x)$ satisface la inecuación

$$\frac{2}{1+x^2} \leq f(x) \leq 2+x^2$$

Para toda $x \neq 0$.

Evalúa $$\lim_{x \to 0} f(x)$$

e ilustralo gráficamente.

Unidad 2. La Derivada: estudio de la variación y el cambio

18. Sea $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, prueba que $f'(0)$ no existe.

Solución:
Puesto que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}}-0}{h} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

usando límites laterales

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \infty \quad y \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = -\infty$$

Por lo tanto el límite en cero no existe, en consecuencia la derivada en cero tampoco.

19. Sea $f(x) = |x-a|$, prueba que $f'(a)$ no existe, ¿Porqué dicha función no tiene recta tangente en a?

20. Sea n un entero mayor o igual a 1. Calcula

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$$

¿Qué representa este límite?

Respuesta: na^{n-1}

21. Mediante la definición de la derivada de una función, deriva: $f(x) = \frac{1}{x^3},\ x \neq 0$.
Respuesta: $f(x) = -3x^{-4}$

22. Considera la afirmación siguiente: *Si la derivada de una función es cero en todo su dominio entonces la función es constante*. ¿Es cierta la afirmación anterior? Justifica tu respuesta.

23. Suponga las afirmaciones siguientes
Si f es una función continua en su dominio entonces es diferenciable.
Si f es una función diferenciable en su dominio entonces la función es continua.

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas? Justifica tu respuesta.

24. La ecuación de movimiento de una partícula está dada por $s(t) = 4t^3 - 2t + 1$, donde s está en metros y t en segundos, calcula $v(2)$.

    Respuesta: $46\ m/s$.

25. Elabora un registro tabular que exprese el máximo número de regiones formadas por un número dado de cuerdas en un círculo. Deduzca una función que exprese el máximo número de regiones de un círculo en términos del número de cuerdas del círculo.
    Respuesta: $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

26. Demuestra que no existe una recta que pase por el punto $(1,2)$ que sea tangente a la curva $y = 4x^2$.

27. El área de la superficie de una esfera aumenta a razón de: 1 cm^2/seg. ¿A qué razón aumenta el volumen cuando éste es de 36 cm^3?

28. El punto que se apoya en el suelo de una escalera de 5 metros, recargada en una pared, se desplaza de modo que $\frac{dx}{dt} = 1\frac{m}{seg}$ (constante). ¿Es constante $\frac{dy}{dt}$ (del punto que se apoya en la pared)? Argumenta.

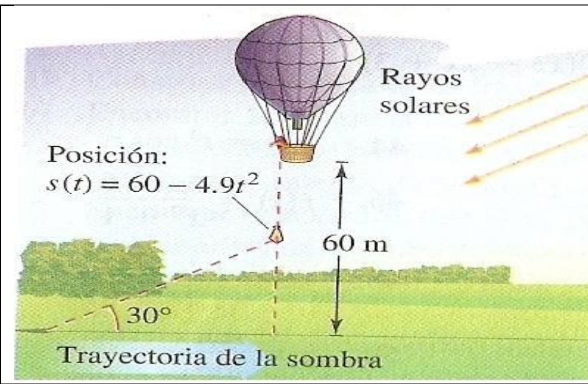
29. ¿Existe un recipiente en que al aumentar el volumen del líquido, $\frac{dV}{dt}$ (la variación instantánea del volumen del líquido) disminuya? Argumenta.

30. Se lanza una piedra a un charco generándose ondas circulares concéntricas. Determina la tasa de variación de la superficie afectada cuando su radio es de 7 cm.

31. Sea g una función diferenciable tal que $g(x+h) - g(x) = 2xh + h^2 - 2h$ y $g(0) = 2$, determina $g(x)$.

32.

Sombra en movimiento. Se deja caer un costal de arena desde un globo aerostático que se encuentra a 60 metros de altura; en ese momento el ángulo de elevación del Sol es de 30 grados (ver figura a la derecha). Encontrar la razón de cambio instantánea del ritmo al que se mueve la sombra sobre el piso cuando el costal está a una altura de 35 metros. (Sugerencia: La posición del costal está dada por $s(t) = 60 - 4.9t^2$.)



Solución.

$$s(t) = 60 - 4.9t^2$$
$$s'(t) = -9.8t$$

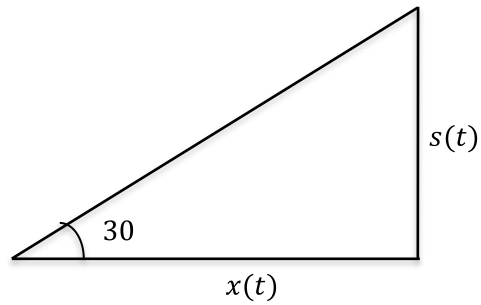
$$s(t) = 60 - 4.9t^2 = 35$$

$$4.9t^2 = 25 \Rightarrow t = \frac{5}{\sqrt{4.9}}$$

$$tan30º = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s(t)}{x(t)} \Rightarrow x(t) = \sqrt{3}s(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{3}\frac{ds}{dt} = \sqrt{3}(-9.8)\left(\frac{5}{\sqrt{4.9}}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} \sim -38.34\ \frac{m}{seg}$$



Unidad 3. Derivación de funciones algebraicas

33. Usando la definición de derivada, calcula $f'(a)$, si $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$

Solución:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{(5x^2 + 2x - 1) - (5a^2 + 2a - 1)}{x - a} = \lim_{x\to a}\frac{5(x^2 - a^2) + 2(x - a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{5(x - a)(x + a)}{x - a} + \lim_{x\to a}\frac{2(x - a)}{x - a} = \lim_{x\to a} 5(x + a) + \lim_{x\to a} 2 = 10a + 2$$

34. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$ en $x = 4$.

Respuesta: $y + 7 = -\frac{25}{8}(x - 4)$.

35. Sea $f(x)$ una función par. Prueba que $f'(x) = -f'(-x)$. Además, traza un bosquejo de la gráfica de la derivada.

36. Sea $f(x)$ una función impar. Prueba que $f'(x) = f'(-x)$. Además, traza un bosquejo de la gráfica de la derivada.

37. Deriva las funciones siguientes:

$$a)\ y = \ln(4x - 7)^x \qquad b)\ y = 4sen\left(e^{3x^2 + x - 3}\right) \qquad c)\ y = \sqrt[x]{x}$$

38. Encuentra una fórmula para la derivada enésima de la función $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

<u>Respuesta</u>:

$$y^n(x) = \begin{cases} n!\ x^{-(n+1)}\ \ si\ n\ es\ par \\ -n!\ x^{-(n+1)}\ si\ n\ es\ par \end{cases}$$

39. Suponga que $f^{(n)}(a)$ y $g^{(n)}(a)$ existen, es decir las derivadas de orden n existen. Encuentra una fórmula para

$$(f \cdot g)^{(n)}(a)$$

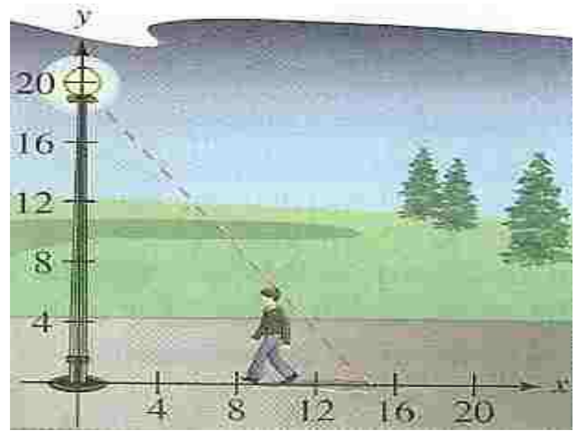
40. Halla una función polinómica f de grado n tal que $f'(x) = 0$ para precisamente $n-1$ números x.
41. ¿Por qué $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en 0?

42. El número a recibe el nombre de raíz doble de la función polinómica, si $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ para alguna función polinómica $g(x)$. Prueba que a es raíz doble de $f(x)$ si y sólo si a es raíz de f y f' a la vez.

43.

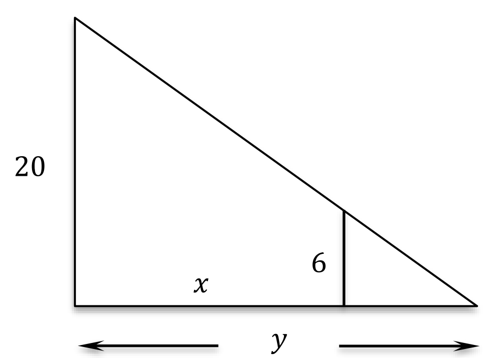
Longitud de una sombra. Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo, camina hacia la luz que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura sobre el suelo (ver la siguiente figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

a) ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
b) ¿a qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?



<u>Solución:</u>

a) Con base en la figura de la derecha donde se representan los datos e incógnitas principales:



mediante la semejanza de triángulos obtenemos las relaciones siguientes:

$$\frac{20}{6} = \frac{y}{y-x} \Longrightarrow 20y - 20x = 6y$$

Por lo que:

$$14y = 20x \Longrightarrow y = \frac{10}{7}x$$

Se sabe que:

$$\frac{dx}{dt} = -5\frac{pie}{segundo}$$

por lo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{10}{7}\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{10}{7}(-5)\frac{pie}{segundo} = -\frac{50}{7}\frac{pie}{segundo}$$

b)

$$\frac{d(y-x)}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = -\frac{50}{7}\frac{pie}{segundo} - (-5)\frac{pie}{segundo} = \left(-\frac{50}{7} + 5\right)\frac{pie}{segundo} = -\frac{15}{7}\frac{pie}{segundo}$$

Unidad 4. Comportamiento Gráfico y Problemas de Optimización

44. Para la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, determina:
    a) los puntos críticos.
    b) los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
    c) los valores máximos o mínimos locales de f.
    d) los intervalos donde la función f es cóncava o f es convexa.
    e) los puntos de inflexión.
    f) su gráfica.

Respuestas:

a) $x = 0$ y $x = -1$.
b)

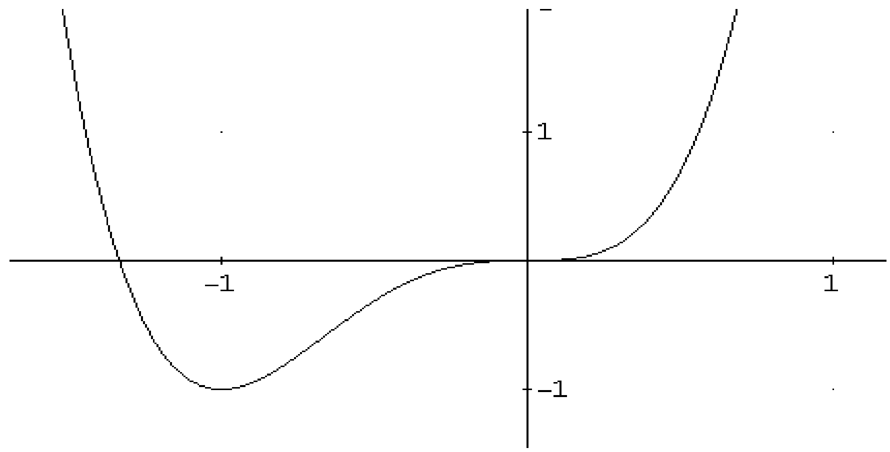
Intervalo	Signo de f'	Forma de la gráfica
$(-\infty, -1)$	$-$	Decreciente
$(-1,0)$	$+$	Creciente
$(0, \infty)$	$+$	Creciente

c) Mínimo local en $x = -1$
d)

Intervalo	Signo de f''	Forma de la gráfica
$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$+$	Convexa
$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	$-$	Cóncava
$(0, \infty)$	$+$	Convexa

e) Puntos de inflexión: $x = -\frac{2}{3}$ y $x = 0$.

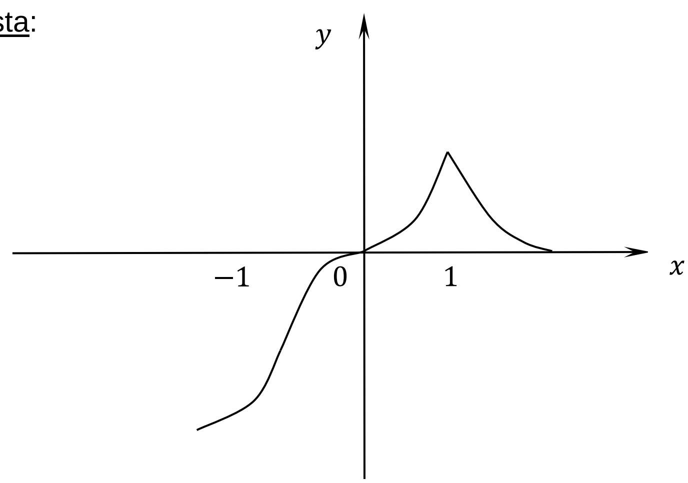
f)



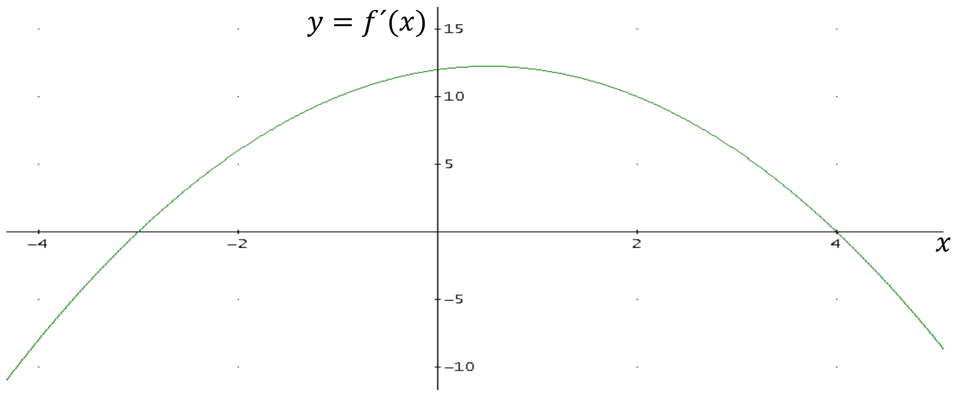
45. Para las funciones $g(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ y $f(x) = 2x - 8 + 3\sqrt[3]{x^2 - 8x + 16}$, determina:
    a) los puntos críticos
    b) los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente
    c) los puntos máximos o mínimos locales de la función
    d) los intervalos donde la función es cóncava o convexa.
    e) los puntos de inflexión
    f) su gráfica.

46. Dibuja la gráfica de una función con las propiedades siguientes:
    a) $f(0) = 0$.
    b) $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y $-1 < x < 1$,
    c) $f'(x) < 0$ para $x > 1$,
    d) $f''(x) > 0$ para $x < -1, 0 < x < 1$ y $x > 1$,
    e) $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 0$.
    f) $f'(1)$ no existe

<u>Respuesta</u>:



46. Analiza la gráfica de la función f' dada y traza una posible gráfica de $f(x)$



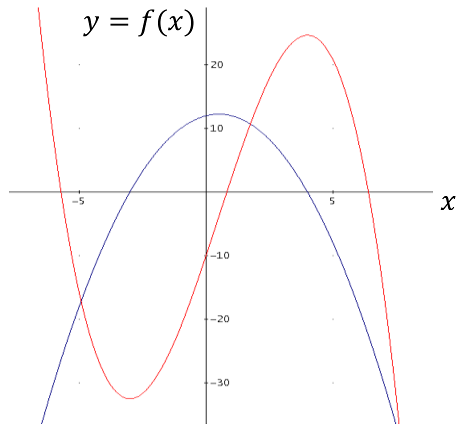
Solución:

Primero, observe que para $x < -3$, la gráfica de $f'(x)$ está abajo del eje x, luego $f'(x) < 0$ y la gráfica de $f(x)$ es decreciente. La gráfica de $f'(x)$ es creciente para $x < -3$, lo cual significa que $f''(x) > 0$ y la gráfica de $f(x)$ es convexa. De la misma manera, se pueden analizar en los intervalos $(-3, 4)$ y $(4, \infty)$; los resultados se resumen en la siguiente tabla.

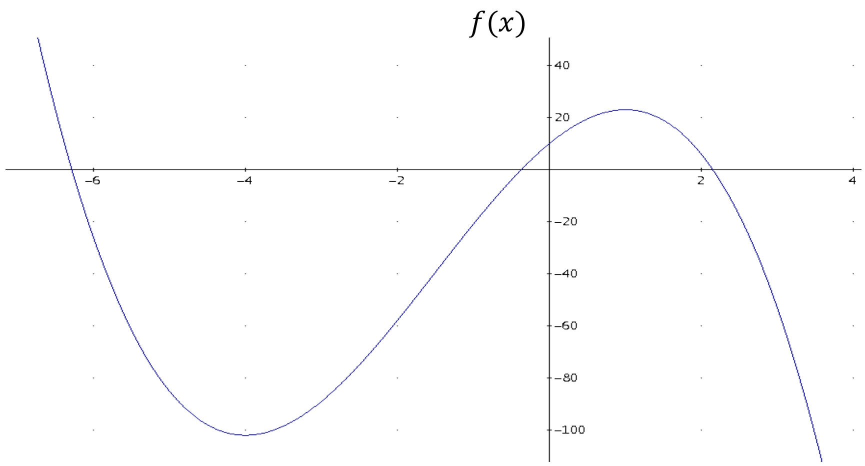
$\boldsymbol{x}$	**Características de $\boldsymbol{y = f'(x)}$**	**Características de $\boldsymbol{y = f(x)}$**
$x < -3$	Negativa, creciente.	Decreciente, convexa.
$x = -3$	Intersección con el eje x.	Tangente horizontal.
$-3 < x < 0.5$	Positiva, creciente.	Creciente, convexa
$x = 0.5$	Tangente horizontal.	Posible punto de inflexión.
$0.5 < x < 4$	Positiva, creciente.	Creciente, cóncava.
$x = 4$	Intersección con el eje x.	Tangente horizontal
$x > 4$	Negativa, decreciente.	Decreciente, cóncava.

Como la concavidad cambia en $x = 0.5$ (de arriba hacia abajo), allí se presenta un punto de inflexión, pero no hay ninguna tangente horizontal, en cambio en $x = -3$ y $x = 4$ no cambia la concavidad. La gráfica de $f(x)$ es descendente a la izquierda de $x = -3$ y ascendente a la derecha, luego debe haber un mínimo relativo en $x = -3$, de manera análoga en $x = 4$ debe haber un máximo relativo.

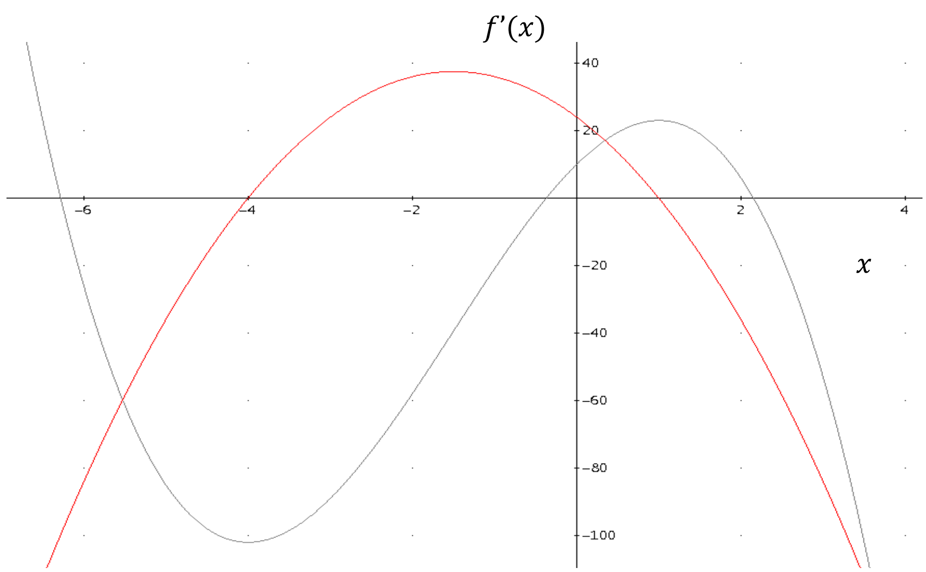
A continuación se muestran las gráficas de $f'(x)$ y una posible función $f(x)$ que tiene todas las características requeridas para. Observa que debido a que no se dan los valores de $f(-3), f(0.5)$ y $f(4)$, muchas otras gráficas cumplirán los requisitos.



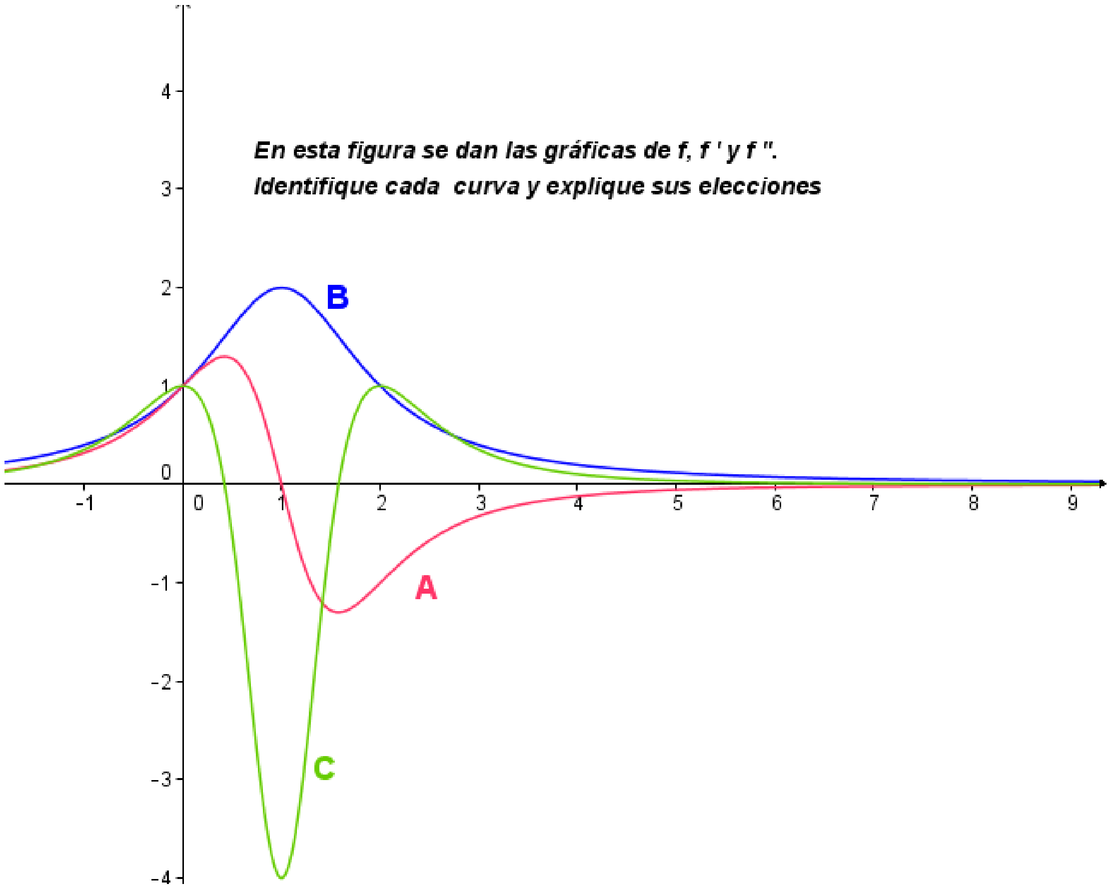
47. A partir de la gráfica de la función f, esboza la gráfica de f'.



Respuesta:



48.



49. Traza la gráfica de las siguientes funciones. Determina sus intersecciones con los ejes; sus máximos y mínimos relativos; puntos de inflexión y cualquier otro elemento que te permita obtener dicha gráfica.

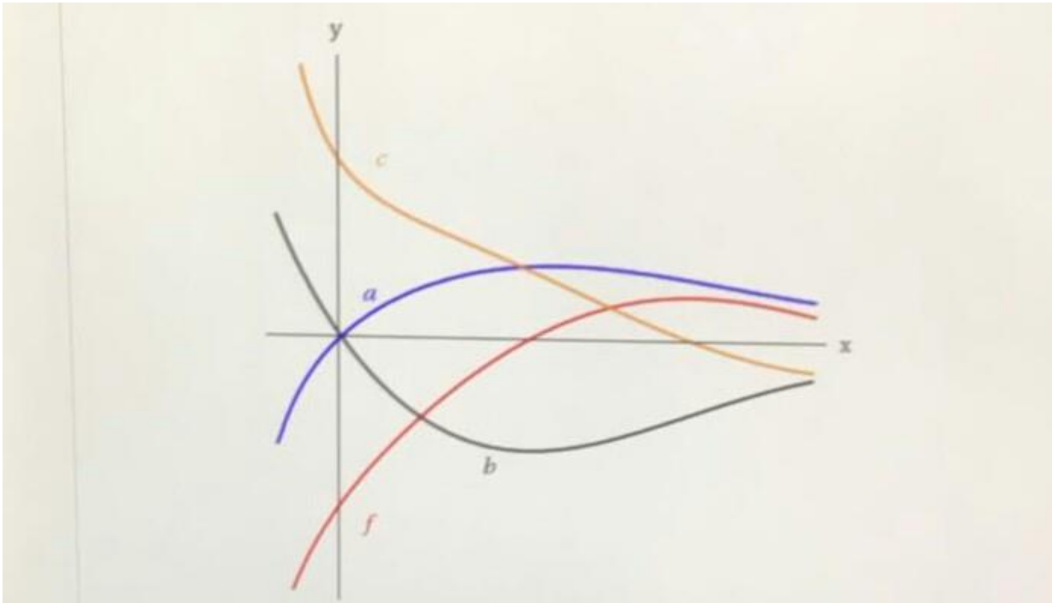
$a)\ f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad b)\ f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$ $\qquad c) f(x) = \ x\sqrt{4-x^2}$

50. Construya un ejemplo de funciones $f(x),\ g(x)\ y\ h(x)$ para las cuales $f''(1) = g''(1) = h''(1) = 0$ y además se cumpla que :

En $x_0 = 1, f(x)$ tiene un mínimo relativo.
En $x_0 = 1, g(x)$ tiene un máximo relativo.
En $x_0 = 1, h(x)$ tiene un punto de inflexión.

51. Calcula las dimensiones del cilindro recto de menor superficie que tenga un volumen de 1litro (1000 cm^3).

52. A continuación, se muestra la gráfica de una función $f(x)$ y las curvas a, b y c. Explica cuál de las curvas es la gráfica de una antiderivada de $f(x)$



53. Prueba que la suma de un número y su recíproco es por lo menos dos.

54. Realiza los ejercicios siguientes:

   i. Suponga que tiene un polinomio $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ con puntos singulares en $-1, 1, 2, 3$ y $f''(-1) = 0, f''(1) > 0, f''(2) < 0, f''(3) = 0$. Traza la gráfica de f con todo el detalle posible a partir de esta información.

   ii. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad β y según un ángulo α de modo que su componente vertical es $\beta \sin \alpha$ y la componente horizontal es $\beta \cos \alpha$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -4.9t^2 + (\beta \sin \alpha)t$ mientras que su velocidad horizontal permanece constante $\beta \cos \alpha$.

      a) Prueba que la trayectoria de la bala es una parábola.
      b) Halla el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

55. Encuentra el número mínimo M tal que para cada valor de x que satisface la desigualdad $0 \leq x \leq 2$ se tenga $|2x^2 - x^3| \leq M$.

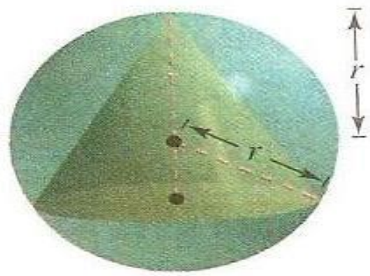
56. Halla el número máximo B tal que para cada $x > 0$, se tenga $\frac{1}{x} + 4x \geq B$.

57. Localiza el punto en la parábola $y^2 = 2x$ que está más próximo al punto $(1,4)$.

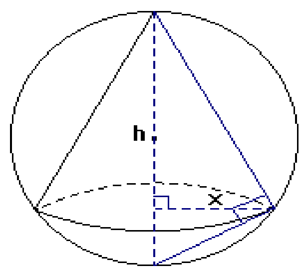
58. Calcula el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en un semicírculo de radio r.

59. Un cono de papel para beber agua debe contener 10 cm^3 de líquido. Encuentra la altura y el radio del cono que requerirá la menor cantidad de papel.

60. ***Volumen máximo.*** Encuentra el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.



<u>Solución.</u> Considerando la figura siguiente que se relaciona con los datos e incógnita que se mencionan, se tiene:



Por semejanza de triángulos se sabe que:

$$\frac{2r-h}{x}=\frac{x}{h}\Longrightarrow x^2=h(2r-h)$$

El volumen del cono es:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 h=\frac{1}{3}\pi h(2r-h)h=\frac{1}{3}\pi h^2(2r-h)=\frac{2\pi r}{3}h^2-\frac{\pi}{3}h^3$$

derivando:

$$V'(h)=\frac{4\pi r}{3}h-\pi h^2=h\left(\frac{4\pi r}{3}-\pi h\right)$$

Igualamos a cero:

$$h\left(\frac{4\pi r}{3}-\pi h\right)=0\Longrightarrow h=0\quad o\quad \frac{4\pi r}{3}-\pi h=0$$

Como $h\neq 0$, se tiene que

$$h=\frac{4r}{3}$$

Volvamos a derivar

$$V''(h)=\frac{4\pi r}{3}-2\pi h$$

evaluemos en esta segunda derivada el punto crítico encontrado

$$V''\left(\frac{4\pi r}{3}\right) = \frac{4\pi r}{3} - 2\pi\left(\frac{4r}{3}\right) = -\frac{4\pi r}{3} < 0$$

por el criterio de la segunda derivada, V tiene un máximo en $h = \frac{4r}{3}$
Ahora, sustituimos este valor en x.

$$x^2 = h(2r - h) = \frac{4r}{3}\left(2r - \frac{4r}{3}\right) = \frac{8r^2}{9} \Longrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}\,r}{3}$$

el volumen máximo es:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8r^2}{9}\right)\left(\frac{4r}{3}\right) = \frac{32\pi}{81}r^2\ unidades\ cúbicas.$$

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Unidad 1. Derivada de Funciones Trascendentes .

1. Determina el valor de los límites siguientes:

   $a)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0} xsen\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{xsen(bx)\cot(ax)}{sen(ax)}$

   Respuesta a) 1 b) 0
   Argumenta la respuesta.

2. Encuentra la derivada de las funciones: $sen(x)$ y $\cos(x)$ a partir de la definición
3. A partir de la derivada de las funciones seno y coseno, halla la fórmula para la derivada de la función tangente de x.

   Solución:

   Sabemos que:

   $$\frac{dsen(x)}{dx} = \cos(x)\ \ y\ \frac{dcos(x)}{dx} = -sen(x)$$

   Utilizando la identidad por cociente de la función tangente y la regla del cociente, se obtiene

   $$\frac{dtan(x)}{dx} = \frac{\cos(x)\cos(x) - sen(x)(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$$

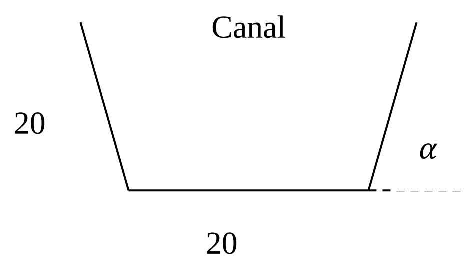
   es decir,

   $$\frac{dtan(x)}{dx} = sec^2(x).$$

4. Utiliza $\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)$ y el teorema de la función inversa para la derivada de una función obtén $\frac{d}{dx}arcsen(x)$ en el intervalo $[-1,1]$.

5. El extremo de una biela que se mueve verticalmente en un motor de combustión interna es: $x(t) = 3sen(t) + 4\cos(t)$. Demuestra que la aceleración y la posición son iguales en magnitud y opuestas en signo.

6. De una tira de metal de 60 cm. de ancho se quiere formar un canal de sección transversal un trapecio isósceles. ¿Para qué ángulo α el área de la sección es máxima?



7. Calcula los límites siguientes:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad\qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

8. Un cable telegráfico submarino consta de un alma de cobre, con una envoltura de material no conductor. Si x representa la razón del radio del alma al espesor de la envoltura, y se sabe que la velocidad v de transmisión varía como: $v = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Demuestra que la mayor velocidad se alcanza cuando $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

9. Obtenga los límites siguientes:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{9x} - e^{3x}}{x} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to 2} \frac{4(10)^n - 3(10)^{2n}}{3\ (10)^{n-1} + 2(10)^{2n-1}}$$

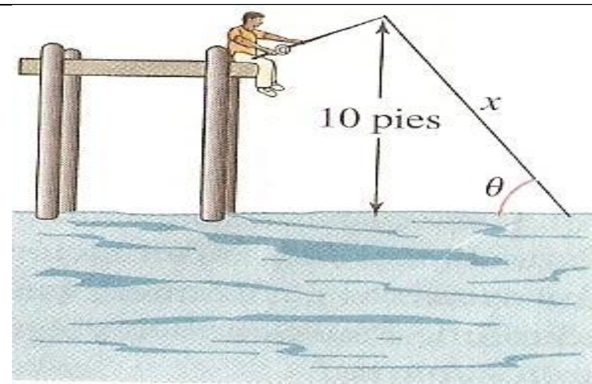
10. Encuentra la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ a partir de la definición.
11. Si $f(x) = log_e(\cos(x))$ calcula $f'(x)$.
12. Deriva la función:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2-2x}}$$

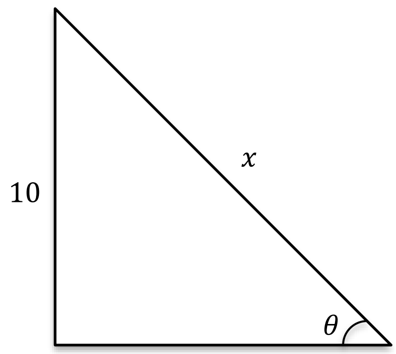
<u>Respuesta</u>:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2-4}$$

13. Obtenga los puntos en donde las pendientes de las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 2^x$ son iguales.
14.

Angulo de elevación. El pescador de la figura siguiente recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua. ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?	

Solución:



De la figura se tiene

$$sen(\theta) = \frac{10}{x}$$

sabemos que:

$$\frac{dx}{dt} = -1\frac{pie}{segundo}$$

derivamos la primera relación

$$\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

De esta manera

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{10}{x^2}(\sec(\theta))\frac{dx}{dt} = -\frac{10}{25^2}\left(\frac{25}{\sqrt{25^2 - 10^2}}\right)(-1)$$

$$= \frac{10}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{625 - 100}}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{525}}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5\sqrt{21}}\right) = \frac{2}{25\sqrt{21}}$$

Finalmente

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\sqrt{21}}{525} \sim 0.017\frac{rad}{seg}$$

Unidad 2. La Integral Definida

15. Calcula el área de la región bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $0 \leq x \leq 2$ arriba del eje x, mediante rectángulos debajo de la curva.

16. Dada $A(x) = \int_a^x (6-t)dt$, determina $A'(x)$ de las dos maneras siguientes:
    a) Usando una interpretación geométrica

    b) Usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

17. Si f es una función diferenciable, con $f(1) = 4, f(2) = 6$ y $\int_1^2 xf'(x)dx = 5$
    Determina
$$\int_1^2 f(x)dx$$

18. Suponga que f es una función continua en los reales, demuestra que:

    a) Si f es una función par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
    b) Si f es una función impar entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
    c) $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$.
    d) $\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$.
    e) Demuestra que
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)dx|$$

19. Calcula las integrales siguientes:

$$a)\ \int_{-1}^2 (x^3 - x)dx \qquad b)\ \int_0^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx \qquad c)\ \int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx$$

20. Suponga que la velocidad de un objeto en ${}^{m}/_{s}$ está dada por $v(t) = 10 + 8t - t^2$. Calcula la distancia recorrida por el objeto durante los primeros 5 segundos.

21. Sobre la luna la aceleración de la gravedad es de $g = -1.6\frac{m}{seg^2}$. En la luna se deja caer una piedra desde un peñasco y golpea la superficie 20 segundos después, ¿desde qué altura cayó? ¿Cuál era su velocidad en el momento del impacto?

22. Encuentra el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $y = 5x$ y $y = x^3 - 4x$.

    <u>Solución:</u>
    Las gráficas de estas funciones se intersecan cuando:

$$x^3 - 4x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 3$$

    Puesto que tenemos dos regiones, el área total está dada por

$$\int_{-3}^{0}[(x^3-4x)-5x]\,dx+\int_{0}^{3}[5x-(x^3-4x)]\,dx=\int_{-3}^{0}(x^3-9x)\,dx+\int_{0}^{3}(9x-x^3)\,dx$$

$$=\left(-\frac{(-3)^4}{4}-\frac{9(-3)^2}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}3^2-\frac{3^4}{4}\right)$$

$$=-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)+\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)$$

$$=\frac{81}{2}u^2$$

23. Determina el área de la región acotada por las curvas $y=x^3-6x^2+8x$ y $y=x^2-4x$, en el intervalo [0,4]

    Respuesta: $\frac{71}{6}u^2$

24. Calcula las integrales

$$a)\ \int_0^1 xln(x+1)dx \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(x)}{\sqrt{2\sec(x)}}\,dx$$

    Respuestas: $a)\ \frac{1}{4}$ $\quad b)\ \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

25. Calcula el área de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $f(x)=sen(x)$ cuando $x\epsilon[0,2\pi]$.

Unidad 3. La Integral como una Antiderivada

26. Encuentra las funciones F que satisfagan las condiciones dadas para cada caso.

a) $f'(x)=8x^2, f(0)=1$.

b) $f'(x)=\sqrt{x},\ \ f(1)=2$.

c) $f'(x)=14x^{-4/3},\ f(16)=-60$.

d) $f'(x)=x^2\sqrt{x},\ f(4)=0$.

27. Calcula la integral indefinida $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

    Respuesta:

$$\int x\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

28. Calcula la integral indefinida $\int\frac{x+1}{x-1}dx$.

    Respuesta:

$$\int\frac{x+1}{x-1}dx=x+2\ln|x-1|+c$$

29. Calcula las integrales siguientes, sin usar tablas de integración:

$$\int \sec(x)\,dx, \quad \int \csc(x)\,dx$$

30. Mediante el método de integración por partes, calcula las integrales siguientes:

$$a)\ \int e^x sen(x)dx \qquad b)\ \int e^x \cos(x)\,dx \qquad c)\ \int x(x-1)^8\,dx$$

<u>Respuestas</u>:

$$a)\ \int e^x sen(x)dx = \frac{1}{2}e^x(sen(x)-\cos(x))+c$$

$$b)\ \int e^x cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x(sen(x)+\cos(x))+c$$

$$c)\ \int x(x-1)^8dx = \frac{x(x-1)^8}{9} - \frac{(x-1)^{10}}{90}+c$$

31. Calcula $\int x^2\cos(x)\,dx$ por el método tabular

<u>Solución:</u>

Esta integral la podemos calcular usando el método de integración por partes, pero utilizaremos el denominado **método tabular**. El método tabular que presentaremos aquí hace que las integraciones por partes sean bastante sencillas, en especial en problemas en los que se tienen que aplicar varias veces la integración por partes. Este método funciona bien en integrales de la forma

$$\int x^n sen(ax)dx, \qquad \int x^n \cos(ax)\,dx \qquad \int x^n e^{ax}dx, \ \ n\epsilon\mathbb{N}.$$

Sea $u = x^2$ y $dv = \cos(x)\,dx$. Luego, se construye una tabla de tres columnas como la siguiente:

Signos alternados	**u y sus derivadas**	**v' y sus primitivas**
$+$	x^2	$\cos(x)$
$-$	$2x$	$sen(x)$
$+$	2	$-\cos(x)$
$-$	0	$-sen(x)$

Derivar hasta obtener
una derivada nula

La solución se obtiene sumando los productos: (signo alternado) (u y sus derivadas) (v' y sus primitivas de las entradas diagonales), es decir,

$$\int x^2 \cos(x)\,dx = (+)x^2 sen(x) + (-1)2x(-\cos(x)) + (+)2(-sen(x) + c$$

$$= x^2 sen(x) + 2x cos(x) - 2sen(x) + c$$

Explica por qué funciona el método tabular.

32. Mediante el método tabular, calcula las integrales siguientes:

$$a)\ \int x^2\, e^x\, dx \qquad b)\ \int x^3 sen(x)dx$$

<u>Respuestas</u>:

$$a)\ \int x^2\, e^x\, dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$$b)\ \int x^3 sen(x)dx = -x^3 \cos(x) + 3x^2 sen(x) + \ 6x cos(x) - 6sen(x) + c$$

33. Calcula las integrales siguientes

$$a)\ \int (|x-1| + |2x+1|)\, dx \qquad b)\ \int \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} dx \qquad c)\ \int cos\left(\sqrt{x}\right) dx$$

34. Resuelve las integrales siguientes:

$$a)\ \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \qquad b)\ \int \sqrt{x}\ \log(x)dx \qquad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \qquad d)\ \int \frac{arctg(x)}{1+x^2}$$

$$e)\ \int arctg\left(\sqrt{x}\right)\ dx \qquad f)\ \int x^2 arctg(x)dx$$

35. Halla las integrales siguientes:

$$a)\ \int xe^{-x^2}\, dx \qquad b)\ \int \frac{x+1}{x}\ dx \qquad c)\ \int \frac{x}{3x^2+2} dx \qquad d)\ \int x^2\sqrt{x^3 - 14}\, dx \qquad e)\ \int_0^6 \frac{x\, dx}{x+3}$$

36. ***Crecimiento de árboles.*** Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es, aproximadamente, $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h es la altura en centímetros. Las plantas de semillero miden 12 centímetros de altura cuando se plantan $(t = 0)$. a) Determina la altura después de t años. b) ¿Qué altura tienen los arbustos cuando se venden?

<u>Solución:</u>

$$a)\ h(t) = \int (1.5t + 5)dt = 0.75t^2 + 5t + c$$

Como $h(0) = 12$, se tiene

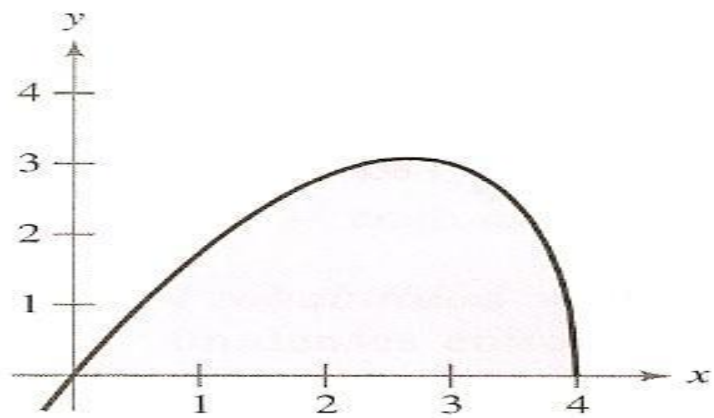
$$12 = h(0) = 0.75(0)^2 + 5(0) + c$$

sustituyendo en la función h,

$$h(t) = 0.75t^2 + 5t + 12$$

$b)$ $h(6) = 0.75(6)^2 + 5(6) + 12 = 690\ cm$.

37. Encuentra el área A de la región limitada por el eje x y la gráfica de la función $y = x\sqrt{4-x}$ la cual se muestra en la figura siguiente.



Solución:
Sabemos que el área de la región esta dada por la integral, esta se muestra enseguida y la resolveremos mediante integración por cambio de variables.

$$A = \int_0^4 x\sqrt{4-x}\, dx$$

Hagamos el cambio

$u = \sqrt{4-x} \Rightarrow u^2 = 4 - x$ y $2udu = -dx$, también $x = 4 - u^2$
Aplicando el cambio de variable a la integral, se obtiene

$$A = \int_0^4 x\sqrt{4-x}\ dx = \int_2^0 (4-u^2)u(-2udu)\, du = 2\int_2^0 u^2\,(u^2-4)du$$

$$= 2\int_2^0 (u^4 - 4u^2)\, du = 2\left[\frac{u^5}{5} - 4\left(\frac{u^3}{3}\right)\right]_2^0 = -2\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right) = -64\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -64\left(-\frac{2}{15}\right) = \frac{128}{15}$$

Unidad 4. Modelos y Predicción

38. La población en un país está creciendo en forma directamente proporcional a su población en ese momento. Si en 2007 su población era de 101 millones y en 2008 es de 104 millones. Calcula su población para el año 2024.

Solución: Denotemos por y a la población y por t al tiempo en años,
Como la rapidez de crecimiento es directamente proporcional a la población se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

donde k es la constante de proporcionalidad.
Separando variables

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

Integrando ambos lados

$$\int \frac{dy}{y} = \ln(y) = \int k\,dt = kt + c$$

en donde y es mayor que cero (tamaño de la población en el tiempo t)
Despejamos a la población.

$$y = e^{kt+c} = e^{c}e^{kt} = y_0 e^{kt}$$

donde $y_0 = e^{c}$, llamada población inicial

Como en el 2007 se tienen 101 millones, se tiene que para el tiempo $t = 0$

$$101 = y(0) = y_0 e^{0} = y_0$$

Para el año 2008, consideramos $t = 1$, se tiene

$$104 = y(1) = 101e^{k(1)} = 101e^{k}$$

despejamos k

$$e^{k} = \frac{104}{101} \sim 1.02970297 \Rightarrow k \sim 0.03$$

Para 2024 habrán transcurrido 17 años, es decir $t = 17$, la población será aproximadamente de

$$y(17) = 101e^{0.03(17)} = 168.19\, millones$$

39. Un cultivo de bacterias comienza con $n_0 = 1000$ y al cabo de 2 horas aumenta hasta 2500. Suponer que el cultivo crece con una rapidez proporcional a su tamaño. Calcula el tamaño de la población a las 6 horas.

    Respuesta: 15625 bacterias.

40. La vida media del radio 226 $({}^{226}_{88}Ra)$ es de 1590 años. Esto quiere decir que la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente y que en 1590 años se desintegra la mitad de cualquier cantidad dada.
    a) Si se tiene una muestra de 100 miligramos de $({}^{226}_{88}Ra)$, ¿cuántos miligramos se tendrán después de 1000 años?
    b) ¿Cuánto tiempo se requiere para tener una masa de 30 miligramos?

Respuestas:

a) 65 miligramos b) 2762 años

41. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Respuesta: $y = Ae^{\frac{x^3}{3}}$, donde A es una constante.

42. Un cuerpo, a una temperatura desconocida, se coloca en una habitación en la cual la temperatura es de $18°$ (constante). Si después de 15 minutos la temperatura es de $8°$ y después de 25 minutos de $12°$. Halla la temperatura inicial del cuerpo.

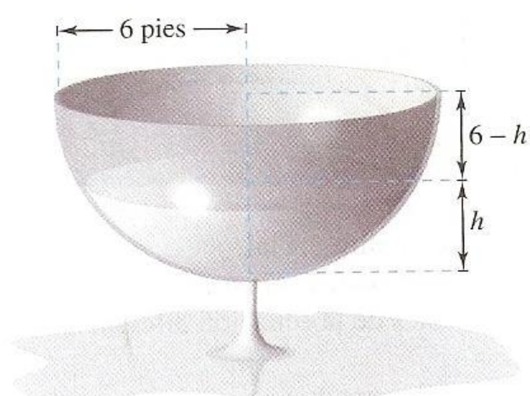
43. Una esfera maciza de metal se funde con una velocidad inversamente proporcional a su radio. Si su volumen se reduce 5% en 20 minutos. ¿En qué tiempo se derretirá la esfera?

44. Se necesita una fuerza de 500 lb para comprimir un resorte de su longitud natural de 10 pulgadas hasta una longitud de 9 pulgadas. Determina el trabajo realizado al comprimir el resorte hasta una longitud de 8 pulgadas.

45. Encuentra la función y si:

$a)\ \frac{dy}{dx} = x(2x+y)^2 - 2$ $\qquad b)\ \frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{1}{x^2}$

46. ***La ley de Torricelli*** establece que el agua fluirá desde una abertura en la parte inferior del tanque con la misma velocidad que alcanzaría al caer desde la superficie del agua a la abertura. Una de las formas de la ecuación de Torricelli es: $A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh}$, donde h es la altura del agua en el tanque, k es el área de la abertura de la parte inferior del tanque, $A(h)$ es el área de la sección transversal a la altura h y g es la aceleración debida a la gravedad: ($g \approx 32\ \frac{pies}{seg^2}$). Un tanque semiesférico tiene un radio de 6 pies. Cuando el tanque está lleno, una válvula circular con un radio de 1 pulgada se abre en la parte inferior, como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuánto tiempo es necesario para que el tanque se vacíe completamente?



Solución:
Consideremos los valores conocidos

$$k = \left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi, \quad g = 32, \quad x^2 + (y-6)^2 = 36$$

de la ecuación de la circunferencia se obtiene $x^2 = -y^2 + 12y$
por lo que el área A de la sección transversal es $A(h) = (12h - h^2)\pi$
mediante la forma de la ecuación de Torricelli

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{2gh} \Longrightarrow (12h - h^2)\pi\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{144}\pi\sqrt{64h}$$

Reduciendo y separando variables

$$(216h - 18h^2)h^{-\frac{1}{2}}\,dh = -dt \Longrightarrow \left(216h^{\frac{1}{2}} - 18h^{\frac{3}{2}}\right)\,dh = dt$$

integrando

$$\int\left(-216h^{\frac{1}{2}} + 18h^{\frac{3}{2}}\right)dh = \int dt \;\; \Longrightarrow -216\left(\frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + 18\left(\frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) = t + c$$

Simplificando en la última ecuación

$$\frac{h^{\frac{3}{2}}}{5}(36h - 720) = t + c$$

Cuando $h = 6, \;\; t = 0 \quad \therefore \frac{6\sqrt{6}}{5}(216 - 720) = c \quad \therefore c = \frac{6\sqrt{6}}{5}(-504) \;\; \therefore c \approx 1481.45$

El tanque está completamente vacío cuando $h = 0$.
Asi, el tiempo es

$$t = 1481.45 \;\approx 24'\,41''segundos$$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, F. ***Cálculo diferencial e integral***. Edit. Mc Graw-Hill. México, 1995.

Bittinger, M. ***Cálculo para Ciencias Económico-administrativas***. Addison Wesley.7ª ed. Colombia, 2002.

Cruse A. B. y Granver M. ***Lectures on freshman calculus***. Addison-Wesley Publishing Company. U S A. 1971.

Granville, W. A. ***Cálculo diferencial e integral***. Edit. Limusa. México, 1981.

Leithold, L. ***El Cálculo con geometría analítica***. Edit. Harla. 2ª. Ed. México, 1972.

McAloon, K y Tromba, A. ***Cálculo en una variable***. Publicaciones Cultural. 1ª ed. en español. México, 1975.

Pinzón, E. A. ***Cálculo I. Diferencial. Teoría y 476 problemas resueltos***. Edit. Harla. México,1973.

Purcell, et. al. ***Cálculo***. Prentice Hall. 8ª ed.

Soler, N. y Aranda. ***Fundamentos de Cálculo***. ECOE ediciones. Reimpresión de la 2ª ed. México, 2003.

Spivak, M. ***Cálculo infinitesimal***. Edit. Reverté. México, 1992.

Stewart, J. ***Cálculo***. Grupo editorial iberoamérica. México, 1994.

Stewart, J. ***Cálculo. Conceptos y contextos***. International Thomson Editores. México, 1999.

Zill, G. D. ***Cálculo con geometría analítica***. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1997.